5.2.8. Approksimasjon av $E[g(X_1,\ldots,X_n)]$ og $Var[g(X_1,\ldots,X_n)]$

La $(X_1,\ldots,X_n)$ være en stokastisk vektor, og sett

$$E(X_j) = \mu_j\ ,\quad Var(X_j) = \sigma_j^2\ ,\quad j = 1,\ \ldots,n$$

Betrakt funksjonen $y = g(x_1,\ldots,x_n)$ som antas ha kontinuerlige partiell-deriverte til og med 2. orden i en omegn om $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$. Hvis samtlige σ_j^2 er tilstrekkelig små, vil med stor sannsynlighet hver enkelt X_j ligge nær μ_j slik at ledd av formen $c_{jk}(X_j-\mu_j)(X_k-\mu_k)$ blir relativt små. I så fall vil

en sannsynligvis ikke gjøre sa stor feil om en erstatter

(5.96) $$Y = g(X_1,\ldots,X_n)$$

med

(5.97) $$Z = g(\mu_1,\ldots,\mu_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g(\mu_1,\ldots,\mu_n)}{\partial \mu_j}(X_j-\mu_j)$$

(En utvikler altså $g(x_1,\ldots,x_n)$ i Taylorrekke omkring punktet $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ og tar bare med førstegradsleddene.)

Ved å utnytte dette får en følgende formler som kan nyttes ved approksimativ beregning av forventningsverdi og varians for en funksjon $g(X_1,\ldots,X_n)$, som tilfredsstiller betingelsene ovenfor:

(5.98) $$E[g(X_1,\ldots,X_n)] \approx g(\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

(5.99) $$Var[g(X_1,\ldots,X_n)] \approx \sum_j \left(\frac{\partial g(\mu_1,\ldots,\mu_n)}{\partial \mu_j}\right)^2 \sigma_j^2 + 2\sum_{j<k} \frac{\partial g}{\partial \mu_j}\frac{\partial g}{\partial \mu_k}Cov(X_j,X_k)$$

Øving 5.11. La (μ_1,μ_2,μ_3) representere fysikalske størrelser som skal måles. På grunn av varierende forsøksbetingelser, målefeil o.l., oppfattes måleresultatene som realisasjoner av en stokastisk vektor (X_1,X_2,X_3) der

$$E(X_j) = \mu_j,\quad Var(X_j) = \sigma_j^2 \text{ og } Cov(X_j,X_k) = \rho_{jk}\sigma_j\sigma_k\ ;\quad j,k = 1,2,3$$

Finn et approksimativt uttrykk for forventningsverdi og varians av funksjonen

$$Y = kX_1X_2X_3$$

der k er en konstant.