

Löyringsforslag ST1101/ST6101

Oppgave 1

a) X = tallet på jenter som blir valgt ut i en periode på 10 dager

Tilfeldig utval \Rightarrow 10 uavh. forsøk

$$P(\text{jente valgt ut}) = \frac{9}{15} = 0.6 \text{ ; kvart forsøk}$$

Reg: jente eller gutt ; kvart forsøk

$\therefore X$ er binomisk fordelt $\therefore X \sim B(10, 0.6)$

$$P(X=6) = \binom{10}{6} 0.6^6 \cdot 0.4^4 = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = 0.6177 - 0.36692 = \underline{0.25}$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.3669 = \underline{0.6331}$$

b)

To grupper { jenter
gutter

Trukket ut tilfeldig ^{10 stykker} uten tilbakelegging \Rightarrow

hypergeometrisk fordeling.

Y = tallet på jenter som blir trukket ut

$$P(Y=6) = \frac{\binom{9}{6} \binom{6}{4}}{\binom{15}{10}} = \frac{60}{149} \approx \underline{0.4}$$

c)

$P(\text{Minst 5 dager før gutt blir valgt ut})$

$$= P(\text{Jenter blir valgt ut de 4 første dagene}) = (0.6)^4 = \underline{0.13}$$

La Z være tallet på dager til 1 gutt blir valgt ut.

$$P(Z \geq 10 | Z \geq 6) = \frac{P(Z \geq 10)}{P(Z \geq 6)} = \frac{0.6^9}{0.6^5} = (0.6)^4 = \underline{0.13}$$

d) La X vere dagen Hakon blir valgt ut for 2. gang:
 X er negativt binomisk fordeelt.

$$P(X=15) = \binom{14}{1} \left(\frac{1}{15}\right)^2 \left(\frac{14}{15}\right)^{13} = \left(\frac{14}{15}\right)^{14} \cdot \frac{1}{15} = \underline{\underline{0.025}}$$

$$E[X] = \frac{n}{p} = \frac{2}{1/15} = \underline{\underline{30}}$$

Oppgave 2

a) X_H og X_B er begge binomisk fordeelte.

$$X_H \sim B(15, 0.7), \quad X_B \sim B(15, 0.4)$$

$$E[X_H] = 15 \cdot 0.7 = \underline{\underline{10.5}}$$

$$E[X_B] = 15 \cdot 0.4 = \underline{\underline{6}}$$

$$\text{Var}[X_H] = 15 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = \underline{\underline{3.15}} = \sigma_H^2$$

$$\text{Var}[X_B] = 15 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = \underline{\underline{3.6}} = \sigma_B^2$$

b) $X_H \approx N(10.5, 3.15), \quad X_B \approx N(6, 3.6)$

La $Y = X_H + X_B \approx N(16.5, 6.75)$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 20) &= P(Y \geq 21) \approx P\left(\frac{Y-16.5}{\sqrt{6.75}} \geq \frac{21-16.5}{\sqrt{6.75}}\right) = P(Z \geq 1.73) \\ &= 1 - \Phi(1.73) = 1 - 0.9582 = \underline{\underline{0.0418}} \end{aligned}$$

Med kontinuitetskorreksjon

$$P\left(Z > \frac{20.5-16.5}{\sqrt{6.75}}\right) = 1 - \Phi(1.54) = 1 - 0.938 = \underline{\underline{0.062}}$$

$$D = X_H - X_B \approx N(4.5, 6.75)$$

$$P(D > 1) \approx P\left(\frac{D - 4.5}{\sqrt{6.75}} \geq \frac{1 - 4.5}{\sqrt{6.75}}\right) = 1 - \Phi(-1.347)$$

$$\approx 1 - 0.089 = 0.911$$

Med kontinuasjonsapproximasjon

$$P(Z \geq \frac{0.5 - 4.5}{\sqrt{6.75}}) = 1 - \Phi(-1.54) = 1 - 0.062 = 0.938$$

c) Laget får 3 poeng for suksess og 1 poeng for mangjort.

$$\Rightarrow T = 3(X_H + X_B) + 1(Y_H + Y_B) = \cancel{3}X_H + \cancel{3}X_B + Y_H + Y_B$$

$$E[Y_H] = 15 \cdot 0.2 = 3 \quad E[Y_B] = 15 \cdot 0.3 = 4.5$$

$$\Rightarrow E[T] = 3 \cdot E[X_H + X_B] + E[Y_H] + E[Y_B] = 3 \cdot 16.5 + 3 + 4.5 = \underline{57}$$

d)

$X_H + Y_H$ er $B(15, 0.9)$ siden vi kan

registrere $A =$ suksess eller mangjort eller $A^c =$ tap.

$$\text{Var}[X_H + Y_H] = 15 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = \text{Var}[X_H] + \text{Var}[Y_H] + 2 \text{Cov}[X_H, Y_H]$$

$$\Rightarrow 3.15 + 15 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 2 \text{Cov}[X_H, Y_H] = 15 \cdot 0.9 \cdot 0.1$$

$$\Rightarrow 2 \text{Cov}[X_H, Y_H] = 1.95 - 2.4 - 3.15 = -4.2 \Rightarrow \text{Cov}[X_H, Y_H] = -2.1$$

Oppgave 3

$$\begin{aligned} a) \quad E[e^{tX}] &= M_X(t) = \int_{\theta}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\theta)} dx = e^{\theta} \int_{\theta}^{\infty} e^{-x(1-t)} dx \\ &= e^{\theta} \left[-\frac{e^{-x(1-t)}}{1-t} \right]_{\theta}^{\infty} \quad \text{for } t < 1 \end{aligned}$$

$$j) \quad M_X(t) = \frac{e^{-\theta(1-t)}}{1-t} = \frac{e^{\theta t}}{1-t}, \quad t < 1$$

$$M_X'(t) = \frac{\theta e^{\theta t}}{1-t} + \frac{e^{\theta t}}{(1-t)^2}$$

$$M_X''(t) = \frac{\theta^2 e^{\theta t}}{1-t} + \frac{\theta e^{\theta t}}{(1-t)^2} + \frac{\theta e^{\theta t}}{(1-t)^2} + \frac{2 \cdot e^{\theta t}}{(1-t)^3}$$

$$M_X'(0) = E[X] = \frac{\theta \cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = \underline{\theta + 1}$$

$$E[X^2] = M_X''(0) = \theta^2 + 2\theta + 2$$

$$\Rightarrow \text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \theta^2 + 2\theta + 2 - (\theta + 1)^2 = \underline{1}$$

$$b) \quad L(\theta | x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m e^{-(x_i - \theta)} = e^{-\sum_{i=1}^m (x_i - \theta)}$$

$$\text{or } L(\theta | x_1, \dots, x_m) = e^{-\sum_{i=1}^m x_i + m\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m > 0 \quad \therefore L(\theta | x_1, \dots, x_m) \text{ is strictly increasing.}$$

For θ maximize the same means θ greatest so large as possible

$$\text{! } \text{Men } \theta \leq x_i \text{ for alle } i \quad \therefore \theta = \min\{x_1, \dots, x_m\}$$