Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG FOR

ST1101 SANNSYNLIGHETSREGNING /
ST6200 SANNSYNLIGHETSREGNING

Torsdag 6. desember 2007

Oppgave 1

a) $P(a$ fra mor$) = P(a$ fra far$) = ½$ og $P(A$ fra mor$) = P(A$ fra far$) = 1/2$.

$P($barn blir $aa) = P(a$ fra mor$) \times P(a$ fra far$) = ½\times½ = \underline{¼}$

$P($barn blir frisk bærer$) = P(a$ fra mor$) \times P(A$ fra far$) + P(A$ fra mor$) \times P(a$ fra far$) = ¼ + ¼ = \underline{½}$

b) $P($Mor $= Aa$ og Far $= Aa) = P(Aa) \times P(Aa) = 0{,}05 \times 0{,}05 = \underline{0{,}0025}$

$P($Nøyaktig en $Aa) = P($Mor $= Aa$ og Far $= AA) + P($Mor $= AA$ og Far $= Aa)$
$= 2 \times 0{,}05 \times 0{,}95 = \underline{0{,}095}$

$P($Barn $= aa) = P($Mor $= Aa$ og Far $= Aa) \times P($Barn $aa \mid$ Mor $= Aa$ og Far $= Aa)$
$= 0{,}0025 \times ¼ = \underline{0{,}000625}$ (dvs. 1 av 1600).

c) $P($Mor og Far $= AA \mid$ Tre friske barn, dvs. AA eller $Aa)$.
Bruker Bayes formel $P(A_j \mid B) = \dfrac{P(B \mid A_j) \times P(A_j)}{\sum_i P(B \mid A_i) \times P(A_i)}$

La $B =$ "Tre friske barn, dvs. AA eller Aa", $A_1 =$ "Mor og Far AA", $A_2 =$ "Nøyaktig en Aa", $A_3 =$ "Mor og Far Aa".
$P(B \mid A_1) = 1$, $P(A_1) = 0{,}95^2$, $P(B \mid A_2) = 1$, $P(A_2) = 0{,}095$,
$P(B \mid A_3) = (1 - 1/4)^3$, $P(A_3) = 0{,}0025$.

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1) \times P(A_1)}{\sum_i P(B \mid A_i) \times P(A_i)} = \frac{1 \times 0{,}9025}{1 \times 0{,}95^2 + 1 \times 0{,}095 + 0{,}75^3 \times 0{,}0025} = \underline{\underline{0{,}9038}}$$

Oppgave 2

La X være antall komponenter som svikter; $X \sim \text{Bin}(n,p)$

a) P(systemsvikt i serie) = P(minst en komponent svikter) = $P(X \geq 1)$

$$= 1 - P(X = 0) = \underline{\underline{1 - (1-p)^n}}$$

P(systemsvikt i parallell) = P(Alle komponentene svikter) $= P(X = n) = p^n$

b) P(systemsvikt i m-av-n system) = $P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$n = 400$, $p = 0{,}07$ og $m = 40$. Bruker normaltilnærmingen.

$$P(X > m) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \approx P\left(Z > \frac{40 - 28}{\sqrt{28(1 - 0{,}07)}} = 2{,}35 \right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2{,}35) = 1 - 0{,}9906 = \underline{\underline{0{,}0094}}$$

Oppgave 3

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda}\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k}, & t > 0 \\ 0 & ellers \end{cases}$$

a) $F_T(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f_T(t)\,dt = \ldots$ substitute $y = t/\lambda$

$$\Rightarrow F_T(t) = k \int y^{k-1} e^{-y^k} dy = 1 - e^{-y^k} = \underline{\underline{1 - e^{-(t/\lambda)^k}}} \text{ for } t > 0$$

$$k = 1 \Rightarrow f_T(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda} \text{ for } t > 0,$$

dvs. eksponensialfordelingen med parameter $1/\lambda$.

b) La

$$f(t \mid T > t_0) = \begin{cases} c \times f(t), & t > t_0 \\ 0 & ellers \end{cases}$$

hvor c er en normaliseringskonstant,

$$c = \frac{1}{\int_{t_0}^{\infty} f_T(t)\,dt} = \frac{1}{P(t > t_0)} = \frac{1}{1 - P(t \le t_0)} = \frac{1}{1 - F_T(t)}$$

$$\Rightarrow f(t \mid T > t_0) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{1 - F_T(t)}, & t > t_0 \\ 0 & ellers \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \underline{\underline{\frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}}} \quad \text{for } t > 0$$

c) $X = k^{-1}T^k$. Transformasjonen er strengt monoton for positiv k.

$$X = g(T) = k^{-1}T^k \text{ og } T = h(X) = (kX)^{1/k} \Rightarrow h'(X) = (kX)^{\frac{1-k}{k}}$$

$$f_X(x) = f_T(h(x)) \times |h'(x)| = \underline{\underline{\frac{k}{\lambda^k} e^{-\frac{k}{\lambda^k}x}}}$$

dvs. eksponensialfordeling med parameter $\frac{k}{\lambda^k}$.