



Faglig kontakt under eksamen:  
Yurii Lyubarskii tlf. 735 93526

EKSAMEN I SIF5013/16 MATEMATIKK 4N  
OG SIF5017 MATEMATIKK 4D

Lørdag 3. august 2002  
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)  
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Vedlegg: Formelark i numerikk

Sensurdato: 2. september

*Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.*

**Oppgave 1**

La  $u$  betegne stepfunksjonen (Heavisidefunksjonen)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0, \\ 1 & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

a) La  $a$  og  $b$  være konstanter,  $b \geq 0$ . Finn den Laplacetransformerte til funksjonen

$$f(t) = e^{at}u(t - b).$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + y = e^t u(t - 1) \quad \text{for } t > 0,$$

når initialbetingelsene er  $y(0) = 1$  og  $y'(0) = 0$ .

c) Finn konvolusjonen  $f * f$ , der  $f$  er gitt under punkt a).

**Oppgave 2**

Funksjonen  $f(x)$  er gitt ved

$$f(x) = x \cos x \quad \text{for } -\pi \leq x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{for alle } x.$$

La  $b_n$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$  betegne Fouriersinuskoeffisientene til  $f(x)$ .

Beregn koeffisienten  $b_1$ . (Hint:  $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ .)

Det oppgis at for  $n \neq 1$  er

$$b_n = (-1)^n \frac{2n}{n^2 - 1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Skriv opp Fourierrekka til  $f(x)$ , og bruk den til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin n}{n^2 - 1}.$$

**Oppgave 3**

I området  $t \geq 0, 0 \leq x \leq 1$  er det gitt et randverdiproblem

$$(1) \quad u_{xx} = u_{tt} - u,$$

$$(2) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0.$$

a) Bestem alle funksjoner av typen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  som tilfredsstill (1) og (2).

b) Skriv opp en løsning av (1) og (2) på rekkeform, og bestem den løsningen som tilfredsstill initialbetingelsene

$$u(x, 0) = 1 + \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

**Oppgave 4**

Funksjonen  $f(x)$  er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{for } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Regn ut den Fouriertransformerte  $\hat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iw x} dx$ . Finn verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixw} + e^{i(x-1)w} - 2e^{i(x-2)w}}{w} dw$$

for en vilkårlig  $x$  i det åpne intervallet  $(1, 2)$ . Bruk resultatet til å finne verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3 \sin \frac{1}{2}w + \sin \frac{3}{2}w}{w} dw.$$

**Oppgave 5**

- a) Bruk både Lagranges og Newtons interpolasjonsmetoder til å finne tredjegradspolynomet  $p(x)$  som oppfyller

$$p(-2) = -5, \quad p(-1) = 0, \quad p(0) = 1, \quad p(1) = 4.$$

Merk at begge fremgangsmåtene skal vises.

- b) La  $p(x)$  være polynomet i a). Bruk Simpsons regel med nodene  $-1, 0, 1$  til å beregne integralet

$$\int_{-1}^1 p(x) dx.$$

Hvor stor blir feilen ved bruk av Simpsons regel i dette tilfellet?

**Oppgave 6** Eulers metode (eksplisitt metode) for varmeledningsligningen.

Gitt

$$(*) \begin{cases} u_t = u_{xx} & t \geq 0, 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 0) = 2 \sin \pi x & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

- a) Bruk gitteret  $(x_i, t_j)$  med  $i = 0, \dots, n$  og  $j = 0, 1, 2, \dots$ , hvor  $x_i = i \cdot h$ ,  $h = 1/n$ , og  $t_j = j \cdot k$ . Sett opp en formel for å finne en numerisk approksimasjon  $U_i^{j+1}$  til løsningen  $u$  av (\*) i punktet  $(x_i, t_{j+1})$  med Eulers metode.

$$\text{Bruk: } \begin{aligned} u_t(x, t) &\approx (u(x, t+k) - u(x, t))/k \quad \text{og} \\ u_{xx}(x, t) &\approx (u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t))/h^2. \end{aligned}$$

- b) Sett  $n = 4$ ,  $h = 1/4$ ,  $k = 0.03$  og beregn  $[U_1^1, U_2^1, U_3^1]^T$  fra de kjente verdiene  $[U_1^0, U_2^0, U_3^0]^T$ .