

## MIDTERM IN TMA4145 LINEAR METHODS

Tuesday, October 11, 2005

Time: 08:15 – 10:00

Permitted aids: Only HP30S.

### Problem 1

Let  $(X, d)$  be a metric space, and let  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  be a sequence in  $X$  that converges to  $x \in X$ . Show that  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  is a Cauchy sequence in  $X$ .

### Problem 2

Given the matrix  $A$  with the following  $LU$ -factorization,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- What is the rank of  $A^T$ , and what is  $\dim(\mathcal{N}(A))$ ?
- Find bases for  $\mathcal{R}(A)$  and  $\mathcal{N}(A^T)$ .
- Explain (without proof) the orthogonalization relations between the four fundamental linear subspaces  $\mathcal{R}(A)$ ,  $\mathcal{N}(A)$ ,  $\mathcal{R}(A^T)$  and  $\mathcal{N}(A^T)$ , including which Euclidean spaces they are subspaces of.

### Problem 3

The set  $X = C([-1/4, 1/4])$  consisting of (real-valued) continuous functions on the closed interval  $[-1/4, 1/4]$ , and with the metric  $d(x, \tilde{x}) = \max_{t \in [-1/4, 1/4]} |x(t) - \tilde{x}(t)|$  is a complete metric space.

- Let  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ , where  $R = [-1/4, 1/4] \times [-1/2, 1/2]$ , be the function defined by  $f(t, u) = t + u^2$ . Show that  $|f(t, u)| \leq \frac{1}{2}$  on  $R$ , and that  $f$  satisfies the Lipschitz condition

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq |u - v|, \quad \text{where } (t, u), (t, v) \in R.$$

- Define  $T: X \rightarrow X$  by

$$(Tx)(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Show that if  $d(x, 0) \leq \frac{1}{2}$ , then  $d(Tx, 0) \leq \frac{1}{2}$ . (Here 0 denotes the function that is identically equal to zero.)

- Show that  $d(Tx, T\tilde{x}) \leq \frac{1}{4}d(x, \tilde{x})$  holds for all  $x, \tilde{x} \in X$ , if  $d(x, 0) \leq \frac{1}{2}$  and  $d(\tilde{x}, 0) \leq \frac{1}{2}$ .
- Let  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  be the sequence of functions in  $X$  defined by  $x_0(t) = 0$  and  $x_n(t) = (Tx_{n-1})(t)$ . Compute  $x_2 = x_2(t)$  and explain by referring to an approximation estimate that  $d(x_2, x) \leq \frac{1}{384}$ , where  $x = x(t)$  satisfies  $x(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$ .

Norsk på den andre siden.

## MIDTSEMESTERPRØVE I TMA4145 LINEÆRE METODER

Tirsdag 11. oktober 2005

Tid: 08:15 – 10:00

Tillatte hjelpemidler: Kun HP30S.

### Oppgave 1

La  $(X, d)$  være et metrisk rom, og la  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  være en følge i  $X$  som konvergerer mot  $x \in X$ . Vis at  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  er en Cauchy-følge i  $X$ .

### Oppgave 2

Gitt matrisen  $A$  med følgende  $LU$ -faktorisering,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Hva er rangen til  $A^T$ , og hva er  $\dim(\mathcal{N}(A))$ ?
- Finn basiser for  $\mathcal{R}(A)$  og  $\mathcal{N}(A^T)$ .
- Gjør rede for (uten bevis) ortogonaliseringsrelasjonene mellom de fire fundamentale lineære underrommene  $\mathcal{R}(A)$ ,  $\mathcal{N}(A)$ ,  $\mathcal{R}(A^T)$  og  $\mathcal{N}(A^T)$ , inkludert hvilke euklidiske rom de er underrom av.

### Oppgave 3

Mengden  $X = C([-1/4, 1/4])$  av (reelle) kontinuerlige funksjoner på det lukkede intervallet  $[-1/4, 1/4]$  med metrikken  $d(x, \tilde{x}) = \max_{t \in [-1/4, 1/4]} |x(t) - \tilde{x}(t)|$  er et komplett metrisk rom.

- La  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ , der  $R = [-1/4, 1/4] \times [-1/2, 1/2]$ , være definert ved  $f(t, u) = t + u^2$ . Vis at  $|f(t, u)| \leq 1/2$  på  $R$ , og at  $f$  tilfredsstiller Lipschitz-betingelsen

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq |u - v|, \quad \text{når } (t, u), (t, v) \in R.$$

- Definér  $T: X \rightarrow X$  ved

$$(Tx)(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

og vis at dersom  $d(x, 0) \leq 1/2$ , så er  $d(Tx, 0) \leq 1/2$ . (Her betegner 0 funksjonen som er identisk lik null.)

- Vis at  $d(Tx, T\tilde{x}) \leq 1/4 d(x, \tilde{x})$  holder for alle  $x, \tilde{x} \in X$ , dersom  $d(x, 0) \leq 1/2$  og  $d(\tilde{x}, 0) \leq 1/2$ .
- La  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  være følgen av funksjoner i  $X$  definert ved  $x_0(t) = 0$  og  $x_n(t) = (Tx_{n-1})(t)$ . Beregn  $x_2 = x_2(t)$  og forklar ved å henvise til et approksimasjonsestimat at  $d(x_2, x) \leq \frac{1}{384}$ , der  $x = x(t)$  tilfredsstiller  $x(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$ .

English on the other side.