MA2201 – OPPGAVESETT 8

Avsnitt 3.6

1) En Sylow 3-undergruppe av en gruppe med orden 12 har orden 3.

3) En gruppe av orden 24 må ha enten 1 eller 3 Sylow 2-undergrupper.

5) Vi har at $|S_4| = 24$, så av teorem 36.11 er antall mulige Sylow 3-undergrupper 1 eller 4. Vi finner

$$\sigma_1 = (2,3,4) \qquad \sigma_2 = (1,3,4)$$

$$\sigma_3 = (1,2,4) \qquad \sigma_4 = (1,2,3)$$

Her da $|\langle \sigma_i \rangle| = 3$ for $i = 1,2,3,4$ og $\langle \sigma_i \rangle \neq \langle \sigma_j \rangle$ for $i \neq j$. Om vi lar $\gamma = (i,j)$ ser vi at

$$\gamma \langle \sigma_i \rangle \gamma^{-1} = \gamma \langle \sigma_i \rangle \gamma = \langle \sigma_j \rangle.$$

Her da vist at $\exists \gamma \in S_4$ s.a. disse gruppene blir konjugerte undergrupper.

11) Vi lar H være en undergruppe av en gruppe G. Vi vil vise at

$$G_H = \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}$$

er en undergruppe av G. Vi får:

(i) La $a, b \in G_H$. Da er $aHa^{-1} = H$ og $bHb^{-1} = H$. Følgelig er

$$(ab)H(ab^{-1}) = a(bHb^{-1})a^{-1} = aHa^{-1} = H,$$

og G_H er lukket.

(ii) Åpenbart at $e \in G_H$ da $eHe^{-1} = H$.

(iii) La $a \in G_H$. Da har vi $aHa^{-1} = H$, eller $aH = Ha$, eller $H = a^{-1}Ha = a^{-1}H(a^{-1})^{-1}$, og følgelig er $a^{-1} \in G_H$.

M

Følgelig er G_H en undergruppe av G. $\square$

12) La P betegne Sylow p-undergruppen. Vet da at $\forall g \in G$ er $P' = gPg^{-1}$ en undergruppe av lik orden som P. Men da er P' en Sylow p-undergruppe, men denne skulle være unik. Følgelig er $P' = P$, og $P = gPg^{-1}$, $\forall g \in G$. Altså er P en normal undergruppe av G.

Da $q \neq p$ deler G er $|P| < |G|$, og P er en ekte undergruppe. $\square$

M

13) Vi lar G være en gruppe av orden 45.

Av teorem 36.8 $\exists H \leq G$ s.a. $|H| = 9$. H er en 3-gruppe, og av lemma 36.6 er

$$(G:H) \equiv (N[H]:H) \pmod{p} \implies |G| \equiv |N[H]| \pmod{27}.$$

Men vi vet at

$$H \subseteq N[H] \subseteq G \implies 9 \leq |N[H]| \leq 45.$$

Videre må $|N[H]| \,\big|\, |G|$ ved Lagranges teorem, så $|G| = k \cdot |N[H]|$ der $k = 1, \cancel{3}, 5$. Men dette gir også
siden $|H| \,\big|\, |N[H]| \,\big|\, |G|$

$$|N[H]| \cdot k \equiv |N[H]| \pmod{27},$$

(men $3^2 \,|\, N[H]$ slik at $k \equiv 1 \pmod{p}$)

men da ~~[illegible]~~ $27 \nmid |N[H]|$ må $k = 1$, og $|N[H]| = |G|$, og $N[H] = G$, og H er normal.

ok, men ved Sylows 3. teorem kan dette gjøres på en linje.

14) Vi vil bevise korollar 36.4:

> La G være en endelig gruppe. Da er G en p-gruppe hvis og bare hvis $|G| = p^n$.

Bevis:

(i) La $|G| = p^n$. Ved Lagranges teorem vil orden til alle undergrupper av G dele orden til G. Det vil si $H \leq G \implies |H| \,\big|\, p^n$, og G er en p-gruppe.

La $H = \langle a \rangle$, $a \in G$.
$\Rightarrow$ orden $a = p^r$

(ii) La G være en p-gruppe, og anta

$q \neq p$ er s.a. $q \mid |G|$. Ved Cauchys teorem finnes da $H \leq G$ s.a. $|H| = q$, dvs en $a \in G$ slik at $a^q = 1$ og $q \neq p$. Men da er ikke G en p-gruppe. Følgelig må $|G| = p^n$, da antagelsen om at $q \mid |G|$ er gal. $\square$

16) La G være en endelig gruppe, og la $p \mid |G|$. La P være en Sylow p-gruppe, og H en p-undergruppe.

Av teorem 36.8 $\exists P' \leq G$ der P' er en Sylow p-gruppe og $H \leq P'$.

Av teorem 36.10 $\exists g \in G$ s.a. $gP'g^{-1} = P$. Da følger det at $gHg^{-1} \leq P$. $\square$

17) Vi lar G være en gruppe s.a. $|G| = 35^3$, og vil vise at G har en normal gruppe av orden 125.

Av teorem 36.8 har vi $H \leq G$ s.a. $|H| = 5^3$. H er en Sylow 5-undergruppe, og følgelig er antall Sylow 5-undergrupper $n \equiv 1 \pmod 5$. Videre er da $n = 5k+1$. Men $n \mid |G|$ og $(5k+1) \mid 35^3$. Da må $k = 0$ og $n = 1$. Av oppgave 12 er da H en normal undergruppe av G.

18) Vi vil vise at det ikke finnes simple grupper av orden $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$.

La $|G| = 255$. Av teorem 36.8 er det en $H \leq G$ s.a. $|H| = 3$, og av lemma 36.6 er

$$(N[H] : H) \equiv (G : H) \pmod{p} \implies |N[H]| \equiv |G| \pmod{9}.$$

Men $|G| = k\,|N[H]|$, der $k = 1, \cancel{3}, 5, 17$. Vet at $9 \nmid |N[H]|$, så dette gir $k \equiv 1$ mod 3 $\pmod{9}$, så $k = 1, 5 \cdot 17$ ~~$|N[H]| = |G|$ og $N[H] = G$. H er normal i G, og G er ikke simpel.~~ □

se heller på Sylow 17-undergrupper.

19) La G være en gruppe av orden $p^r m$ der $0 < m < p$. Vi vil vise at G ikke er simpel.

Av teorem 36.8 vet vi $\exists H \leq G$ der $|H| = p^r$. Lemma 36.6 gir da

Bruk heller Sylows 3. Teorem!

$$(N[H] : H) \equiv (G : H) \pmod{p} \implies |N[H]| \equiv |G| \pmod{p^{r+1}}.$$

Da $m < p$ gir dette $|N[H]| = |G|$, og $N[H] = G$, og følgelig er H en normal undergruppe, og følgelig er G ikke simpel. ok □

22) La P_1 være en normal p-gruppe. Da er $|P| = p^i$. La videre P_2 være en Sylow p-gruppe.

Av teorem 36.8 (b) vet vi at det finns en Sylow p-gruppe P_3 s.a. $P_1 \subseteq P_3$. Men av teorem 36.10 $\exists g \in G$ s.a. $gP_3g^{-1} = P_2$. Men da må $gP_1g^{-1} \subseteq P_2$. Men $gP_1g^{-1} = P_1$ da P_1 er normal, så $P_1 \subseteq P_2$. $\square$

dh

TMA4150/MA2201 - MIDTSEMESTERPRØVE 2007

Mandag 12. mars 2007 - **Bokmål**

Studentnummer: Ole Bruig.

Prøven består av 10 flervalgsoppgaver. På noen av oppgavene er det mer enn ett riktig svar, og antall riktige svar skal gå fram av oppgaveteksten. Sett **nøyaktig** så mange kryss som det er riktige svar. Lykke til!

Oppgave 1 Hvilke **to** av følgende mengder er grupper under den gitte binære operasjonen?

- ☐ Mengden av 3×3-matriser med reelle koeffisienter og positiv determinant under matrisemultiplikasjon
- ☒ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ under multiplikasjon modulo 6 $2 \cdot 3 = 6 = 0 \notin \{1, 2, \ldots, 5\}$
- ☐ $(\mathbb{R}, *)$, der $*$ er gitt ved $a * b = a - b$
- ☐ Mengden av odde permutasjoner i S_5 under vanlig produkt av permutasjoner
- ☒ $(\mathbb{R}_{>0}, *)$, de positive reelle tall, der $a * b = \frac{ab}{2}$

Oppgave 2 Hvor mange ikke-isomorfe abelske grupper finnes det av orden 100?

☐ 1 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 9 ☐ 15

Oppgave 3 Hva er ordenen til elementet $(6, 8, 12)$ i gruppen $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$?

☐ 3 ☐ 5 ☐ 12 ☒ 15 ☐ 18

Oppgave 4 Gruppen $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{10}$ er isomorf med nøyaktig **én** av disse gruppene. Hvilken?

- ☐ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- ☒ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
- ☐ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{360}$
- ☐ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- ☐ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{24}$

Oppgave 5 Hvilke **tre** av avbildningene under er gruppehomomorfier?

- ☒ $\phi_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \phi_1(a, b) = a - b$
- ☐ $\phi_2 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), \quad \phi_2(x) = \sqrt{x}$
- ☒ $\phi_3 : S_4 \to S_5, \quad \phi_3\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & 3 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$
- ☐ $\phi_4 : S_5 \to S_5, \quad \phi_4(\sigma) = \sigma^{-1}$
- ☒ $\phi_5 : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad \phi_5(x) = |x|$

Oppgave 6 La

$$\sigma = (143)(25) \in S_6$$

Hvor mange venstre restklasser hører til undergruppen $\langle \sigma \rangle \leq S_6$ generert av σ?

☐ 5 ☐ 6 ☐ 90 ☒ 120 ☐ 144

Oppgave 7 Hvilke **to** av utsagnene er sanne?

- ☒ Hvis G er en gruppe av orden 77, og N er en normal undergruppe av G (der $\{e\} \neq N \neq G$), så er faktorgruppen G/N syklisk.
- ☐ Hvis H_1 og H_2 er undergrupper av en gruppe G, så er også unionen $H_1 \cup H_2$ en undergruppe av G.
- ☐ Hvis $\phi : G \to G'$ er en vilkårlig homomorfi, og $a \in G$ har orden n, så har $\phi(a) \in G'$ også orden n.
- ☒ Antall undergrupper i S_3, bortsett fra $\{e\}$ og S_3 selv, er 4.

A

Oppgave 8 La $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ være gruppen av inverterbare 2×2-matriser med reelle koeffisienter under matrisemultiplikasjon. La H være den normale undergruppen

$$H = \{X \in G \mid \det(X) = 1\}$$

Faktorgruppen G/H er isomorf med nøyaktig **én** av gruppene under. Hvilken?

- ☐ $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, de positive reelle tall under multiplikasjon
- ☒ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, de reelle tall $\neq 0$ under multiplikasjon
- ☐ $(\mathbb{R}, +)$, de reelle tall under addisjon
- ☐ $(\mathbb{C}, +)$, de komplekse tall under addisjon
- ☐ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, de komplekse tall $\neq 0$ under multiplikasjon

A

Oppgave 9 La G være en gruppe og $H \leq G$ en undergruppe. La V_H være mengden av venstre restklasser som hører til H. Nøyaktig **ett** av argumentene under er et riktig bevis for at V_H er en G-mengde under $*$ når $g * (xH) = (gx)H$. Hvilket?

- ☒ Hvis $yH = xH$, så er $y = hx$ for en $h \in H$, så $g*(yH) = g*(hxH) = g*(xh'H) = g*(xH)$ (hvor $h' \in H$), så virkningen er veldefinert. Videre er $e*(xH) = (ex)H = (xH)$, og $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * ((g_2x)H) = (g_1g_2x)H = (g_1g_2) * (xH)$, så kravene for gruppevirkning er tilfredsstilt.
- ☐ Hvis $yH = xH$, så er $y = xh$ for en $h \in H$, og $g * (yH) = (gy)H = (gxh)H = (gx) * (hH) = (gx) * H = (gx)H = g * (xH)$, så virkningen er veldefinert. Dessuten har vi $e * (xH) = (ex)H = xH$ og $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * ((g_2x)H) = (g_1g_2x)H = (g_1g_2) * (xH)$ for alle $g_1, g_2 \in G$, så den tilfredsstiller kravene for en gruppevirkning.
- ☐ Hvis $yH = xH$, så er $y = xh$ for en $h \in H$, og $g * (yH) = g * (xhH) = g * (xH)$, så virkningen er veldefinert. Vi har også at $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * (g_2x)H = (g_1g_2x)H = (g_2g_2) * (xH)$, og $g * (xy)H = g * ((xH) \cdot (yH)) = (gx)H \cdot (gy)H = (g * (xH)) \cdot (g * (yH))$. Dermed er kravene for en gruppevirkning tilfredsstilt.

Oppgave 10 På hvor mange forskjellige måter kan vi fargelegge hjørnene i et kvadrat, når vi har fire farger tilgjengelig og kan bruke hver farge så mange ganger vi vil? To måter regnes som like dersom vi ikke kan se forskjell på dem når kvadratet kan bevege seg fritt i rommet.

☐ 12 ☒ 55 ☐ 60 ☐ 92 ☐ 256

Tips: Du kan bruke Burnsides formel, som er gitt ved

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$$

R