Løysingsforslag ST1101 V/2016

1 a) Tre uavh. forsøk
Reg Krone eller Mynt i kvar
$P(\text{Krone}) = p$ i alle forsøk

$\Rightarrow X \sim B(3, p)$

$P(\text{plenen slått 1. dagen}) = P(X=1) + P(X=2)$

$= \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2 + \binom{3}{2} p^2 (1-p) = 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p)$

$= 3p(1-p)(1-p+p) = 3p(1-p).$

$p = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\text{plenen slått 1. dagen}) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{0.75}$

b) N = talet på forsøk (dagar) til 1. hending skjer i ei uavh. forsøksrekkje der sannsynet, P(plenen blir slått den dagen) $= 0.75 \Rightarrow$ N er geometrisk fordelt.

Vi har. $P(N=n) = \cancel{p}\ (0.25)^{n-1} \cdot 0.75.$

$P(N \le n) = 1 - P(N > n) = 1 - (0.25)^n$

$P(N \le 3) = 1 - (0.25)^3 = 1 - 0.016 = \underline{0.984}$

Oppgåve 2

a) $t = 2 \Rightarrow \lambda t = \mu = 4$

$P(X=4) = P(X \le 4) - P(X \le 3) = 0.6288 - 0.4335 = \underline{0.1953}$

$E[X] = \lambda t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{\lambda} = \frac{4}{2} = \underline{2}$

b).

$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = \lambda t = 1$

La Y vere poissonfordelt med $\mu = 1$

Frå tabell : $P(A) = P(Y=2) = P(Y \le 2) - P(Y \le 1) = 0.9197 - 0.7358 = \underline{0.1839}$

$t = \frac{3}{2} \Rightarrow \mu = \lambda t = 3$

La Z vere poissonfordelt med $\mu = 3$.

Frå tabell : $P(B) = P(Z=2) = P(Z \le 2) - P(Z \le 1) = 0.4232 - 0.1991 = 0.2241$

A og B er uavhengige hendingar sidan dei skjer i disjunkte tidsintervall.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.1839 \cdot 0.2241 = 0.041$

La X vere talet på fisk han får i 2 timar.

Skal finne $P(Y = 2 \mid X = 4) = \frac{P(Y=2 \text{ og } X=4)}{P(X=4)}$

$= \frac{P(Y=2 \cap Z=2)}{P(X=4)} = \frac{P(A \cap B)}{P(X=4)} = \frac{0.041}{0.1953} = \underline{0.21}$

c)

T_i er tida til 4 hending i ein poissonprosess

T_i er difor gammafordelt $^{(4,\lambda)}$ med forventing $\frac{4}{\lambda}$ og varians $\frac{4}{\lambda^2}$. $\lambda = 2 \Rightarrow Var(T_i) = 1$.

a $V = \sum_{i=1}^{21} T_i \Rightarrow E(V) = \sum_{i=1}^{21} E[T_i] = 21 \cdot 2 = 42$

$Var(V) = \sum_{i=1}^{21} Var(T_i) = 21 \cdot 1 = 21.$

Sentralgrenseteoremet gjev $V \approx N(42, (\sqrt{21})^2)$

$P(V > 50) = P\left(\frac{V-42}{\sqrt{21}} > \frac{50-42}{\sqrt{21}} \right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{8}{\sqrt{21}}\right) = 1 - \Phi(1.746)$

$\approx 1 - 0.9595 = \underline{0.0405}$

Oppgåve 3

a) $$P(X \le 3.79) = P\left(\frac{X-4.2}{0.25} \le \frac{3.79-4.2}{0.25}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{-0.41}{0.25}\right) = \Phi(-1.64) = \underline{0.0505} \approx \underline{0.05}$$

La N vere talet som avvik meir enn 0.41 frå forventingsverdien. $N \sim B(12,\ 2\cdot(0.0505))$ ɔ: $B(12,\ 0.101)$ Frå tabell

$\approx B(12, 0.1)$. $\quad P(N \ge 1) = 1 - P(N=0) = 1 - 0.282 = \underline{0.718}$

b) $$P\left(-1.96 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{12}}} \le 1.96\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(\bar{X} - 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{12}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{12}}\right) = 0.95$$

Dette gir intervallet $\left[\bar{x} - 1.96\cdot\frac{0.25}{\sqrt{12}},\ \bar{x} + 1.96\cdot\frac{0.25}{\sqrt{12}}\right]$

eller $\left[4.22 - 1.96\cdot\frac{0.25}{\sqrt{12}},\ 4.22 + 1.96\cdot\frac{0.25}{\sqrt{12}}\right] = [4.08,\ 4.36]$

~~Viser at~~ Vi har 95% tillit til at forventinga ligg i intervallet [4.08, 4.36] som inneheld verdien 4.2 som tilsvarar eit normalår. Frå a) har vi at det ikkje er unormalt mange verdiar som avvik mykje frå 4.2. Nedbørsmengda ser nokså normal ut.

c)

$$H_0: \mu = 0, \qquad H_1: \mu > 0$$

Forkast om $Z = \dfrac{\bar{Y} - 0}{\frac{2.2}{\sqrt{12}}} > z_{0.05} = 1.645$

$$z_{obs} = \frac{1.308}{0.626} = 2.09 > 1.645 \Rightarrow \text{forkast } H_0 \text{ på}$$

5% nivå. Temperaturen har vore varmare enn normalt.

d)

$$P\text{-verdien} = P(Z \geq z_{obs} \mid H_0) = P\left(\frac{\bar{Y}}{\frac{2.2}{\sqrt{12}}} \geq 2.09 \mid H_0\right)$$

$$= 1 - \Phi(2.09) = 1 - 0.9817 = \underline{0.0183}$$

$$\beta = P(\text{Type II feil når } \mu = 1) = P\left(\frac{\bar{Y}}{\frac{2.2}{\sqrt{12}}} < 1.645 \mid \mu = 1\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{Y} - 1}{\frac{2.2}{\sqrt{12}}} < 1.645 - \frac{1}{\frac{2.2}{\sqrt{12}}}\right) = \Phi\left(1.645 - \frac{1}{\frac{2.2}{\sqrt{12}}}\right)$$

$$= \Phi(0.07) = 0.528$$

e)

$$X = \ln(N) \Rightarrow N = e^X$$

$$E[N] = E[e^X] = M_X(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$Var[N] = E[N^2] - (E[N])^2 = E[e^{2X}] - (E[N])^2$$

$$= M_X(2) - (M_X(1))^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2}\left[e^{\sigma^2} - 1\right]$$

$$\mu = 4.2 \text{ og } \sigma^2 = (0.25)^2 \Rightarrow$$

$$E[N] = e^{4.2 + \frac{(0.25)^2}{2}} = e^{4.231} = 68.8 \text{ mm}$$