MA2201 – OPPGAVESETT 6

Avsnitt 13

33) Vi vil undersøke homomorfier $\phi : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$. Da $\mathbb{Z}_{12}$ er endelig og $\mathbb{Z}_{12}/\mathrm{Ker}\,\phi \simeq \mathrm{Im}\,\phi$ vet vi $|\mathrm{Im}\,\phi| \,\big|\, 12$. Men $\mathrm{Im}\,\phi \subseteq \mathbb{Z}_5$, så da må $|\mathrm{Im}\,\phi| \,\big|\, 5$. Men da følger det at $|\mathrm{Im}\,\phi| = 1$, og $\phi : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ er den trivielle homomorfi $\phi(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}_{12}$.

38) Vi ser på $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow S_3$. Vi definerer $\sigma = (1,2)$. Har da at $\langle \sigma \rangle = \{i, \sigma\}$. Videre er $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cup 1+2\mathbb{Z}$. Vi definerer

$$\phi(x) = \begin{cases} i, & x \in 2\mathbb{Z} \\ \sigma, & x \in 1+2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dette er en homomorfi, som vi enkelt kan vise ved å teste tre muligheter for a, b i forhold til $2\mathbb{Z}$ og $1+2\mathbb{Z}$.

23) Vi har $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, gitt ved $\phi(1,0) = (2,-3)$ og $\phi(0,1) = (-1,5)$. Vi vet at $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ er abelsk, så vi slurver litt med notasjonen.

$$\phi(4,6) = \phi\left[4(1,0) + 6(0,1)\right] = 4\phi(1,0) + 6\phi(0,1)$$

$$= 4(2,-3) + 6(-1,5) = (8,-12) + (-6,30) = (2,18).$$

Videre, $\forall x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\exists k, l \in \mathbb{Z}$ s.a.

$x = k(1,0) + l(0,1)$. Da blir

$$\phi(x) = \phi[k(1,0)+l(0,1)] = (2k-l, -3k+5l) = (0,0)$$

og $2k = l$ samt $3k = 5l$. Da er $k = l = 0$,
og $\ker\phi = (0,0) = e$. Da er ϕ en isomorfi.
ok

4a) Vi lar G, G' og G'' være grupper, og $\phi: G \longrightarrow G'$ og $\gamma: G' \longrightarrow G''$ er homomorfier. Vi ser på komposisjonen $\gamma\phi: G \longrightarrow G''$. Vi får:

$$\gamma\phi(ab) = \gamma[\phi(ab)] = \gamma[\phi(a)\phi(b)] = \gamma[\phi(a)]\gamma[\phi(b)]$$
$$= \gamma\phi(a)\gamma\phi(b),$$

og vi konkluderer med at $\gamma\phi$ er en homomorfi. $\square$

ok

Avsnitt 14

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ er ikke syklisk

$|\langle 2\rangle \times \langle 2\rangle| = \{0,2\} \times \{0,2,4,6,8,10\}$

2) Vi vil bestemme ordenen til $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}) / (\langle 2\rangle \times \langle 2\rangle)$. Vi ser at $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}| \overset{?!}{=} \operatorname{lcm}(12,4) = 12$ og $|\langle 2\rangle \times \langle 2\rangle| = \operatorname{lcm}(2,6) = 6$, så orden blir $12/6 = 2$. $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}| = 4 \cdot 12$ $\quad |\langle 2\rangle \times \langle 2\rangle| = 2 \cdot 6$

6) Vi vil bestemme ordenen til $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}) / \langle 4,3\rangle$. Vi ser at $|\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}| \overset{?!}{=} \operatorname{lcm}(12,18) = 36$ og $|\langle 4,3\rangle| = 6$, så ordenen er $36/6 = 6$.

12) Ordenen til $(3,1) + \langle (1,1)\rangle$ i $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) / \langle (1,1)\rangle$. Altså minste n s.a. $n((3,1) + \langle (1,1)\rangle) = (0,0) + \langle (1,1)\rangle$. Men dette er ekvivalent med minste n s.a. $n(3,1) \in \langle (1,1)\rangle$. Vi ser dette holder for $n = 2$, så ordenen er da 2.

ok

30) Vi lar H være en normal undergruppe av en gruppe G og la $m = (G:H)$, dvs. at H har m restklasser i G. Vi vil vise at $a^m \in H$, $\forall a \in G$. Da H er en normal undergruppe, finnes en homomorfi $\phi: G \longrightarrow G'$ s.a. $G/H \simeq \text{Im}\,\phi$. Men da er $|\text{Im}\,\phi| = m$. Videre er $\phi(a) \in \text{Im}\,\phi$, så da er $\phi(a^m) = [\phi(a)]^m \in \text{Im}\,\phi$. Men da vet vi at $[\phi(a)]^m = e'$, og $a^m \in \text{Ker}\,\phi$, men $\text{Ker}\,\phi = H$, så $a^m \in H$. $\square$

de

31) Vi vil vise at dersom $H, K \trianglelefteq G$ er normale undergrupper, er også $H \cap K \trianglelefteq G$ en normal undergruppe.

Først og fremst: Er det åpenbart at $H \cap K$ er en undergruppe? Ja. Anta $a, b \in H \cap K$ ~~men $ab \notin H \cap K$. Men da må $ab \notin H$ og $ab \notin K$.~~ Men $a, b \in H \cap K$ $\Rightarrow$ $a, b \in K$, og $a, b \in H$, så da er jo $ab \in K$, og $ab \in H$ da K (og H) er en undergruppe. Så $H \cap K$ er en undergruppe. (Tilsvarende kan vi vise resten av gruppeaksiomene.) $\forall ab \in H \cap K$

Av teorem 14.13 vet vi at da H, K er normale undergrupper vil

$$ghg^{-1} \in H, \quad \forall g \in G \quad \text{og} \quad \forall h \in H$$
$$gkg^{-1} \in K, \quad \forall g \in G \quad \text{og} \quad \forall k \in K.$$

La $a \in H \cap K$. Da $H \cap K \subseteq H$ og $H \cap K \subseteq K$ vil

$$\left.\begin{array}{l} gag^{-1} \in H, \quad \forall g \in G \\ gag^{-1} \in K, \quad \forall g \in G \end{array}\right\} gag^{-1} \in H \cap K,$$

de

Så da er $H \cap K$ er en normal undergruppe. $\square$

Avsnitt 15

1) Vi har $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/\langle (0,1)\rangle$ og vil klassifisere denne. Vi får:

$$H = \langle (0,1)\rangle = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\}.$$

Vi ser at H og $(1,0)+H$ er de eneste restklassene. Da er $|(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4)/\langle(0,1)\rangle| = 2$, og følgelig må $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4/\langle(0,1)\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. ok

4) Vi har $G = (\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8)/\langle(1,2)\rangle$, og da er

$$H = \langle(1,2)\rangle = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6)\}.$$

Hvorfor?

Her er $(G:H) = 8$, og vi ser på $(0,1)+H$. Dette element har orden 8, og da vi G er isomorf med $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ eller $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ og $\mathbb{Z}_8$, må det være sistnevnte, da denne er den eneste av disse med et element med orden 8. ok

28) Vi har $G=\mathbb{Z}$ og $H = p\mathbb{Z}$. Da er $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p$. Vi vet at ingen elementer $k\in\mathbb{Z}$ har orden større enn 1 og mindre enn uendelig, men alle elementer $a\neq e \in \mathbb{Z}_p$ har orden $p<\infty$. p primtall! ok

35) La $\phi: G \longrightarrow G'$ være en gruppehomomorfi, og $H \trianglelefteq G$ en normal undergruppe. Dette betyr at $ghg^{-1}\in H$, $\forall h\in H$ og $\forall g\in G$. Vi vil vise at $\phi[H] \leq \phi[G]$ er en normal undergruppe.

La $a\in\phi[H]$ og $b\in\phi[G]$. Vi ser at da er $a = \phi(h)$ og $b=\phi(g)$. Men da er

$$bab^{-1} = \phi(g)\phi(h)[\phi(g)]^{-1} = \phi(ghg^{-1})$$

Men da $ghg^{-1}\in H$ er $\phi(ghg^{-1})\in\phi[H]$, og $\phi[H]$ er følgelig en normal undergruppe av $\phi[G]$. ok

36) La $\phi : G \longrightarrow G'$ være en gruppehomomorfi og $N' \leq G'$ en normal undergruppe. Vi ønsker å vise at $\phi^{-1}[N]$ er en normal undergruppe av G. Vi vet da at

$$g'n'(g')^{-1} \in N', \quad \forall g' \in G' \text{ og } \forall n' \in N'.$$

La $g \in G$. Da er $g' = \phi(g)$, for en $g' \in G'$. Videre, for alle $n' \in N'$ er da $n \overset{?}{\in} \phi^{-1}[N]$ s.a.

Er $gng^{-1} \in \phi^{-1}[N']$?
se på $\varphi(gng^{-1}) \in N'$
$\Rightarrow gng^{-1} \in \varphi^{-1}[N']$
ok

$$gng^{-1} = \phi^{-1}[g') \, \phi^{-1}(n_i) \, [\phi^{-1}(g')]^{-1}$$

forsiktig her!
$\varphi^{-1}(g') = \{g \in G \mid \varphi(g) = g'\}$
$= g \operatorname{Ker} \varphi$

$$= \phi^{-1}[g'n'(g')^{-1}] \in \phi^{-1}[N']$$

da $g'n'(g')^{-1} \in N'$. Følgelig er $\phi^{-1}[N] \trianglelefteq G$ en normal undergruppe av G.

ok $\square$

40) Vi lar $N, H \leq G$ være undergrupper av en gruppe G, der N er normal. Vi definerer

$$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$$

Vi vil vise at HN er en undergruppe, og den minste undergruppe som inneholder H og N. Vi må vise at HN er lukket. La $a, b \in HN$. Da er

ser på
$hnh'n' = h(nh')n'$
$nh' = h'n''_?$ $= hh'n''n'$
side $\in HN$

$n_1 \cdot n_2 = n_3$

$$ab = (h_1n_1)(h_2n_2) \overset{?}{=} (h_1n_1)(n_2h_3) = h_1n_3h_3 = h_1h_4n_3 = h_5n_3 \in HN,$$

dette N som er normal

da $hN = Nh$, da N er normal. Videre følger assosiativitet, og $e \in N, H \Rightarrow e^2 = e \in HN$. Invers: La $a \in HN$. Da er $a = hn$, så er $a^{-1} = n^{-1}h^{-1}$, men da $a^{-1} \in Nh^{-1} = h^{-1}N \subseteq HN$ er HN en undergruppe.

Anta $K \leq G$ ~~[illegible]~~. Da må alle $h \in H$ og alle $n \in N$ være med i K. Da $K \leq G$ er lukket, må følgelig $hn \in K$, $\forall h \in H$ og $\forall n \in N$. Følgelig er $HN \subseteq K$, og HN minste undergruppe som inneholder $H \cup N$.

ok