Utfordring: Oppgave 3

Vi lar A, B, C, D betegne de fire trekanter i øvre halvdel og E, F, G, H i den nedre på den naturlige måte.

(a) Vi ønsker å beskrive gruppen G av stive romlige bevegelser på det regulære oktahedret. Da vi har 8 flater må $G \leq S_8$. Vi vet at $|G| = 24$.

Vi har åpenbart identiteten $\iota \in S_8$, det vil si vi gjør ingenting.

Vi vil så holde fast to motstående hjørner og roterere. F.eks. kan vi holde fast • ABCD og • EFGH og rotere følgende:

90°: $(A, B, C, D)(E, F, G, H)$

180°: $(A, C)(B, D)(E, G)(F, H)$

270°: $(A, D, C, B)(E, H, G, F)$

Tilsvarende kan vi låse fast • ADEG og • BCFH:

90°: $(A, D, G, E)(B, C, H, F)$

180°: $(A, G)(D, E)(B, H)(C, F)$

270°: $(A, E, G, D)(B, F, H, C)$

Og den siste muligheten • ABEF og • CDGH:

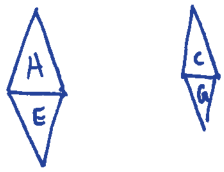
90°: $(A, B, F, E)(D, C, G, H)$

180°: $(A, F)(B, E)(D, G)(C, H)$

270°: $(A, E, F, B)(D, H, G, C)$

Vi vil så holde fast to motstående sider og roterer. Først holder ΔA og ΔG og har følgende situasjon.

Til sist holder vi fast to kanter. Først l AE og l CG. Det er kun mulig å rotere 180°.



: $(A,E)(C,G)(B,F)(D,H)$

Vi kan gjøre tilsvarende for (BF, DH), (AB, GH), (BC, HE), (EF, CD) og (AD, FG), men dette blir litt for mye bokføring. Vi går heller videre til:

(b) Vi har tre farger og vil finne antall ulike måter å farge på når vi tar hensyn til bevegelsene ovenfor. Pga. symmetri og syklene kan vi ha en forskjellig farge per sykel og en per hvert element ikke i noen sykel, og multipliserer opp de forskjellige like rotasjonene:

Burnsides formell:

$$(\text{antall baner}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X_g|$$

$$= \frac{1}{24}\left(3^8 + 6\cdot 3^2 + 3\cdot 3^4 + 8\cdot \underbrace{3^2}_{=3^4} + 6\cdot 3^4\right) = \underline{333.}$$