Oppgave 1

En mynt kastes to ganger. Betrakt følgende hendelser $A = \{\text{kron i første kast}\}$, $B = \{\text{kron i andre kast}\}$, $C = \{\text{en kron og en mynt}\}$.

a) Er A, B, C parvis uavhengige? Er A, B, C uavhengige? Begrunn svarene.

Oppgave 2

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(4x+1) & \text{for } x \in [0,1], \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

og la Y være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med betinget sannsynlighetstetthet (gitt $X = x$)

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{4x+2y}{4x+1} & \text{for } y \in [0,1], \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Finn $P(Y \leq X)$.

b) Finn $P(X \leq 1/2 | Y \leq 1/2)$.

c) Er variablene X og Y uavhengige?

Oppgave 3

Y er normalfordelt med forventningsverdi μ og varians σ^2.

a) Finn forventningsverdi og varians til den stokastiske variabelen e^Y.

b) Finn $P(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma)$.

c) Anta at $P(Y < 0) = 0.5$ og $P(Y < 1) = 0.6915$. Hva er μ og σ^2?

Oppgave 4

To tilgrensende sider i et rektangel er uavhengige stokastiske variabler X og Y med samme eksponensialfordeling med parameter θ ($E(X) = E(Y) = 1/\theta$).

a) Vis at fordelingen til omkretsen T av rektangelet er gammafordelingen med parametrene 2 og $\theta/2$.

Det antas at parameteren θ er ukjent. Denne estimeres basert på et utvalg av n uavhengige omkretser $T_1, ..., T_n$, der sannsynlighetsfordelingen til T-ene er som i punkt a).

b) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren og momentestimatoren.

Oppgave 5

En stokastisk variabel N har en binomisk fordeling med parametre n og p dvs

$$p_N(k) = P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, ..., n.$$

La $Y_0, Y_1, ..., Y_n$ være kontinuerlige stokastiske variabler, og la Y_k og N være uavhengige for alle $k = 0, 1, ..., n$. Betegn $X = Y_N$.

a) Anta at

$$E(Y_k) = \mu^k \; (\mu \neq 0), \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Bevis at

$$E(X) = (p\mu + 1 - p)^n.$$