Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Andrew Stacey, telefon (735) 90154

Bokmål versjon

Eksamen i TMA4145 Lineære metoder

Lørdag 15. august 2009
Tid: 09:00–13:00
Hjelpemidler: Kode D
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Kalkulator: Citizen SR-270X eller Hewlett Packard HP30S

Oppgave 1.

Gi definisjonen til **fire** av følgende begreper:

i. En følge i et metrisk rom som konvergerer.
ii. Den adjungerte til en lineæravbildning mellom to indreproduktrom.
iii. En omegn av et punkt i et metrisk rom.
iv. Bildet (kolonnerommet) til en lineæravbildning.
v. Et komplett metrisk rom.
vi. En normale lineær transformasjon.
vii. En basis til et vektorrom.

(8 poeng)

Oppgave 2.

a. La $(X, \|\cdot\|)$ være et Banach rom. La $T \colon X \to X$ være en kontinuerlig linæeravbildning. La $b \in X$ være en fiksert vektor.
Definér en funksjon $X \to X$ ved $x \mapsto Tx + b$. Gi en kort redegjørelse for betingelsen som trengs for at funksjonen er en kontraksjon. *(3 poeng)*

b. La ℓ^∞ være rommet av alle begrensede følger i $\mathbb{R}$ med normen

$$\|(\xi_n)\|_\infty = \sup\{|\xi_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

La $I \colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ være funksjonen

$$I(\xi_n) = \left(\frac{1}{n}\xi_{n+1}\right).$$

For eksempel,

$$I(1, 1, 1, 1, 1, \dots) = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

La $b \in \ell^\infty$ være følgen $(1, 0, 0, \dots)$. Vis at funksjonen $x \mapsto Ix + b$ ikke er en kontraksjon i ℓ^∞ men at $x \mapsto I(Ix + b) + b$ er en kontraksjon. Hva er kontraksjonskonstanten?

(3 poeng)

c. Regn ut de fem første iterasjonene (av $x \mapsto Ix + b$) med $x_0 = 0$. Regn så ut de fem første iterasjonene med $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ en vilkårlig følge. Hva observerer du? *(2 poeng)*

Oppgave 3.

La $(X, \|\cdot\|)$ være et normert rom.

a. La (a_n) være en følge av punkter i X som er slik at rekken $\sum \|a_n\|$ konvergere i $\mathbb{R}$. Vis at følgen (s_n) i X, gitt ved

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

er Cauchy. *(3 poeng)*

b. Vis at et normert rom $(X, \|\cdot\|)$ er komplett hvis og bare hvis dersom (a_n) er en følge i X slik at $\sum \|a_n\|$ konvergerer så konvergerer følgen (s_n) i X hvor $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
Du kan anta at en Cauchy følge (s_n) i X har en delfølge (s_{n_m}) der $\left\|s_{n_{m+1}} - s_{n_m}\right\| < \frac{1}{2^m}$. *(3 poeng)*

c. La ℓ^0 være rommet av alle følger i $\mathbb{R}$ som slutter med bare nuller. La $\|\cdot\|$ være en norm i ℓ^0. Vis at $(\ell^0, \|\cdot\|)$ ikke er et Banach rom. *(2 poeng)*

Oppgave 4.

I denne oppgaven utstyrer vi $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$ med standard Euklidisk norm:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \qquad (n = 3 \text{ eller } 4)$$

La

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix}$$

a. Finn en $x \in \mathbb{R}^3$ slik at $Ax = b$. *(3 poeng)*

b. Finn $\ker A$, og finn punktet $y \in \mathbb{R}^3$ med minst norm slik at $Ay = b$. *(2 poeng)*

c. Finn en $z \in \mathbb{R}^3$ slik at Az er det nærmeste punktet til c. *(3 poeng)*

Oppgave 5.

La $C([0,1], \mathbb{C})$ betegne rommet av kontinuerlige funksjoner fra $[0,1]$ til $\mathbb{C}$. La

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

være det standard indreproduktet på $C([0,1], \mathbb{C})$.

a. La $R\colon C([0,1], \mathbb{C}) \to C([0,1], \mathbb{C})$ være lineæravbildningen som sender $f \in C([0,1], \mathbb{C})$ til funksjonen Rf gitt ved $(Rf)(t) = f(1-t)$. Vis at R er selvadjungert; dvs. at

$$(Rf, g) = (f, Rg)$$

for alle $f, g \in C([0,1], \mathbb{C})$. *(2 poeng)*

b. For $f \in C([0,1], \mathbb{C})$ vis at det finnes f_+ og f_- i $C([0,1], \mathbb{C})$ hvor $f = f_+ + f_-$, $Rf_\pm = \pm f$, og $(f_+, f_-) = 0$. *(3 poeng)*

c. Finn a, b, c slik at

$$\int_0^1 \left|4t^2 - 4t - a\sin(2\pi t) - b\cos(\pi t) - c\right|^2 dt$$

er minimal. *(3 poeng)*