



**SEMESTERPRØVE FOR LINÆRE METODER (TMA4145)**

Tirsdag 14. oktober 2008

Tid: 14:15-16:00

Bokmål versjon

Faglig kontakt under eksamen: Andrew Stacey (735) 90154

**Instruksjoner:**

Denne prøven består av to deler, **A** og **B**. Du skal besvare **to** oppgaver fra **hver** del.

På del A, leveres bare svarene, ikke utregning, det gies kun poeng for helt riktig svar. På del B, gies full karakter kun med utregning.

Skriv hvert svar på eget ark. Du kan svare på engelsk, bokmål, eller nynorsk; men helst engelsk.

**Del A**

**Oppgave 1.**

Denne oppgaven handler om følger i metriske rom.

1. Skriv ned definisjon av en følge som konvergerer til et punkt i et metrisk rom. (4 poeng)
2. Følgen  $(\frac{1}{n})$  er en følge i hver av de følgende metriske rommene. For hver, bestem hvilken av de følgende som er den *beste* beskrivelse av følgen:
  - Konvergent
  - Cauchy
  - Hverken konvergent eller Cauchy
  - (a)  $\mathbb{R}$  med metrikk  $d(s, t) = |s - t|$ . (1 poeng)
  - (b)  $(0, 1)$  med metrikk  $d(s, t) = |s - t|$ . (1 poeng)
  - (c)  $(0, 1)$  med metrikk  $d(s, t) = |\frac{1}{s} - \frac{1}{t}|$  (1 poeng)

**Oppgave 2.**

Denne oppgaven er om vektorrom.

1. Skriv ned definisjonen av en lineær funksjon mellom to vektorrom. (4 poeng)
2. Hvilke av de følgende er underrom av  $\mathbb{R}^3$ ?
  - (a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + z = 0\}$ . (1 poeng)
  - (b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = z\}$ . (1 poeng)
  - (c)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ . (1 poeng)

**Oppgave 3.**

Denne oppgaven er om funksjoner mellom metriske rom.

1. Skriv ned definisjon av en kontinuerlig funksjon fra et metrisk rom til et annet. (4 poeng)
2. For hver av de følgende funksjoner mellom metriske rom bestem hvilken av de følgende som er den *beste* beskrivelse av funksjonen:
  - Isometri.
  - Lipschitz.
  - Kontinuerlig.
  - Ingen av de ovenstående.
  - (a)  $f: (\mathbb{R}, |s - t|) \rightarrow (\mathbb{R}, |s - t|), f(t) = t^2$ . (1 poeng)
  - (b)  $f: ([0, 1], |s - t|) \rightarrow (\mathbb{R}, |s - t|), f(t) = e^t$ . (1 poeng)
  - (c)  $f: ((0, 1), |\frac{1}{s} - \frac{1}{t}|) \rightarrow (\mathbb{R}, |s - t|), f(t) = t^{-1}$ . (1 poeng)

## Del B

## Oppgave 1.

La  $\text{Poly}_2$  være rommet av polynomer av grad høyst 2. For  $i \in \mathbb{N}$ , la  $p_i \in \text{Poly}_2$  være polynomet gitt ved å ekspandere  $(x+1)^i$  og fjerne alle ledd av grad høyere enn 2. F. eks.,  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x+1$ ,  $p_3(x) = 3x^2 + 3x + 1$ ,  $p_8(x) = 36x^2 + 8x + 1$ .

1. Definer en lineær funksjon  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  som følger: ta  $(a, b, c)$  som koeffisienter (i rekkefølge  $x^2, x, 1$ ) av polynomet  $ap_2(x) + bp_3(x) + cp_4(x)$ . Skriv ned matrisen til denne funksjonen. (4 poeng)
2. En lineær funksjon  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  har matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 5 \\ 2 & 9 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

Finn en vektor  $x \in \mathbb{R}^4$  med

$$Tx = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(6 poeng)

## Oppgave 2.

1. La  $(M, d)$  være et metrisk rom. La  $f: X \rightarrow M$  være en injektiv funksjon (hvis  $f(x) = f(y)$  så er  $x = y$ ). Definer  $d_f: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  ved at  $d_f(x, y) = d(f(x), f(y))$ . Vis at  $d_f$  er en metrikk. (4 poeng)
2. (Du behøver ikke å vise utregning på dette punktet.) La  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} (x, 0) & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ (x, 1) & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Definer metrikken  $d_f$  på  $\mathbb{R}$  ved

$$d_f(x, y) = d_1(g(x), g(y)).$$

Husk at  $d_1$  er definert på  $\mathbb{R}^2$  ved  $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .

For hver av de følgende følger, bestem om den konverger i  $(\mathbb{R}, d_f)$ . Hvis den konverger, skriv ned grenseverdien til følgen. (3 poeng)

- (a)  $(1/n)$ .
- (b)  $(1/\sqrt{n})$ .
- (c)  $(1/\sqrt{n^2 + 1})$ .

Kvadratrøttene antas alltid positive.

3. Tenk på identitetsfunksjonen på  $\mathbb{R}$ . Er denne kontinuerlig som en funksjon  $(\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_f)$  eller  $(\mathbb{R}, d_f) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ , her er  $d(s, t) = |s - t|$  den vanlige metrikken på  $\mathbb{R}$ ? (3 poeng)

## Oppgave 3.

1. La  $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  være funksjonen  $g(t) = \sqrt{t+1}$ . Vis at  $g$  er en kontraksjon. Her har  $[0, \infty)$  den vanlige metrikken sin. (2 poeng)  
Du kan bruke middelverdi-teoremet (Mean Value Theorem) uten bevis (hvis  $f$  har en differensial på  $[a, b]$  som er kontinuerlig så er  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$  med  $c \in [a, b]$ ).
2. Forklar hvorfor det finnes en  $t_0 \in [0, \infty)$  med  $t_0^2 = t_0 + 1$ . (3 poeng)
3. Finn  $n \in \mathbb{N}_0$  slik at hvis  $n \leq t \leq n+1$  så er  $n \leq g(t) \leq n+1$ . Hva forteller dette deg om fikspunktet til  $g$ ? (2 poeng)
4. Ligningen  $x^2 = x + 1$  har en annen løsning som kan finnes som fikspunktet til funksjonen  $t \mapsto -\sqrt{t+1}$ . Vis at denne funksjonen definerer en kontraksjon på intervallet  $[-2/3, -5/9]$ . (Tips:  $\sqrt{3} \approx 1.7321$ .) (3 poeng)