

Faglig kontakt under eksamen:  
Idar Hansen, telefon 73593528/73593520



## EKSAMEN I TMA4145 LINEÆRE METODER

Mandag 17. desember 2007

Tid: 09:00-13:00

Tillatte hjelpemidler (Kode D): Godkjent kalkulator (HP30S),  
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Bokmål

Sensur: 17. januar 2008

**Oppgave 1** La  $G: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  være definert ved

$$(Gx)(t) = \int_0^t sx(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- Vis at  $G$  er en kontraksjon hvis  $C[0, 1]$  har  $d_\infty$ -metrikken.
- Definer  $F: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  ved  $(Fx)(t) = \frac{t^2}{2} - (Gx)(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Vis at dersom  $x_0(t) = 0$  for alle  $t$ , da er  $(F^n x_0)(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{t^{2k}}{2^k k!}$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$ .
- Forklar hvorfor  $F$  har et entydig fikspunkt  $x^*$ , og finn  $x^*$  ved iterasjon.

**Oppgave 2** La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Finn en singulærverdi-dekomposisjon av  $A$ .
- Finn den pseudoinverse  $A^+$  til  $A$ .

**Oppgave 3**

Finn  $a, b \in \mathbb{C}$  slik at

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - a \cos t - b \sin t|^2 dt$$

blir minimal når  $x$  er gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & \alpha < t \leq 2\pi \end{cases}$$

der  $\alpha \in (0, 2\pi)$  er en konstant.

**Oppgave 4**

La  $\ell_0 \subseteq \ell^2$  være underrommet av følger med bare endelig mange ledd ulik null. Vis at  $\bar{\ell}_0 = \ell^2$ . ( $\ell^2$  har sitt vanlige indreprodukt.)

**Oppgave 5**

- Gi definisjonen av en normal kompleks  $n \times n$ -matrise  $A$ .
- Vis at hvis  $n \times n$ -matrisen  $A$  er normal, da er  $\|A^*x\| = \|Ax\|$  for alle  $x \in \mathbb{C}^n$ . Her er  $A^* = \bar{A}^T = A^H$ .
- La  $A$  være en normal  $n \times n$ -matrise. Vis at  $A - \lambda I$  er normal der  $\lambda \in \mathbb{C}$  og  $I$  er  $n \times n$  identitetsmatrisen, og vis at ( $x \in \mathbb{C}^n$ )

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^*x = \bar{\lambda}x.$$

**Oppgave 6**

La  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  være en strengt voksende funksjon som oppfyller  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$  for alle  $x, y \in [0, \infty)$  og  $f(0) = 0$ . La for  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = f(|x - y|)$ .

- Vis at  $(\mathbb{R}, d)$  er et metrisk rom.
- Anta at  $f(x) = x + 1$  for  $x > 0$  og  $f(0) = 0$ . Vis at  $(\mathbb{R}, d)$  er et komplett metrisk rom.