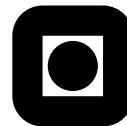


Faglig kontakt under eksamen  
Andrew Stacey, telefon (735) 90154



Bokmål versjon

## TMA4145 Lineær metoder

Mandag 6. desember 2010

Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Kode D

Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Kalkulator: Citizen SR-270X eller Hewlett Packard HP30S

### Oppgave 1.

Svar på **fire** av de følgende oppgavene.

- i. Gi definisjonen av et metrisk rom (inkluder definisjonen av den metriske funksjonen).
- ii. Gi definisjonen av en følge i et metrisk rom som konverger.
- iii. Gi definisjonen av en omegn av et punkt i et metrisk rom.
- iv. Gi definisjonen av en lineær funksjon fra et vektorrom til et annet.
- v. Gi en definisjon av dimensjon til et vektorrom.
- vi. Gi definisjon av en ortogonal familie i et indreprodukt rom.
- vii. Formuler Riesz Representation teorem.
- viii. Formuler Cauchy–Schwarz ulikhet.

### Oppgave 2.

1. La  $(M, d)$  være et metrisk rom. La  $(x_n)$  være en følge som konverger i  $(M, d)$ , med grensen  $x \in M$ . Vis at  $(x_n)$  er en Cauchy følge.
2. Husk at for  $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ :
  - (a)  $\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi) = 2 \sin(\theta) \sin(\phi)$
  - (b)  $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$Vis at  $\cos: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  er en kontraksjon.  
(Merk:  $\cos$  og  $\sin$  defineres ved bruk av *radianer*.)
3. Forklar hvorfor det eksisterer et punkt  $x_0 \in [0, 1]$  med  $x_0 = \cos(x_0)$  og beskriv en metode for å finne det.

**Oppgave 3.**

La  $\text{Poly}_k$  være vektorrommet av polynomer som har reelle koeffisienter og grad høyst lik  $k$ . La  $V := \{p(t) \in \text{Poly}_2 : p'(0) = 0\}$  (merk: 2).

1. Forklar hvorfor  $V$  er et vektorrom og finn en isomorfi  $\mathbb{R}^n \cong V$  med  $n \in \mathbb{N}$  (som du skulle finne).
2. For  $a, b \in \mathbb{R}$ , definer  $T_{a,b}: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  ved  $T_{a,b}(p(t)) = \begin{bmatrix} p(a) \\ p(b) \end{bmatrix}$ . For hvilke par  $(a, b)$  er  $\ker T_{a,b} = \{0\}$ ?
3. For  $a, b \in \mathbb{R}$ , la  $R_{a,b}: V \rightarrow \text{Poly}_1$  være funksjonen som sender  $p(t) \in V$  til polynomet  $q(t) \in \text{Poly}_1$  som har  $q(0) = p(a)$  og  $q(1) = p(b)$ . For hvilke par  $(a, b)$  er  $R_{a,b}$  en isomorfi?

**Oppgave 4.**

La  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  være underrommet:

$$W := \left\{ \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ hvor } \begin{cases} -4w + 4x + 3y + 5z = 0, \\ -6w + 6x + 3y + 9z = 0, \\ -2w + 2x + 4z = 0, \\ 2w - 2x - 3y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

Finndet punktet i  $W$  som ligger nærmest vektoren:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 5.**

Denne oppgaven handler om  $C([0, 1], \mathbb{C})$  med det vanlige indreproduktet:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Velg  $a, b \in (0, 1)$  slik at  $a < b$ .

1. Definer en lineær funksjon  $\alpha: C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  ved

$$\alpha(f) := \int_0^1 f(t) dt$$

Vis at  $\alpha$  er kontinuert.

2. Definer en lineær funksjon  $\beta: C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  ved

$$\beta(f) := \int_a^b f(t) dt.$$

Vis at  $\beta$  er kontinuert.

3. Forklar hvorfor det eksisterer en  $g \in L^2(0, 1)$  slik at for alle  $f \in C([0, 1], \mathbb{C})$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) dt.$$

Er  $g$  et element av  $C([0, 1], \mathbb{C})$ ?