Løysingsforslag ST1101, vår 2015

1a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = \underline{0.58}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = \underline{0.3}$$

$P(A|B) = P(A) \Rightarrow$ A og B er uavhengige.

$P(A \cap B) = 0.12 \neq 0 \Rightarrow$ A og B er ikkje disjunkte.

b)

$P(B|A)$ er hendinga at dei finn skipet dersom det er i regionen #1

$= 1 - P($ingen av helikoptera sendt til region 1 finn skipet$)$

$= 1 - (1-r)^m$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$$

$$= p\left[1 - (1-r)^m\right] + (1-p)\left[1 - (1-r)^{n-m}\right]$$

Det optimale talet på helikopter å sende til kvar region finn ein ved å maksimere $P(B)$ m. o. p. m.

2)

$$P(X \le 13) = P\left(\frac{X-10}{4} \le \frac{13-10}{4}\right) = P(\overset{N(0,1)}{Z} \le 0.75) = \Phi(0.75) = 0.7734$$

$$P(8 \le X \le 13) = P\left(\frac{8-10}{4} \le \frac{X-10}{4} \le \frac{13-10}{4}\right) = \Phi(0.75) - \Phi(-0.5) = 0.7734 - 0.308$$

$$= \underline{0.4649}$$

$$P(X \le 13 | X \ge 8) = \frac{P(8 \le X \le 13)}{P(X \ge 8)} = \frac{\Phi(0.75) - \Phi(-0.5)}{1 - \Phi(-0.5)} = \frac{0.4649}{1 - 0.3085} = 0.672.$$

3 a)

$p = P(X=0) = \dfrac{\lambda_x^0 e^{-\lambda_x}}{0!} = e^{-\lambda_x}$ som avtek når λ_x aukar

$\lambda_x = 0.7 \Rightarrow p = e^{-0.7} = 0.497.$

b) 18 uavh. år (forsøk)

Reg: Ikkje ekstremver av denne typen / ekstremver.

$p = P(X=0)$ er konstant i kvart forsøk

$T \sim$ talet på år som ikkje har ekstremver av denne typen

$T \sim B(18, p)$

$H_0: \lambda_x = 0.7 \Leftrightarrow p = p_0$

$H_1: \lambda_x < 0.7 \Leftrightarrow p > p_0$ frå $p = e^{-\lambda_x}$

c) $H_0: p = 0.5$ $H_1: p > 0.5$

Testobservator $T \sim B(18, 0.5)$ under H_0, $\alpha = 0.05$

p-verdien er $P(T \geq 14) = 1 - P(T \leq 13) = 1 - 0.985 = 0.015 < 0.05 \Rightarrow$ forkast.

Evt. bruk at under H_0 er $T \approx N(18p_0, 18p_0(1-p_0))$ i.e. $\approx N(9, (\sqrt{4.5})^2)$

d) $L(\lambda_y) = \prod_{i=1}^{18} \dfrac{\lambda_y^{k_i} e^{-\lambda_y}}{k_i!} = \dfrac{\lambda_y^{\sum_{i=1}^{18} k_i} \cdot e^{-18\lambda_y}}{\prod k_i!}$

$\ln L(\lambda_y) = \sum_{i=1}^{18} k_i \ln \lambda_y - 18\lambda_y - \ln(\prod k_i!)$

$\dfrac{d\ln L}{\partial \lambda_y} = \sum_{i=1}^{18} k_i \dfrac{1}{\lambda_y} - 18 = 0 \Rightarrow (\lambda_y)_e = \dfrac{\sum k_i}{18}$ og $\hat{\lambda}_y = \dfrac{\sum_{i=1}^{18} Y_i}{18}$ (SSMP)

$(\lambda_y)_e = \dfrac{46}{18} = 2.556$

e)

Summen av uavh. poissonfordelte variable er poissonfordelte med parameter summen av parameterene.

s.a $Z = X + Y$ er poissonfordelt med parameter $\lambda_z = \lambda_x + \lambda_y$

$$P(X=x \mid Z=z) = \frac{P(X=x \cap Y=z-x)}{P(Z=z)} = \frac{\dfrac{\lambda_x^x e^{-\lambda_x}}{x!} \cdot \dfrac{\lambda_y^{z-x} \cdot e^{-\lambda_y}}{y! = (z-x)!}}{\dfrac{\lambda_z^z e^{-\lambda_y}}{z!}}$$

$$= \frac{z!}{x! \cdot y!} \cdot \frac{(\lambda_x)^x \cdot (5\lambda_x)^{z-x}}{(6\lambda_x)^z} = \frac{z!}{x!\,(z-x)!} \cdot \frac{5^{z-x}}{6^z} = \underline{\binom{z}{x} \frac{5^{z-x}}{6^z}}$$

$$= \binom{z}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{z-x}$$ som sier at $X \mid Z = z$ er $\underline{B(z, \frac{1}{6})}$

4)

$$E[\hat{p}] = \frac{E[T]}{18} = \frac{18p}{18} = p$$

$$Var[\hat{p}] = \frac{Var[T]}{18^2} = \frac{18p(1-p)}{18^2} = \frac{p(1-p)}{18}$$

$$E[S] = \sum_{i=1}^{18} E[X_i] = 18\lambda_x$$

b)

S er ein sum av uavh. poissonfordelte variable, kvar med forventning λ_x => ~~$E[S] = 18\lambda_x$ og Sum~~ S er poissonfordelt med parameter $\sum_{i=1}^{18} \lambda_x = 18\lambda_x = \mu$

$M_S(t) = e^{\mu(e^t - 1)}$. Innsatt $\mu = 18\lambda_x$ gir $M_S(t) = e^{18\lambda_x(e^t - 1)}$

$$-\hat{\lambda}_x = -\frac{S}{18} = \left(-\frac{1}{18}\right) S$$

$$M_{aS} = M_S(at) \Rightarrow M_{-\hat{\lambda}_x} = M_S\left(-\frac{t}{18}\right)$$

$$M_{-\hat{\lambda}_x}(t) \stackrel{\Delta}{=} E\left[e^{-\hat{\lambda}_x t}\right] \Rightarrow E[p^\circ] = M_{-\hat{\lambda}_x}(1) = M_S\left(-\frac{1}{18}\right) = e^{18\lambda_x\left(e^{-\frac{1}{18}}-1\right)}$$ q.e.d

$$e^{-\frac{1}{18}} - 1 = 1 - \frac{1}{18} + \left(\frac{1}{18}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \dots - 1 = -\frac{1}{18} + R$$

$$\Rightarrow E[p^\circ] = e^{-\lambda_x} \cdot e^{18\lambda_x \cdot R} = p \cdot e^{18\lambda_x \cdot R} \neq p$$ som syner

at p° ikkje er forventningsrett. R er rett nok liten og avtar

med talet på observasjonar.