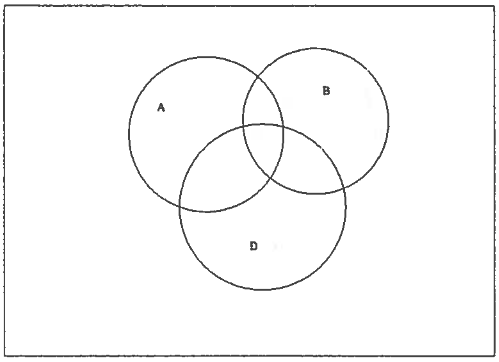
Løsningsforslag 22.05.09

Oppgave 1



a)

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.035}{0.05} = \underline{\underline{0.70}}.$$

$$P(D \mid A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.035}{0.06} = \underline{\underline{0.58}}.$$

Hendelsene D og A er ikke disjunkte siden en deltaker kan være syk og ha positiv A test samtidig, $P(A \cap D) = 0.035 \neq 0$. A og D er avhengige siden $P(A) \cdot P(D) = 0.06 \cdot 0.05 = 0.003 \neq P(A \cap B)$.

b)

$$F_{X_{\mathrm{D}}}(x) = \int_0^x \lambda_{\mathrm{D}} e^{-\lambda_{\mathrm{D}} u} du = 1 - e^{-\lambda_{\mathrm{D}} x} = \underline{\underline{1 - e^{-0.32x}}}.$$

$$F_{X_{\mathrm{F}}}(x) = \int_0^x \lambda_{\mathrm{F}} e^{-\lambda_{\mathrm{F}} u} du = 1 - e^{-\lambda_{\mathrm{F}} x} = \underline{\underline{1 - e^{-1.73x}}}.$$

$$P(X_{\mathrm{F}} > c) = 1 - F_{X_{\mathrm{F}}}(c) = \underline{\underline{e^{-1.73c}}}.$$

Medianen m er gitt ved

$$\begin{aligned} P(X_{\mathrm{D}} \leq m) &= 0.5 \\ 1 - e^{-\lambda_{\mathrm{D}} m} &= 0.5 \\ m &= -\frac{1}{\lambda_{\mathrm{D}}} \ln 0.5 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{m = 2.17}}$

c)

$$P(B \mid D) = P(X_\mathrm{D} > 0.75) = e^{-0.32 \cdot 0.75} = \underline{\underline{0.79}}.$$

$$P(B \mid F) = P(X_\mathrm{F} > 0.75) = e^{-1.73 \cdot 0.75} = \underline{\underline{0.27}}.$$

$$P(D \mid B) = \frac{P(B \mid D)P(D)}{P(B \mid D)P(D) + P(B \mid F)P(F)} = \frac{0.79 \cdot 0.05}{0.79 \cdot 0.05 + 0.27 \cdot (1 - 0.05)} = \underline{\underline{0.13}}.$$

$P(B \mid D) = 0.79$ og større enn $P(A \mid D) = 0.70$, dette forteller at test B oftere vil være positiv enn test A når deltakeren er syk. Men $P(D \mid B) = 0.27$ og mye mindre enn $P(D \mid A) = 0.58$, som betyr at test B oftere gir falskt positivt resultat enn test A. Derfor vil vi kanskje foretrekke test A.

Oppgave 2

a) Antagelser: Gangene nettet går ned er uavhengige av hverandre, intensiteten λ_1 er konstant over forskjellige dager og tidspunkter, sannsynligheten for at nettet går ned to eller flere steder samtidig er neglisjerbar.

$$P(N_1 = 2) = \frac{4.7^2}{2!} e^{-4.7} = \underline{\underline{0.10}}.$$

$$\begin{aligned} P(N_1 \geq 2) &= 1 - P(N_1 \leq 1) = 1 - P(N_1 = 0) - P(N_1 = 1) \\ &= 1 - \frac{4.7^0}{0!} e^{-4.7} - \frac{4.7^1}{1!} e^{-4.7} = \underline{\underline{0.95}}. \end{aligned}$$

b) $N = N_1 + N_2$. To mulige løsninger:

1.

$$\begin{aligned} M_N(t) &= M_{N_1}(t) \cdot M_{N_2}(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t - 1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t - 1)} \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)} \end{aligned}$$

som er den momentgenerende funksjonen til en Poissonfordelt variabel med parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 4.7 + 0.8 = 5.5$.

2.

$$
\begin{aligned}
P(N_1+N_2=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(N_1+N_2=k \mid N_2=i)P(N_2=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(N_1=k-i)P(N_2=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{i}}{(i)!}e^{-\lambda_2} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^{k-i}\lambda_2^{i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(N_1=3 \mid N_1+N_2=5) &= \frac{P(N_1=3\cap N_1+N_2=5)}{P(N_1+N_2=5)} \\
&= \frac{P(N_1=3\cap N_2=2)}{P(N=5)} \\
&= \frac{P(N_1=3)\cdot P(N_2=2)}{P(N=5)} \\
&= \left(\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^3 e^{-\lambda_2}\lambda_2^2}{3!\cdot 2!}\right) \Big/ \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^5}{5!}\right) \\
&= \frac{5!}{3!\cdot 2!}\frac{\lambda_1^3\lambda_2^2}{\lambda^5} \\
&= \frac{5!}{3!\cdot 2!}\frac{4.7^3\cdot 0.8^2}{5.5^5} = \underline{\underline{0.132}}
\end{aligned}
$$

c) Vi kan se på situasjonen som en serie forsøk (hver gang nettet gå ned et et forsøk) der hvert forsøk har to mulige utfall: nettvakten må rykke ut ("suksess") og nettvakten slipper å rykke ut ("fiasko"). Sannsynligheten for suksess $p=0.6$ er konstant i alle forsøkene, og vi antar at forsøkene er uavhengige. Gitt at nettet går ned n ganger, så er $X \mid N=n$ binomisk fordelt med parametre n og $p=0.6$.

$$P(X\geq 2) = 1-P(X=0)-P(X=1) = 1-0.4^4-\binom{4}{1}0.6^1\cdot 0.4^3 = \underline{\underline{0.82}}.$$

d) Simultanfordelingen til X og N finnes ved å bruke resultatet for betinget sannsynlighetsfordeling:

$$
\begin{aligned}
P(X=x, N=n) &= P(X=x \mid N=n)P(N=n) \\
&= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \underline{\underline{\frac{e^{-\lambda}}{x!(n-x)!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (\lambda(1-p))^n}} n \geq x.
\end{aligned}
$$

Marginalfordelingen til X er en Poissonfordeling med parameter λp:

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=x, N=n) = \sum_{n=x}^{\infty} P(X=x, N=n) \\
&= \sum_{n=x}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{x!(n-x)!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (\lambda(1-p))^n \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{x!} p^x \lambda^x e^{\lambda(1-p)} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!} e^{-\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Dermed er $\mathrm{E}(X) = \lambda p$ og $\mathrm{Var}(X) = \lambda p$. Dette kan også finnes direkte fra

$$
\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}_N(\mathrm{E}(X \mid N)) = \mathrm{E}_N(N \cdot p) = \underline{\underline{\lambda p}}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}_N(\mathrm{Var}(X \mid N)) + \mathrm{Var}_N(\mathrm{E}(X \mid Y)) \\
&= \mathrm{E}(Np(1-p)) + \mathrm{Var}(Np) \\
&= \lambda p(1-p) + p^2\lambda = \underline{\underline{\lambda p}}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

a)

$$
P(X \leq 0.36) = P(Z \leq \frac{0.36 - 0.40}{0.14}) = P(Z \leq -0.29) = \underline{\underline{0.3859}}.
$$

$$
\begin{aligned}
P(X > 0.45 \mid X > 0.36) &= \frac{P(X > 0.45, X > 0.36)}{P(X > 0.36)} \\
&= \frac{P(X > 0.45)}{P(X > 0.36)} \\
&= \frac{1 - P(X \leq 0.45)}{1 - P(X \leq 0.36)}
\end{aligned}
$$

$$P(X \le 0.45) = P(Z \le \frac{0.45 - 0.40}{0.14}) = P(Z \le 0.36) = 0.6406.$$

$$P(X > 0.45 \mid X > 0.36) = \frac{1 - 0.6406}{1 - 0.3859} = \underline{\underline{0.5852}}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= P(X - Y > 0) = P(Y - X \le 0) \\ &= P(Z \le \frac{0 - (0.60 - 0.40)}{\sqrt{0.10^2 + 0.14^2}}) \\ &= P(Z \le -1.16) = \underline{\underline{0.1230}}. \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(3/5 \cdot X + 2/5 \cdot Y) = 3/5 \cdot 0.40 + 2/5 \cdot 0.60 = 0.48$$

$$\mathrm{Var}(3/5 \cdot X + 2/5 \cdot Y) = (3/5)^2 \cdot 0.14^2 + (2/5)^2 \cdot 0.10^2 = 0.008656$$

$$\begin{aligned} P(\frac{3}{5}X + \frac{2}{5}Y > 0.50) &= P(Z > \frac{0.50 - 0.48}{\sqrt{0.008656}}) \\ &= P(Z > 0.21) = 1 - P(Z \le 0.21) \\ &= 1 - 0.5832 = \underline{\underline{0.4168}}. \end{aligned}$$

c) Vet at $Z = (X - \mu)/\sigma$ er standard normalfordelt, ser på denne variabelen videre, $\Rightarrow T = g(Z) = Z^2$. Her er $g(Z)$ ikke en monoton transformasjon.

$$F_T(t) = P(Z^2 \le t) = P(-\sqrt{t} \le Z \le \sqrt{t}) = F_Z(\sqrt{t}) - F_Z(-\sqrt{t})$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}}[f_Z(\sqrt{t}) + f_Z(-\sqrt{t})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}}[e^{-(-\sqrt{t})^2} + e^{-(\sqrt{t})^2/2}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \end{aligned}$$

som er kjikvadratfordelingen med $\nu = 1$ frihetsgrad.