MA2201 - UTFORDRINGSSETT

OLE FREDRIK BREVIG

Vi følger hintet og ser på Klein-4-gruppen $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, med gruppeelementene $e = (0, 0)$ $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$ og $c = (1, 1)$. Vi vet at G er abelsk, så vi bruker additiv notasjon. Vi noterer at gruppeelementene a, b og c har de samme egenskapene, det vil si $2a = 2b = 2c = e$, og $a + b = c$, $b + c = a$ og $c + a = b$. Det vil altså ikke utgjøre noen forskjell hvilke av disse vi bruker til hva, så lenge vi er konsistent i vår bruk.

Videre vil vi tilordne hvert felt på brettet et av elementene a, b, c og gjøre det på en slik måte at hver gang vi gjør et trekk med en kule fra et felt med verdi x over et felt med verdi y vil denne lande på et felt med verdi $x + y$. Om vi ser bort fra permutasjoner kan dette kun gjøres på følgende måte:

			a	b	c			
			b	$\underline{c}$	a			
			c	a	b			
a	b	c	a	b	c	a	b	c
b	$\underline{c}$	a	b	$\underline{c}$	a	b	$\underline{c}$	a
c	a	b	c	a	b	c	a	b
			a	b	c			
			b	$\underline{c}$	a			
			c	a	b			

FIGUR 1. Fordeling av gruppe-elementer på brettet.

Vi bruker så neste hint og lar brettets verdi være summen av alle gruppe-elementene. Med denne fordelingen vil vi ta med alle elementer unntatt c i midten. Dette gir

der det står en kule

$$\sum = 15a + 15b + 14c = 7(2a + 2b + 2c) + (a + b) = 7(e + e + e) + c = c. \tag{1}$$

Da vi ved å gjøre et trekk erstatter x og y med $x + y$ i summen, vil brettet ha konstant verdi c gjennom hele spillet. Følgelig kan vi bare avslutte spillet med en brikke på et felt merket c.

Men da brettet er symmetrisk under operasjonenen i D_4, er det kun de feltene som fortsatt er merket c under alle operasjonene i D_4, som er mulige felter å avslutte spillet på.[1] Disse feltene er markert med $\underline{c}$, som var de feltene vi skulle vise var mulige avslutningsfelter.

□

Bra!

[1]Vi gjør alle åtte operasjoner på brettet, og fjerner de c som er sendes til felter med a eller b.