Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Clara-Cecilie Günther 98603535

ST1101 SANNSYNSREKNING
ST6200 SANNSYNSREKNING

Fredag 22. mai 2009

Tid: 09:00–13:00

Tillatne hjelpemiddel:
Kalkulator CITIZEN SR-270X eller HP30S med tomt minne.
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Eit gult stempla A5-ark med eigne handskrivne notat.

Sensur: 12. juni 2009.

NYNORSK

Oppgåve 1

For ein bestemt sjukdom eksisterer det to forskjellige testar, test A og test B. Resultatet av kvar test er anten positivt eller negativt, der positivt resultat indikerer sjukdom. Ein er interessert i å samanlikne desse to testane og gjennomfører ein studie der kvar deltakar tek begge testane. Vi går ut frå at om ein deltakar verkelig er sjuk eller frisk blir bestemt ved andre undersøkingar.

Vi definerer tre hendingar, A: Test A er positiv, B: Test B er positiv og D: Deltakaren er sjuk. Desse sannsyna er oppgitte: $P(A \cap D) = 0.035$, $P(D) = 0.05$ og $P(A) = 0.06$.

a) Teikn hendingane A, B og D inn i eit venndiagram. For ein tilfeldig valt deltakar, kva er sannsynet for at test A er positiv gitt at deltakaren er sjuk? Kva er sannsynet for at ein deltakar er sjuk gitt at test A er positiv?

Er hendingane A og D disjunkte? Er hendingane A og D uavhengige? Grunngje svara.

Test B måler mengda av eit bestemt protein i blodet, og fordelinga til mengda protein avheng av om ein person er sjuk eller frisk. La X_{D} vere mengda av proteinet hos ein sjuk person og la X_{F} vere mengda av proteinet hos ein frisk person. Vi går ut frå at X_{D} er eksponentialfordelt med parameter $\lambda_{\mathrm{D}} = 0.32$ og at X_{F} er eksponentialfordelt med parameter $\lambda_{\mathrm{F}} = 1.73$, det vil seie

$$f_{X_{\mathrm{D}}}(x) = \begin{cases} \lambda_{\mathrm{D}} e^{-\lambda_{\mathrm{D}} x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

og

$$f_{X_{\mathrm{F}}}(x) = \begin{cases} \lambda_{\mathrm{F}} e^{-\lambda_{\mathrm{F}} x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

b) Finn dei kumulative fordelingsfunksjonane $F_{X_{\mathrm{D}}}(x)$ og $F_{X_{\mathrm{F}}}(x)$. Kva er sannsynet for at mengda protein i blodet hos ein frisk deltakar overstig ein verdi c? Rekn ut medianen i fordelinga til X_{D}.

c) Test B er positiv dersom mengda av det bestemte proteinet i blodet er høgare enn 0.75. Rekn ut sannsynet for at test B er positiv for ein tilfeldig valt deltakar gitt at deltakaren er sjuk. Rekn også ut sannsynet for at ein deltakar er sjuk gitt at test B er positiv. Basert på svara i a) og c), kva for ein test vil du tilrå?

Oppgåve 2

La N_1 vere talet på gonger datanettverket går ned ein stad på Gløshaugen i løpet av ein månad og N_2 talet på gonger nettet går ned ein stad på Dragvoll i løpet av ein månad. Gå ut frå at N_1 er poissonfordelt med parameter $\lambda_1 = 4.7$ og at N_2 er poissonfordelt med parameter $\lambda_2 = 0.8$. I tillegg går vi ut frå at nettet på Gløshaugen fungerer uavhengig av nettet på Dragvoll.

a) Kva for nokre føresetnader krevst for at N_1 skal vere poissonfordelt? Kva er sannsynet for at nettet går ned to gonger i løpet av ein månad på Gløshaugen? Kva er sannsynet for at nettet går ned to eller fleire gonger i løpet av ein månad på Gløshaugen?

b) Vis at N, det totale talet gonger nettet går ned på Gløshaugen og Dragvoll i løpet av ein månad, det vil seie $N = N_1 + N_2$, er poissonfordelt med parameter $\lambda = 5.5$. Gitt at nettet går ned fem gonger totalt på Gløshaugen og Dragvoll i løpet av ein månad, kva er sannsynet for at tre av gongene er på Gløshaugen?

For å unngå lange nedetider er det alltid ein person som har nettvakt. Dersom nettet går ned, blir nettvakta varsla og rykkjer deretter ut for å løyse problemet. Nokre gonger går likevel nettet opp igjen av seg sjølv etter få minutt. Nettvakta blir varsla om dette, og i desse tilfella slepp nettvakta å rykkje ut. La $p = 0.6$ vere sannsynet for at nettvakta må rykkje ut når nettet har gått ned. La X vere talet på gonger nettvakta må rykkje ut i løpet av ein månad.

c) Talet på utrykkingar av nettvakta gitt at nettet går ned n gonger, $X \mid N = n$, er binomisk fordelt. Bruk definisjonen av binomisk fordeling til å forklare kvifor og til å bestemme parametrane. Kva er sannsynet for at nettvakta må rykkje ut minst to gonger i løpet av ein månad der nettet går ned fire gonger?

d) I dette punktet skal du ikkje setje inn talverdiar for parametrane. Gå ut frå at både X og N er stokastiske, det vil seie at vi ikkje har observert verdien av N. Utlei uttrykk for simultanfordelinga til X og N, samt marginalfordelinga til X. Finn den ubetinga forventninga og variansen til X uttrykt ved nokre av eller alle parametrane λ, n og p.

Oppgåve 3

Sandinnhaldet X i ei prøve frå jordsmonnet i eit bestemt område blir målt i prosent og vi går ut frå at det er tilnærma normalfordelt med forventning $\mu_X = 0.40$ og standardavvik $\sigma_X = 0.14$.

a) Kva er sannsynet for at sandinnhaldet i ei prøve er mindre enn 0.36? Kva er sannsynet for at sandinnhaldet i ei prøve er større enn 0.45 gitt at det er større enn 0.36?

Sandinnhaldet Y i ei prøve frå eit anna område går vi ut frå er tilnærma normalfordelt med forventning $\mu_Y = 0.60$ og standardavvik $\sigma_Y = 0.10$.

b) Kva er sannsynet for at sandinnhaldet i ei prøve fra det første området skal vere høgare enn sandinnhaldet i ei prøve frå det andre området?

Ei prøve blir teke frå kvart av områda. Gå ut frå at sanden er jamt fordelt i kvar prøve. 3/5 av prøva frå det første området blir blanda med 2/5 av prøva frå det andre området.

Kva er sannsynet for at sandinnhaldet i blandinga er større enn 0.50?

c) Vis at sannsynstettleiken til $T = (X - \mu_X)^2/\sigma_X^2$ er gitt ved

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Kva for ei kjend fordeling er dette? Kva er verdien/verdiane av parameteren/parametrane i den kjende fordelinga?