Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Andrew Stacey, telefon (735) 90154

Bokmål versjon

Eksamen i TMA4145 Linære Metoder

Lørdag 6. desember 2008
Tid: 09:00–13:00
Hjelpemidler: Kode D
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Kalkulator: Citizen SR-270X eller Hewlett Packard HP30S

Oppgave 1.

Gi definisjonen på **fire** av følgende begrep:

i. Et metrisk rom
ii. En Cauchy følge i et metrisk rom
iii. En kontinuerlig funksjon fra et metrisk rom til et annet
iv. Kjernen (nullrommet) til en lineæravbildnelig
v. Et indreprodukt på et komplekst vektorrom
vi. Et hilbert rom
vii. Et norm vektorrom

Oppgave 2.

I denne oppgaven utstyrer vi $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$ med standard Euklidisk norm:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \qquad (n = 3 \text{ eller } 4)$$

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

a. Finn en $x \in \mathbb{R}^3$ slik at $Ax = b$.
b. Finn mengden av alle $y \in \mathbb{R}^3$ slik at Ay er det nærmeste punkt til c.
c. Finn det punktet $z \in \mathbb{R}^3$ med minst norm slik at Az er det nærmeste punkt til c.

Oppgave 3.

La ℓ^∞ være rommet av alle begrensede følger i $\mathbb{R}$ med normen

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n|\}.$$

La $\ell^0 \subseteq \ell^\infty$ være rommet av alle følger som slutter med bare nuller; dvs. $x = (x_n) \in \ell^0$ hvis det fins en N (avhengig av x) slik at $x_n = 0$ for $n \geq N$. La $c_0 \subseteq \ell^\infty$ være rommet av alle følger $x = (x_n)$ slik at $\lim_{n\to\infty} x_n$ eksisterer og er null.

Vis at c_0 er tillukningen av ℓ^0 i ℓ^∞.

Oppgave 4.

a. La (X,d) være et komplett metrisk rom og $T\colon X \to X$ en kontraksjon. La $\alpha < 1$ være slik at $d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y)$ for alle $x,y \in X$.
La x^* være fikspunktet til T. La $x_0 \in X$ og definér rekursivt $x_n = T(x_{n-1})$ for $n \ge 1$. Vis at

$$d(x_n, x^*) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \qquad \text{for alle } n \ge 1.$$

b. La $C([0,1],\mathbb{R})$ betegne vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner fra $[0,1]$ til $\mathbb{R}$. Definér en avbildning $T : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ ved

$$(Tx)(t) = 1 + \int_0^t s x(s) ds.$$

Vis at T er en kontraksjon og at et mulig valg av α er $\frac{1}{2}$. Her er $C([0,1],\mathbb{R})$ utstyrt med sin standard metrikk: $d_\infty(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : 0 \le t \le 1\}$.

c. Følgen som fremkommer ved å starte med $x_0(t) = 0$ begynner

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 \\ x_2(t) &= 1 + t^2/2 \\ x_3(t) &= 1 + t^2/2 + t^4/8 \\ x_4(t) &= 1 + t^2/2 + t^4/8 + t^6/48 \end{aligned}$$

og det generelle leddet er

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{2^k k!}$$

La oss skrive x^* for fikspunktet til T. Bruk a til å estimere hvor mange ledd som trengs for å sikre at $\sum_{k=0}^{n-1} 1/2^k k!$ avriker høyst med 0.001 fra $x^*(1)$?

d. Med fem signifikante desimaler er $x^*(1) = 1.6487$, mens $x_5(1) = 1.6484$. Hva forteller detter deg om ditt tidligere svar?

Oppgave 5.

La $C([0,1],\mathbb{C})$ betegne rommet av kontinuerlige funksjoner fra $[0,1]$ til $\mathbb{C}$. La

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$$

være standard indreprodukt på $C([0,1],\mathbb{C})$.

a. La $T\colon C([0,1],\mathbb{C}) \to C([0,1],\mathbb{C})$ være lineæravbildningen som sender $f \in C([0,1],\mathbb{C})$ til funksjonen Tf gitt ved $(Tf)(t) = tf(t)$. Vis at T er selvadjungert; dvs. at

$$(Tf, g) = (f, Tg)$$

for alle $f, g \in C([0,1],\mathbb{C})$.

b. Hvis $f, g \in C([0,1],\mathbb{C})$, definér $(f,g)_T$ ved

$$(f,g)_T = (Tf, g)\,.$$

Vis at $(\cdot,\cdot)_T$ er et indreprodukt på $C([0,1],\mathbb{C})$.

c. La $V \subseteq C([0,1],\mathbb{C})$ være underrommet $\{a + bt + ce^t : a,b,c \in \mathbb{C}\}$. Finn a, b slik at

$$\int_0^1 t\left|e^t - a - bt\right|^2 dt$$

er minimal.