NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4145 LINEÆRE METODER

Semesterprøve
Bokmål
Onsdag 10. oktober 2007
Tid: 17:15 – 19:00

Tillatte hjelpemidler: Kode D (kun HP30S).

Oppgave 1

La $X = (0, \infty)$ og definer $\tilde{d}$ ved $\tilde{d}(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ for $x, y \in X$.

a) (2 poeng) Vis at $(X, \tilde{d})$ er et metrisk rom.

b) (3 poeng) Vis at følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, der $x_n = 2^n$, er en Cauchy-følge i $(X, \tilde{d})$. Er $(X, \tilde{d})$ et komplett metrisk rom?

Oppgave 2

La $F : C[0, a] \to C[0, a]$, der $a > 0$, være definert ved

$$(Fx)(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, \ 0 \le t \le a.$$

a) (4 poeng) Finn en betingelse på a slik at F er en kontraksjon på $C[0, a]$ med d_∞-metrikken. Skriv ned (uten bevis) Banachs fikspunktteorem, og forklar hvorfor F har et entydig fikspunkt x^*.

b) (3 poeng) La $x_1 = 1$ og definer $x_2, x_3, \ldots$ ved $x_{n+1} = Fx_n$ for $n \ge 1$. Finn x_n, og bruk dette til å finne fikspunktet x^*.

Oppgave 3

3×4-matrisen A tilfredstiller $PA = LU$ der

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ og } U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (2 poeng) Finn en basis for $\ker A = \mathbf{N}(A)$ og $\operatorname{im} A = \mathbf{C}(A)$.

b) (3 poeng) Finn en basis for $\operatorname{im} A^T = \mathbf{C}(A^T)$ og $\ker A^T = \mathbf{N}(A^T)$.

c) (3 poeng) Finn alle $y \in \mathbb{R}^3$ som tilfredstiller $y^T A = 0$, og løs $z^T A = [1 \ -2 \ -2 \ -3]$.

English on the other side.

NTNU
Department of Mathematical Sciences

TMA4145 LINEAR METHODS
Midterm

English
Wednesday, October 10, 2007
Time: 17:15 – 19:00

Permitted aids: Code D (HP30S only).

Problem 1

Let $X = (0, \infty)$ and define $\tilde{d}$ by $\tilde{d}(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ for $x, y \in X$.

a) (2 points) Show that $(X, \tilde{d})$ is a metric space.

b) (3 points) Show that the sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, where $x_n = 2^n$, is a Cauchy sequence in $(X, \tilde{d})$. Is $(X, \tilde{d})$ a complete metric space?

Problem 2

Let $F : C[0, a] \to C[0, a]$, where $a > 0$, be defined by

$$(Fx)(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \int_0^t x(s)\mathrm{d}s,\ 0 \le t \le a.$$

a) (4 points) Find a condition on a such that F is a contraction on $C[0, a]$ with the d_∞-metric. State (without proof) Banach's Fixed Point Theorem, and explain why F has a unique fixed point x^*.

b) (3 points) Let $x_1 = 1$ and define $x_2, x_3, \ldots$ by $x_{n+1} = Fx_n$ for $n \ge 1$. Find x_n, and use this to find the fixed point x^*.

Problem 3

The 3×4-matrix A satisfies $PA = LU$ where

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ and } U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (2 points) Find a basis for $\ker A = \mathbf{N}(A)$ and $\operatorname{im} A = \mathbf{C}(A)$.

b) (3 points) Find a basis for $\operatorname{im} A^T = \mathbf{C}(A^T)$ and $\ker A^T = \mathbf{N}(A^T)$.

c) (3 points) Find all $y \in \mathbb{R}^3$ satisfying $y^T A = 0$, and solve $z^T A = [1\ \ -2\ \ -2\ \ -3]$.

Bokmål på den andre siden.