TALLENES HERRE

Et intervjuportrett av Atle Selberg om hans liv og matematiske virke

ved

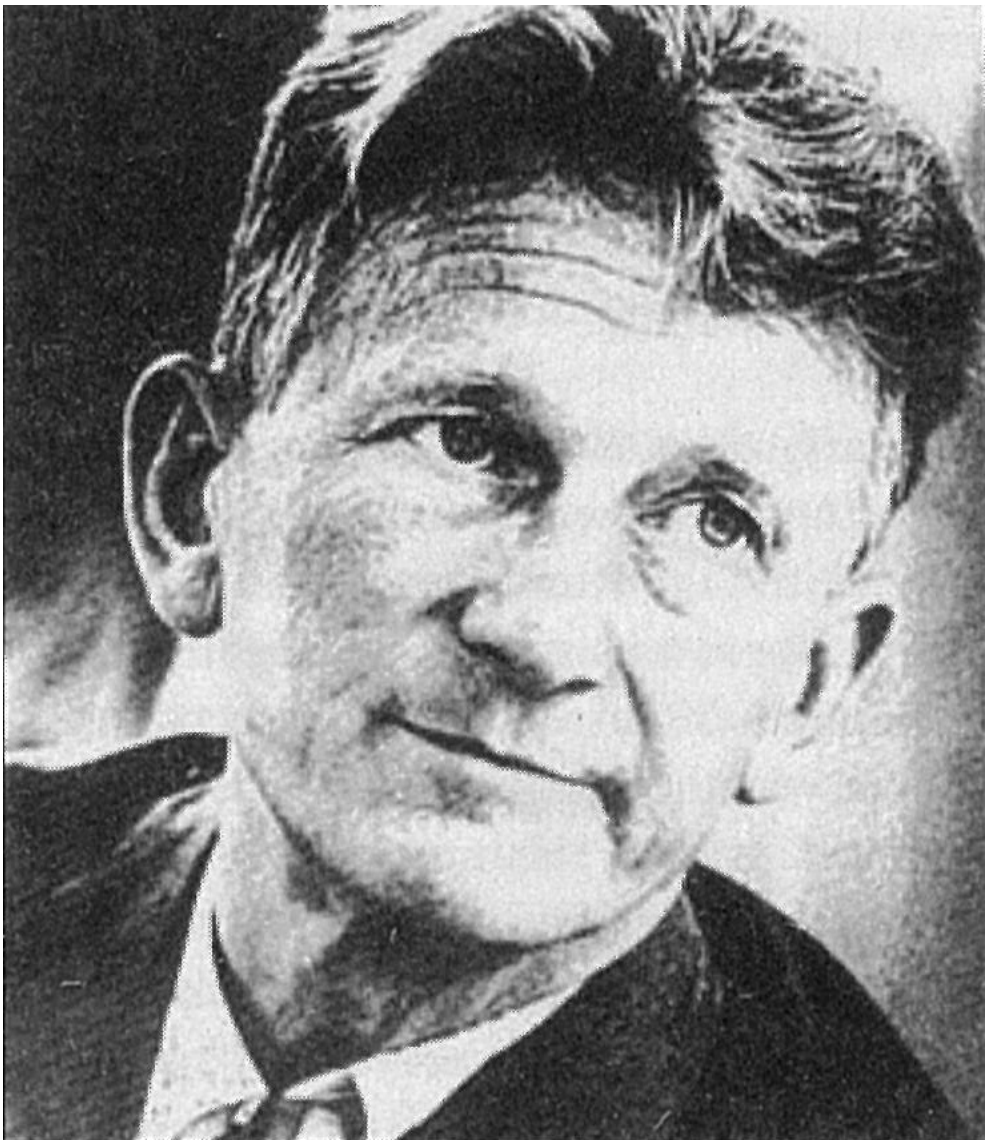
Nils A. Baas og Christian F. Skau

NTNU

Trondheim

©2008 Nils A. Baas og Christian F. Skau

Atle Selberg



Innholdsfortegnelse.

I. Forord

II. Fotografier fra intervjuet november 2005

III. Utskrift av lydbåndopptak

IV. Utskrift av videoopptak

V. Engelsk sammendrag

VI. Appendiks 1. Kopi av Hermann Weyls brev

VII. Appendiks 2. Kopi av brev til Sigmund Selberg

VIII. Appendiks 3. Diverse artikler knyttet til Selberg 90 årsdag og død

IX. Fotografier fra juni 2007 i forbindelse med Selbergs 90 årsdag

X. Familiebilder

Contents.

I. Preface

II. Photos from the interview november 2005

III. Transcription of the audio recording of the interview

IV. Transcription of the video recording of the interview

V. English translation of excerpts of the interview

VI. Appendix 1. Copy of Hermann Weyl's letters

VII. Appendix 2. Copy of the letter to Sigmund Selberg

VIII. Appendix 3. Various articles in connection with Selberg's 90th anniversary and his death

IX. Photos from June 2007 at the 90th anniversay celebration

X. Family photos

I
Forord.

I september 2005 kontaktet vi Atle Selberg om muligheten for å intervjue ham om hans liv og matematiske arbeider. Hans respons var svært positiv, og i november samme år intervjuet vi ham i Princeton. Vi hadde sendt ham spørsmålene på forhånd, og han hadde forberedt sine svar grundig.

Fredag 11. november 2005 gjorde vi et lydbåndopptak, og mandag 14. og tirsdag 15. november gjorde vi videoopptak. Det er utskriften av disse intervjuene som er samlet i dette kompendiet. Kun minimale redaksjonelle endringer er foretatt. Utskriften av lydopptaket leste han korrektur på sommeren 2006, og kom med en del rettelser og tilføyelser.

I intervjuet refererer Selberg til to brev som Hermann Weyl skrev til Nathan Jacobson om konflikten om det elementære beviset for primtallsatsen. Deler av disse er allerede blitt sitert i litteraturen og derfor finner vi det riktig å publisere dem i sin helhet. Selberg lot oss kopiere brevene, og vi har fått tillatelse til å offentliggjøre dem fra Michael Weyl - Hermann Weyls sønn. Disse er i appendiks 1. I de andre appendiksene er samlet diverse materiale som kan være av interesse.

Vi har også tatt med en engelsk oversettelse av sentrale deler av intervjuet. Intervjuet på norsk er publisert i 4 deler i *Normat* i 2008, og den engelske oversettelsen er publisert i *Bulletin of American Mathematical Society* i oktober 2008.

NTNU, Trondheim

14. mai 2008

Nils A. Baas

Christian F. Skau

I
Preface.

In September 2005 we contacted Atle Selberg about the possibility of interviewing him about his life and mathematics. His responce was very positive, and in November the same year we interviewed him in Princeton. We had sent him the questions in advance, and he had carefully prepared his answers.

Friday 11 November 2005 we made an audio recording, and Monday 14 and Tuesday 15 we made video recordings. It is the transcriptions of these tapes that we have collected in this compendium. Only minimal editorial changes have been made. The transcription of the audio interview was carefully reviewed, corrected and additions made by Selberg during the summer 2006.

In the interview Selberg refers to two letters that Hermann Weyl wrote to Nathan Jacobson regarding the controversy around the elementary proof of the Prime Number Theorem. Parts of these letters have already been quoted in the literature, and we therefore find it appropriate to publish them in full. Selberg let us copy the letters from his file, and gave us permission to use them as we saw fit. Michael Weyl - Hermann Weyl's son - has granted permission to publish these letters which may be found in Appendix 1. In the other appendices we have collected various material which may be of interest as well.

The full interview in Norwegian has been published in four articles in Normat in 2008. In this compendium we have also included an English translation of the most interesting parts of the interview. An edited version of this has appeared in the *Bulletin of the American Mathematical Society* in October 2008.

NTNU, Trondheim

14 May 2008

Nils A. Baas Christian F. Skau

II

XEROX
XEROX
XEROX

Fra høyre Atle Selberg, Nils A. Baas, Christian F. Skau

Bak til venstre Selbergs kontor (tidligere von Neumanns kontor), til høyre Langlands kontor (tidligere Einsteins kontor). Bildet er tatt foran Fuld Hall.

III

Utskrift av intervju med Atle Selberg basert på et lydopptak i Fuld Hall, Institute for Advanced Study, Princeton 11. november, 2005 ved Nils A. Baas og Christian F. Skau.

© 2007 Nils A. Baas og Christian F. Skau

Når ble du klar over at du hadde spesielle evner i matematikk?

Vel, jeg skal si dere at i grunnen den første tiden jeg husker, det var en gang – vi bodde da på Nesttun ved Bergen – jeg må ha vært en 7-8 år gammel, og vi var engasjert i et ballspill noen andre gutter og jeg. Jeg tror at det var en slags langball, og det er jo ofte da man har en del tid og ikke gjør noen ting, man står bare og venter. Da regnet jeg ofte ut forskjellige ting i hodet. Jeg drev og så på differansene mellom de forskjellige kvadrater oppover, og så at man fikk de ulike tall. Jeg greide å finne et bevis for det. Jeg regnet ikke med bokstaver den gangen, men ved å tenke på at mellom tallet og tallet pluss ett kvadrert, skjøt jeg inn produktet mellom tallet ganger tallet pluss ett, og da kunne jeg lett finne ut differansen for begge sider. Så jeg oppdaget da ved å addere de ulike tall oppover at fikk jeg kvadrater hele tiden, og jeg syns jo det var noe interessant. Litt senere så fant jeg også på samme måte, kan man si, at $A^2 - B^2$ er $(A + B) \cdot (A - B)$. Det kan gjøres på samme måte selvfølgelig ved å skyte inn AB mellom de to kvadratene. Da kan man se differansen til begge sider, og det siste hjalp meg jo ganske mye i hoderegning. Man kan forkorte en god del ting på den måten, særlig fordi kvadratene er ganske lette å huske ganske langt oppover.

Hvordan vil du sammenligne dette med at Gauss som barn adderte $1 + 2 + 3 + \cdots$ *osv. opp til* 100*, etter oppfordring av hans lærer?*

Det var noe bedre gjort.

Synes du det?

Ja, ja, det synes jeg var bedre gjort. Jeg er ikke så sikker på at jeg ville ha funnet på noe sånt. Men jeg forsøkte aldri å addere tallene opp til 100. Det var aldri noen som ba meg om å gjøre det.

Fortalte du dette til noen eller diskuterte du det med din far?

Nei, det gjorde jeg ikke. Det var en interessant erfaring som jeg faktisk kan huske den dag i dag. Det gjorde et stort inntrykk på meg at den lovmessighet jeg hadde greid å etablere, den holdt så å si generelt, ikke bare i eksempler. Først en del år senere begynte jeg å lese litt. Min far hadde i sin forholdsvis store matematiske boksamling også en del skolebøker, ikke bare fra Norge, men også fra Danmark. De danske bøkene var av høyere kvalitet enn de norske og var tydelig skrevet av bedre matematikere. Jeg så litt i skolebøker fra Danmark, og jeg lærte meg å løse kvadratiske ligninger med en ukjent, og lineære ligninger med flere ukjente – ved å eliminere, ikke med determinanter. Determinanter møtte jeg først mye senere og jeg må si jeg likte ikke noe særlig det med determinanter, men senere fant jeg at de kunne være ganske nyttige.

Så jeg begynte å lese. Jeg oppdaget* Störmers bifagsforelesninger. Min far hadde en nokså gammel utgave, en tidlig utgave som var håndskrevet. Jeg bladde

*Carl Störmer (1874–1957), norsk matematiker, professor i matematikk ved Universitetet i Oslo, 1903-1946

en del i den, og jeg kom over formelen

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

og det syntes jeg var veldig merkverdig, for jeg visste allerede hva π var i forbindelse med sirkelen. Så jeg bestemte meg til å finne ut hvordan dette hang sammen, jeg begynte å lese boken. Det var et under at jeg ikke ga opp fordi at den begynner med å innføre de reelle tall og bruker Dedekind-snitt. Jeg leste igjennom og kunne ikke begripe hva det skulle være godt for. Jeg syntes jeg hadde et ganske klart begrep om reelle tall som jeg tenkte på som desimaltall, desimaler, muligens uendelige desimaler.Jeg må si at jeg anser at Euler hadde utvilsomt et helt klart begrep om hva et reelt tall var, ingen grunn til å tro at det først kom med Dedekind. De kan like godt defineres på den måten: vi skriver ting opp i desimalsystemet og tenker oss at vi har uendelige desimaler. Denne innføringen av reelle tall i Störmers bifagsforelesninger kunne jeg ikke forstå hensikten eller nytten av, men jeg leste gjennom det, og etter at jeg var ferdig med det avsnittet, så begynte stoffet å bli interessant fra mitt synspunkt. Jeg synes fremdeles at Störmers bifagsforelesninger var meget gode, og det var en stor ulykke synes jeg at man i Norge innførte* Tambs Lyches lærebøker. På mange måter, av alt det jeg har lest var det kanskje den bok som betydde mest for min utvikling som matematiker.

I Störmers bifagsforelesninger der møtte du også kjedebrøk for første gang?

Kjedebrøk syntes jeg var interessant. Jeg fant jo ut at de blant annet hadde sammenheng med dette som av noen grunn kalles for Pells ligning. Den har jo i virkeligheten ingenting med Pell å gjøre. André Weil sa engang at hvis noe har fått navnet etter noen person, så hadde vedkommende som regel veldig lite med det å gjøre.

Hvor gammel var du da du begynte å lese Störmers bifagsforelesninger?

Jeg mener jeg begynte sommeren før jeg kom i 7nde klasse, så det må ha vært omkring da jeg fylte 12 år – noe før eller noe etter.

Du hadde vel ikke noe utbytte av matematikkundervisningen i skolen?

Jeg leste ingen geometri. De trigonometriske funksjoner møtte jeg først som potensrekker, og Eulers formler for sinus og cosinus ved e^{ix} og e^{-ix} møtte jeg først på den måten.

Men senere ble du mer interessert i geometri?

Bare når jeg kunne ha nytte av det, så og si. I hva jeg har gjort senere, har jeg til dels måttet bruke en del geometriske betraktninger. Jeg syntes det av og til var lettere å håndtere symboler, og å bruke analyse og sånt, selv om jeg var mer

*Ralph Tambs Lyche (1890–1991), norsk matematiker, professor i matematikk ved NTH, Trondheim, 1937-1949, og ved Universitetet i Oslo 1950-1961

interessert i anvendelse på diskrete problemer. Jeg var aldri så særlig interessert i generell funksjonsteori. Jeg likte de spesielle funksjonene, elliptiske og automorfe funksjoner, for eksempel, og særlig modulfunksjoner og modulformer og lignende. Den generelle analytiske funksjonen syntes jeg var omtrent så interessant som det generelle reelle tall. Man er i grunnen ikke så særlig interessert i det. Proletariatet av alle reelle tall er ikke så interessant på en måte, selv om det kan være vanskelig å finne ut av deres natur, om de er irrasjonelle eller algebraiske eller hva de nå kan være. For eksempel Eulers konstant, det er enda ingen som vet noe om dens natur.

Hva med Riemannske flater?

Selvfølgelig, da jeg leste funksjonsteori kom jeg bort i Riemannske flater, men jeg var mer interessert i algebraiske Riemannske flater enn det helt generelle begrepet, og i uniformiseringsteori og automorfe funksjoner.

Hang din interesse for automorfe former sammen med din oppdagelse av Ramanujans arbeider?

Jo, jo, dette startet med Ramanujan. Det var min første kontakt med det, og det var ikke generelle automorfe funksjoner eller generelle grupper, men til å begynne med var det modulgruppen, og den klassiske modulfunksjonen som knytter seg til den, og til undergrupper av endelig indeks, som jeg studerte.

La meg gå litt tilbake i tid:

Først var det mest analyse som interesserte meg, men min bror Sigmund fikk mine interesser til å skifte mot tallteori. Ikke mot diofantiske ligninger som han beskjeftiget seg med i gymnasiealderen og i sin tidlige studietid – det appellerte aldri til min fantasi – men han gjorde meg oppmerksom på en bok i min fars bibliotek som hadde et avsnitt om Tchebycheffs arbeider om primtallenes fordeling. Dette leste jeg og dermed var jeg festet for livet til dette området. Det var også Sigmund som brakte hjem Ramanujans Collected Works fra universitetsbiblioteket i ferien. Dette var noe etter Störmers artikkel om Ramanujan i Norsk Matematisk Tidsskrift – en artikkel jeg også leste. Alt dette fanget min interesse og gav meg støtet til å studere og arbeide med diskontinuerlige grupper, modulfunksjoner og modulformer, og mer generelle automorfe funksjoner og former. Disse ting har alltid vært min hovedinteresse senere i livet.

Sigmund var faktisk den eneste som jeg diskuterte matematikk med mens jeg var i Norge. Det var andre som var hjelpsomme på sin måte, min bror Henrik og professor Störmer, først og fremst. Henrik maskinskrev min første avhandling da jeg kom til Oslo høsten 1935. Han skrev også inn formlene – min håndskrift var ikke god nok mente han – og introduserte meg til Störmer, som så fremla avhandlingen i Videnskapsakademiet samme høst.

La oss vende tilbake til skolen: fulgte du den vanlige undervisningen der?

Jeg leste noe språk på egen hånd. Jeg begynte å lære litt engelsk mens jeg alt var i folkeskolen. Jeg hadde funnet en kopi i min fars bibliotek – ikke den matematiske

del av det – av "Alice in Wonderland", så jeg ble interessert i illustrasjonene, og skulle gjerne kunne lese den. Jeg begynte med å sitte med en ordbok og oversette ord for ord. Det var veldig besværlig selvfølgelig, men jeg fikk av og til en eldre søster til å lese og oversette for meg. Det var min eldste søster Anna som gjorde det, og det var jo svært snilt av henne å gjøre det. Jeg vet ikke om hun var noe særlig interessert i boken.

Kan du fortelle om din første oppdagelse i matematikk som resulterte i et arbeide?

Den første oppdagelse var jo dette med differansen av kvadrattallene! Jeg leste jo en hel del i de forskjellige bøker, og gjorde ikke noen oppdagelse som er noe å snakke om. Det var enkelte ting, jeg fant en forbindelse mellom integralet

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x}$$

og rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Det er jo et forholdsvis enkelt bevis hvis man har lært hva gammafunksjonen er og Eulers integral for gammafunksjonen. Da er det en enkel formel å vise.

Hvor gammel var du da?

Det var en del senere. Jeg var 15 år gammel, kanskje.

Den oppgaven sto i Norsk Matematisk Tidsskrift i 1932, så du var 15 år gammel.

I 1932? På hvilken tid av året? Jeg vet ikke presis hvor lang tid det tok før den kom der. Det var ikke jeg som sendte den inn, det må ha vært min far som sendte den. Den kan jo også generaliseres til en mer generell form.

Kan du fortelle om den oppdagelsen du gjorde da du leste om Ramanujans og Hardys arbeid med partisjonfunksjonen?

Det var det som ledet til min første avhandling, "Uber einige arithmetische Identitäten". Jeg beskjeftiget meg en del med Ramanujans såkalte mock theta funksjoner. Det var en engelsk professor – G. N. Watson – som hadde skrevet om 3dje og 5te orden som Ramanujan hadde kalt dem, og viste relasjonene mellom disse. Ramanujan hadde også innført noe som han kalte mock theta funksjoner av 7ende orden, og ved å utnytte en del av de tingene jeg hadde som førte til den første avhandlingen, så greide jeg å bevise at det hadde den nødvendige egenskapen som han definerte, den at de approksimertes ved irrasjonale punkter, som man kan uttrykke det, på enhetssirkelen, altså at de approksimertes like bra som en modulform. Så begynte jeg å se på denne avhandlingen om "partitions", og jeg fant jo den eksakte formelen, men det var en skuffelse. Poenget var at jeg så etter i Zentralblatt og leste anmeldelsen som sto om min første avhandling. Jeg hadde gjort ferdig dette om partisjonsfunksjonen sommeren i 1937. Da jeg kom til Oslo og så i Zentralblatt der,

fant jeg et referat om min første avhandling, men på samme side sto Rademachers arbeide referert. Nå hadde jeg en ting som Rademacher ikke hadde, og det var at jeg hadde et mye enklere uttrykk for disse koeffisientene som opptrer i denne rekken. Det var også noe Ramanujan ville ha gjort hvis han hadde vært ved sine fulle krefter da dette pågikk, fordi den inverse av denne funksjonen som genererer partisjonene, er jo i virkeligheten bare en thetafunksjon, og den enhetsrot som oppstår i transformasjonsformelen foran thetafunksjonen kan alltid uttrykkes som en slags gaussisk sum. Hvis man gjør det, er det klart at rekken for partisjonsfunksjonen transformeres ved den inverse enhetsrot og konjugering. Hvis man gjør det, og setter det inn i denne definisjonen for disse koeffisientene, som betegnes $A_q(n)$, for partisjonsfunksjonen $P(n)$ for ledd nr. q i rekken, så får man en ganske enkel rekke som viser størrelsesordenen for disse koeffisientene. Konvergensen av rekken er åpenbar, men altså dette er noe som på en måte burde vært gjort av Hardy og Ramanujan, men jeg tror at Hardy hindret det endelige resultat, for Ramanujan hadde allerede vært inne på den riktige formelen tidligere i disse brev han skrev fra India til Hardy før han kom til England. Men på den tid avhandlingen ble skrevet, var det ingen tvil om at Ramanujan ikke var frisk. Han led antagelig av vitaminmangel, han ernærte seg bare på ting han fikk sendt fra India. Han hadde ikke frukt eller grønnsaker eller slike friske ting, bare slike ting som kunne tørkes. Han led åpenbart av ganske alvorlige ernæringsmangler.

Kan du fortelle om denne skuffelsen da du oppdaget at Rademacher hadde gjort dette?

Jeg bestemte meg til å ikke publisere dette med koeffisientene. Jeg syntes det var for lite til å skrive noe om. Men jeg bestemte meg til å gjøre noe annet, og hva jeg så bestemte meg til, var dette som jeg snakket om på den Skandinaviske Kongress i Helsingfors i 1938 (de sa Helsingfors på den tiden). Det var et kort foredrag på vel 20 minutter. Det var den første forelesning jeg noen gang har holdt. Jeg møtte jo en del matematikere der, for eksempel møtte jeg Lindelöf den gang, og Carleman var der. Carleman presiderte da jeg holdt mitt foredrag og var meget velvillig, får jeg si, og Harald Bohr var også svært vennlig mot meg. Det som ellers gjorde mest inntrykk på meg på den kongressen, var et foredrag som Arne Beurling ga, det gjorde et stort inntrykk på meg. Det hadde i seg ganske mange ting, blant annet snakket han en del om sine generaliserte primtall og generaliseringen av primtallsatsen i den forbindelsen. Dette gjorde et stort inntrykk på meg. Jeg hadde i 1939 fått et stipendium, et reisestipendium, som jeg hadde tenkt å reise til Hamburg for. Et foredrag som Erich Hecke hadde holdt i Oslo i 1936 under verdenskongressen, gjorde et stort inntrykk på meg. Jeg gikk ikke på det foredraget, jeg hadde ikke vett nok til det, men så det senere da kongressberetningen kom ut. Det var det som gjorde størst inntrykk på meg av alt i hele kongressberetningen må jeg si. Så jeg ville ha reist til Hecke. Jeg gjorde meg ferdig med hovedfag våren 1939, og jeg hadde gjort meg ferdig med første del av militærtjenesten sommeren 1939. Jeg hadde jo avsluttet mine studier, så det

var rimelig å prøve å reise ut noe sted, men krigen brøt ut akkurat som jeg hadde sluppet ut av militærtjenesten denne sommeren, og jeg ville ikke dra til Hamburg. Så jeg tenkte at jeg ville dra til Uppsala. Jeg hadde hørt at de hadde et veldig bra matematisk bibliotek i selve Matematiska Institutionen.

I Oslo var det jo på den tiden svært besværlig. De hadde ikke mye bøker på Blindern. Tidsskrifter og sånt, det var svært lite, man måtte ned på universitetsbiblioteket på Drammensveien, og fikk ikke lov til å gå inn og lete etter ting selv, men vi måtte se i katalogen og bestille, så det var mye bedre i Sverige. Universitetsbiblioteket lå veldig ubekvemt til for de på Blindern, det var ganske mye besvær å komme dit. Så jeg dro til Uppsala da istedet og tenkte at Beurling ville være der, men det viste seg at han var blitt innkalt til militærtjeneste for å tjene ved kryptografiavdelingen, eller chifferavdelingen som de sa der, og hvor han under krigen gjorde et stort arbeid faktisk. Han var en stor begavelse i den retning. Jeg traff Beurling bare en gang mens jeg var der. Det var en søndag da jeg var alene i biblioteket på Matematiska Institutionen og satt og arbeidet, så kom Beurling. Jeg kjente han fra kongressen i Helsingfors året før, og jeg snakket med han da, men ellers hadde jeg ingen nytte av han. Han var der simpelthen ikke. Nagell var der. Han holdt noen forelesninger som jeg gikk på, men for det meste satt jeg i biblioteket, og det var et meget godt bibliotek. De hadde masse tidsskrifter der, så jeg hadde mye mer tilgang til litteratur enn jeg ville hatt i Oslo – jeg mener lett tilgang til litteraturen. I Oslo var det som sagt mer komplisert den gangen å få fatt på tingene.

Når begynte du å bli interessert i Riemann-hypotesen, var det på den tiden?

Nei, det kom senere. Det var etter krigshandlingene i Norge i 1940. Jeg hadde også en annen skuffelse må jeg si. Da jeg kom til Uppsala, så jeg et arbeide der hvor jeg lærte noe som jeg ikke hadde visst om. Jeg hadde nemlig ikke hatt noe kjennskap til hyperbolsk geometri, og spesielt hadde jeg ikke hørt om målet

$$\frac{dx\,dy}{y^2}$$

som er det invariante mål i den hyperbolske geometrien i det øvre halvplan, og det fant jeg ut ved å se på et av de tyske tidsskrifter som kom. Så gikk det et lys opp for meg at jeg kunne gjøre noe som jeg hadde gjort på en dårligere måte for modulgruppen i min hovedoppgave, og jeg satte meg ned og jeg skrev et arbeide, et manuskript om det som i dag kalles for Rankin-Selberg konvolusjonen. Hvis du har to modulformer kan du danne en Dirichlet-rekke hvis koeffisienter er produktet av de tilsvarende koeffisienter av de to modulformer, og den har da en viss funksjonalligning. Jeg ga beviset for funksjonalligningen og trakk en del konsekvenser som jeg ikke ga hele beviset for, men bare skisserte. Jeg ventet til etter at jeg var kommet tilbake til Oslo, så først på våren ga jeg dette manuskriptet videre.

Jeg kom tilbake i slutten av desember 1939, og jeg bestemte meg til ikke dra tilbake fordi Uppsala var veldig ufyselig om vinteren. Det var tiltalende der

tidligere på året, men forferdelig mye vind. Om vinteren, når det faller snø så blir det fort det man kaller snøslaps, så det var vanskelig å holde seg tørr på føttene. Jeg likte ikke denne vinden heller. Oslo var mye bedre, hadde mye bedre vinterklima. Oslo var kaldere, men mye mer tiltalende. I Oslo var det mer solskinn om vinteren, ikke så mye vind, så jeg bestemte meg til ikke å dra tilbake til Uppsala, men å bli i Oslo om våren.

Det var ut i mars at jeg så i Zentralblatt, at det var et arbeide av Rankin som var referert. Han hadde egentlig ikke definert en konvolusjon av to funksjoner. Han opererte bare med en funksjon og kvadratene av koeffisienten til den, så det var mer spesielt. Han hadde trukket noen konsekvenser av dette. Det som han hadde gjort hadde bare anvendelser på modulformer av samme vekt eller automorfi-faktor, mens det som jeg hadde definert kunne også brukes til to former av forskjellig vekt. Min idé der var noe mer generell enn hans, men han var utvilsomt først ute. Selv om jeg hadde levert inn min avhandling til Störmer, sendt fra Uppsala, så ville det allikevel være så at prioriteten var Rankins. Han hadde, som jeg kunne se av hans manuskript, gjort det ferdig om våren, mens jeg gjorde det ferdig om høsten.

Så det var en skuffelse igjen?

Det var en skuffelse må jeg si. På den tid kom* Siegel på gjennomreise til Oslo, og ga et foredrag som jeg hørte på, det gjorde en del inntrykk på meg. Jeg hadde ikke hørt på ham på kongressen i Oslo. Jeg hadde manglende kunnskap om hva jeg burde høre på. Jeg hadde hørt på en del andre, Mordell og Polya blant annet. Det var de to foredrag jeg likte best av de jeg hørte. Jeg må si at min bror Henrik hadde også noen ganger fått meg inn for å hjelpe å fylle auditoriet, når det syntes å være for få tilhørere. Så jeg hadde hørt på en del ting som jeg absolutt ikke hadde noen interesse av å høre på, men han hadde vært hjelpsom på så mange andre måter, så jeg skal ikke klage.

Så kom jo krigen til Norge i begynnelsen av april 1940, og det ble et avbrudd. Jeg tenkte ikke på matematikk mens jeg deltok i felttoget i Gudbrandsdalen,† og heller ikke da jeg var i fangeleir på Trandum etterpå. Da jeg endelig kom ut, reiste jeg vestover i ferien, og senere med familien til Hardanger. Jeg hadde lyst til å begynne med noe nytt. Jeg kom først over et arbeide av Polya, "Über ganze ganzwertige Funktionen", hvor Polya hadde skjerpet littegrann et resultat av Hardy. Jeg så på dette, og så at jeg kunne skjerpe det en hel del mer, og så skrev jeg et arbeide som dreide seg om hele funksjoner som tar heltallige verdier for positive hele tall. Polya hadde også et annet arbeide om hele funksjoner som tar heltallige verdier for alle hele tall, positive og negative. Så jeg så at jeg kunne

*Siegel forlot Norge med båt til USA bare dager før den tyske invasjonen av Norge den 9nde april, 1940.

†Vi var forresten noe over i den øvre delen av Østerdalen også, og endte opp nede nær Åndalsnes. Jeg deltok i major Hegstads feltartelleribataljon, og jeg fikk meget stor respekt for ham

gjøre samme forbedring der. Jeg skrev også et tredje arbeide om hele funksjoner som antok heltallige verdier, men også hvor de deriverte opp til en viss orden også antok heltallige verdier.

Mitt fokus skiftet nå mot Riemanns zeta-funksjon $\zeta(s)$. Dersom s er reell og større enn 1, så viste Euler produktformelen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \epsilon \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

der $\mathcal{P}$ betegner primtallene. Riemann viste at $\zeta(s), s = \sigma + it$, kunne utvides til en meromorf funksjon i det komplekse plan $\mathbf{C}$, med en enkel pol i $s = 1$, og med såkalte trivielle nullpunkter i $-2, -4, -6, \cdots$. De ikke-trivielle nullpunktene ligger i den kritiske stripen $0 < \text{Res} < 1$, og Riemann's formodning – også kalt for Riemann-hypotesen – sier at alle ikke-trivielle nullpunkter ligger på den kritiske linjen $\text{Res} = \frac{1}{2}$. Jeg begynte da å tenke på en idé jeg hadde om å prøve å vise eksistensen av nullpunkter til Riemanns zetafunksjon på den kritiske linjen ved å betrakte visse momenter; ikke momenter av zetafunksjonen, men ved å betrakte integraler av denne reelle funksjonen som man kan få når man bruker den symmetriske form av funksjonalligningen

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

der Γ betegner gammafunksjonen. Da får man en funksjon som er reell på den kritiske linjen. Ved å ha en viss funksjon og potenser av den ved siden av, og så se på tegnvekslingen av disse momentene, kan man si noe om nullpunktene på linjen. Jeg kunne gjøre en del der, men det ga ikke så skarpe resultater som de som var kjent av Hardy og Littlewood. Jeg så litt på deres arbeide, og så hva som var grunnen til at de ikke kunne få bedre resultater enn de hadde. Jeg oppdaget, får jeg si, det som var grunnfeilen i deres arbeide, og hva de hadde misforstått. De hadde noen betraktninger på slutten av sin avhandling hvor de viser at

$$N_0(T) > \text{konstant} \cdot T$$

der $N_0(T)$ er antall nullpunkter på den kritiske linjen mellom 0 og T. Det hadde å gjøre med variasjonen av argumentet, men det syntes klart for meg at det kunne ikke være rett. Jeg så på det, og det man skulle gjøre var heller at man skulle prøve å avdempe svingningen fordi den var en sterkt oscillerende funksjon, denne reelle funksjonen som man får på linjen. Den har svært varierende amplituder, noen steder er svingningene svært små og andre steder er de svært store. Når de siden betrakter disse integraler av kvadrater, som de tar over korte intervaller og så tar gjennomsnittet over et langt intervall, så er det disse områdene, når intervallet blir for kort og hvor amplitudene blir veldig store, som dominerer og gjør at man ikke får vite noe om gjennomsnitts-oppførselen av funksjonen, men rett og slett noe om hva som hender når amplituden er veldig stor. Så fant jeg på å prøve å

dempe og normalisere slik at de skulle bli noe større der de var små og noe mindre der de var store. Det første jeg prøvde var å ta en seksjon av Eulerproduktet og så ta kvadratroten av absoluttverdien. Det ga et resultat som jeg sendte i en liten note til Videnskapsselskabet i Trondheim. Så begynte jeg å eksperimentere ved å ta istedet approksimasjonen av rekken som man får ved å se på en seksjon av Dirichlet-rekken for $(\zeta(s))^{-1/2}$ og dempe koeffisientene ned så de blir null for $n \geq z$, og så bruke kvadratet av absoluttverdien av dette som vår dempningsfaktor på linjen $s = \frac{1}{2} + it$. Det viste seg at jeg fikk bedre og bedre resultater inntil jeg fant at den beste måte å trappe ned koeffisientene var å multiplisere de med faktoren $(1 - (\log n)/(\log z))$ for $n < z$, altså

$$\sum_{n \leq z} \frac{\mu(n)}{n^s} \cdot \frac{\log z/n}{\log z}$$

Da fikk jeg den korrekte størrelsesorden for $N_0(T)$ forholdsvis fort.

Det tok en del arbeide å oppskatte disse summene som opptrådte i integralene, men det gikk jo med litt tålmodighet, så da fikk jeg det resultatet at det var større enn konstant ganger $T \log T$, som var riktig størrelsesorden. Jeg prøvde ikke å regne ut noen konstant, og hvis jeg ville ha regnet ut en konstant så ville jeg ha modifisert bevisene for å få en bedre konstant. Jeg tror man kan, hvis man modifiserer det på den riktige måten, oppnå noe som ligger nærmere en tiendedel og en tyvendedel av nullpunktene. Jeg har aldri gått igjennom beregningene.

Den artikkelen du sendte til Videnskabsselskabet i Trondheim, hadde den det riktige leddet

$$konstant \cdot T \log T?$$

Under korrekturlesningen hadde jeg gjort ferdig beviset, og jeg satte det til som en fotnote.

Dette ble din doktoravhandling?

Det var det jeg valgte som doktoravhandling. Jeg hadde jo publisert en god del arbeider på den tiden, men jeg hadde den idé at en doktoravhandling burde være en mer vektig ting, ikke så veldig kort, men noe som hadde en hel del sider, og denne hadde bortimot 70 sider. Så jeg skrev det opp, og ga det inn som doktoravhandling.

Dette var under krigen, under okkupasjonen av Norge. Ble det kommunisert til Harald Bohr i Danmark? Det var jo et sensasjonelt resultat!

Det var Störmer som fremla det i Videnskapsakademiet, selvfølgelig. Som opponent var Harald Bohr selvskreven, for det var jo ingen i Norge som var noe særlig kompetent på dette området. Andre opponent var Skolem, som hadde strevet med dette her, selvfølgelig. Det var jo ikke riktig i hans felt får man si. Harald Bohr ville naturlig nok ikke komme til Norge på den tid. Norge var jo okkupert, og Bohr hadde flyktet fra København allerede.

Var han i Sverige?

Han var i Sverige. Niels Bohr var selvfølgelig allerede i USA på den tiden.

Hvordan foregikk da disputasen?

Störmer leste Harald Bohrs rapport, og Skolem hadde forbedret min engelsk. Det hadde han for så vidt rett i, jeg hadde forholdsvis nylig skiftet over til engelsk. Jeg syntes ikke jeg ville fortsette å skrive tysk. Tysk var mitt beste språk på den tiden, men jeg begynte å lese mer engelsk litteratur, særlig Hardy og Littlewood.

Senere så kom jo noen forbedrede resultater av Norman Levinson, bygde han essensielt sett på dine metoder og teknikker?

Han brukte jo den dempningsfaktor som jeg hadde introdusert, men på en annen funksjon. Hans bevis gir jo en forholdsvis bra konstant, men problemet var at det fungerer bare for zetafunksjonen og for de såkalte Dirichlets L-funksjoner der man har en funksjonalligning som er veldig enkel. Hvis man går til kvadratiske kropper, eller til de L-funksjoner som man kan få fra modulformer som har Eulerprodukt, så kan man også bevise resultater ved min metode som ikke fås ved Levinsons metode. Dette fordi du ved Levinsons metode får resultat som er en differans mellom to ting, og spørsmålet er om det som du trekker fra er lite nok til at det blir noe igjen. Du må ha en svært god oppskatning på det, og det får du bare når funksjonalligningen er svært enkel. Det nytter ikke for de kvadratiske tallkropper, for eksempel. For høyere tallkropper kan en ikke bevise noen ting, for funksjonalligningen er for komplisert til at man kan betrakte disse integralene som skal beregnes.

Du disputerte høsten 1943?

Ja, det er riktig, disputasen var i høsten ′43*.

Du ble som universitets-stipendiat i Oslo arrestert av tyskerne høsten 1943, like etter din disputas, men så slapp du jo fri. Ble da din arbeidssituasjon vanskeligere?

Særlig etter at universitetet var stengt. Jeg ble løslatt etter at jeg hadde vært arrestert, og sikkerhetspolitiet sa at jeg skulle ikke dra tilbake til Oslo, men til mitt hjemsted Gjøvik hvor mine foreldre bodde. Så jeg tilbrakte resten av krigen der og arbeidet der, bortsett fra noen ganger jeg reiste vekk i ferien, men ikke til Oslo. Et par ganger reiste jeg ned til Oslo for å konsultere litteratur på universitetsbiblioteket, men for å gjøre det måtte jeg ha polititillatelse.

I den tiden arbeidet du da videre med Riemann-hypotesen, eller skiftet du tema?

Jeg arbeidet en del med zetafunksjonen og visse andre problemer. Jeg skrev to større arbeider som var omtrent så store som min doktoravhandling. Et om zetafunksjonen, og det handlet om mulige nullpunkter utenom linjen, og et som behandlet tilsvarende problemer for Dirichlets L-funksjoner, men ikke presist det

*Disputasen fant sted 22. oktober, 1943. Universitetet i Oslo ble stengt av tyskerne 30. november, 1943.

analoge problemet, for det synes jeg var for trivielt, men man kunne gjøre analogier. Det var en engelsk matematiker, Paley, som hadde begynt å betrakte noe som han kalte "k-analogues". Men hvis man betrakter alle L-funksjoner som hører til modulen k, så er det en viss analogi med hva man har for en enkelt funksjon, når man betrakter dens oppførsel når den imaginære delen varierer på linjen. Så jeg skrev ned en del av disse analogier, jeg forbedret noen av resultatene til Paley, og brukte disse forbedringene. De var skarpe nok til at jeg kunne gjøre analogier til andre resultater, til de som jeg hadde oppnådd i min doktoravhandling. Om

$$h = \frac{\varphi(k)}{\log k},$$

hvor $\varphi(k)$ er en funksjon av k som går mot ∞, når k går mot ∞, og $|T| < k^a$, hvor a er en viss positiv konstant, så har "nesten alle" L-funksjoner for modulen k et nullpunkt på linjen $s = \frac{1}{2} + it$ i intervallet $T < t < T + h$. Det fører videre til en del resultater om verdifordelingen av L-funksjonene som jeg fikk senere, og også for verdifordelingen for zetafunksjonen både på og i nærheten av linjen.

Er det slik at den måten du betraktet zeta-funksjonen på, var ny? Og at det var på den måten du klarte å bevise disse resultatene?

Det er riktig at det var ingen andre som hadde tenkt på å innføre noen dempningsfaktor på denne måten. Noe hadde vært brukt i forbindelse med å betrakte nullpunkter utenfor den kritiske linjen, det hadde vært gjort noe av Bohr og Landau, men det hadde ikke noen særlig interesse. Det var svakere resultater. Det var en svenske, Fritz Carlson, som beviste de første virkelige såkalte "density" resultater om nullpunkter av zeta-funksjonen utenfor den kritiske linje. Han brukte en seksjon av Dirichletrekken for $(\zeta(s))^{-1}$, det vil si en endelig sum, hvor man hadde Möbiusfunksjonen $\mu(n)$ som koeffisient, opptil en viss grense, og multipliserte zetafunksjonen med dette. Det bringer den til gjennomsnittlig å ligge nokså nær 1 når realdelen av den variable er større enn 1/2. Så han beviste noen resultater der, som var betydningsfulle, og det var de første såkalte "density" resultater.

Det var ingen som hadde prøvd å gjøre noen ting på selve linjen, dvs. realdelen lik en halv. For det første, fordi det var atskillig vanskeligere, men for det andre skulle jeg tro at det var kanskje ikke noen som hadde tenkt at det var noe særlig nytte i det. Jeg må si at jeg begrep jo nokså tidlig da jeg begynte med det, at en dempningsfaktor kunne være svært effektiv, og det viste seg at den kunne være mer effektiv en jeg først tenkte, for jeg hadde egentlig ikke trodd at jeg skulle oppnå dette skarpe resultat som jeg fikk, da jeg fikk den riktige størrelsesordenen av nullpunkter på linjen. Jeg hadde ikke trodd at metoden ville lede riktig så langt. Det viste seg at det trengtes ikke så mye eksperimentering for å finne den riktige dempningsfaktor. Det tok meg ikke særlig lang tid å komplettere det, men det ble ganske komplisert, regningene med å utføre alle oppskatningene. Det kan gjøres noe enklere hvis man bruker Fourieranalyse, som Titchmarsh gjorde litt senere, noe etter krigen. Men hans bevis var også komplisert. Han sendte det til meg,

og jeg gjorde ham oppmerksom på noen forenklinger han kunne gjøre. Så det ble atskillig kortere da han publiserte det, men jeg tror at for å finne en god numerisk verdi, så er ikke Fourierintegralet den beste metoden. Da skal man heller gjøre en modifikasjon av den metoden som jeg brukte.

Er det ikke riktig at din metode, kanskje også andres metoder, er av en gjennomsnittlig statistisk karakter, slik at ingen av dem kan lede til et bevis for Riemann-hypotesen?

Ved å betrakte den statistiske metode kan man komme ganske langt, men den vil aldri kunne lede til et bevis for Riemann-hypotesen. Jeg nevnte at man kunne bruke den til å undersøke verdifordelingen av zeta-funksjonen på linjen og også i nærheten. Jeg oppnådde en del resultater om det like før og like etter at jeg kom til Princeton, men jeg publiserte dem ikke den gang fordi jeg var mer opptatt av hva jeg kunne gjøre med disse elementære metoder i tallteori, min versjon av såldmetoden.

Vi snakket med deg tidligere om at du skulle ha antydet i ditt foredrag ved den 10ende Skandinaviske kongress i matematikk, København 1946, at Riemann-hypotesen ikke var riktig, men det tilbakeviste du jo klart.

Hva jeg ville fremheve ved mitt foredrag i København, var at det fantes ikke mye av hva man kunne kalle numerisk evidens for den, fordi at regningene gikk på den tid så kort at om det hadde vært noen unntagelser så skulle en ikke ventet at de ville ha kommet så tidlig. For det første, hvis man ser på Riemann-Siegel formelen for funksjonen på halvlinjen, så er det så langt som regningen gikk den gang, at den gikk litt over imaginær del lik 1000. Det er veldig få ledd som kommer med der ved disse beregningene, og funksjonen oppfører seg uhyre regulært. Man hadde jo den ting som ble fremsatt av danske Gram, den såkalte Grams lov, og så langt som regningene gikk var det to unntagelser til Grams lov. Grams lov ville ha medført at Riemanns hypotese var riktig, men den ville også ha innført alt for stor regularitet for fordelingen av nullpunktene. Jeg visste ut fra de resultatene jeg hadde oppnådd i de arbeidene jeg hadde skrevet tidligere at Grams lov etter hvert ble mer og mer gal. Istedenfor å ha et par unntagelser så ville det etter hvert bli nærmere unntagelsen når den holdt. Som jeg sa så var det å vente at de første nullpunkter, om det var noen andre enn de på linjen, så ville de kommet et langt stykke etter de første unntagelser til Grams lov. Så det numeriske materialet tyder i grunnen ikke spesielt på hva som var riktig, og andre resultater var bare av statistisk art. Men jeg må si at hvis man tror at det er noen ting i denne verden som er som det skal være, så synes jeg det er riktigheten av Riemanns hypotese. Den gir den beste fordeling av primtallene, og også den man i grunnen skulle vente statistisk sett, nemlig at avvikelsene fra

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

ikke er stort større enn kvadratroten av x. Det vil medføre en eleganse som er slående. Dessuten vil jeg si at jeg hadde en sterk tro på Riemanns intuisjon.

Men forventer du at det er en slags regularitetsstruktur av nullpunktene på linjen?

Det er utvilsomt en viss lovmessighet, men hvor langt det går er det vanskelig å gjette på. For eksempel, man kan reise spørsmål om imaginærdelene av nullpunktene er på noen måte forbundet med andre matematiske konstanter som vi har allerede. Det er det ingen som vet noe om selvfølgelig, men det er ikke umulig må jeg si. Jeg anser det ikke som helt umulig at det kunne være en hel del lovmessighet som ville være helt uventet, og som det gjenstår å oppdage. Det kan godt være. Jeg mener, det er ingen grunn til å tro at vi er så veldig langt henimot hva som kan gjøres i fremtiden engang. Det er nok alltid mulig at det kan finnes nye måter å se det på og som leder til helt uventede sammenhenger.

Var du den første som tok i bruk spektralteoretiske metoder?

Jeg vet i grunnen ikke det. Det har vært forsåvidt fra gammelt av en del folk som hadde gjettet på at kanskje nullpunktene hadde en forbindelse med et spektralproblem av en eller annen art, men kunne ikke peke på noe bestemt. Men jeg tror at det er lite nyttig i å spekulere hvor snart man kommer opp med noen positiv ide om hvordan man kan angripe og oppnå noen nye resultater. Det vil nok komme noen gang, tror jeg, men hvor lenge en må vente – eller dere må vente – er vanskelig å gjette selvfølgelig.

Men om du skulle gjette, ville du tro at et idé-kompleks hvor man studerer et spektralproblem på et eller annet rom, som man ennå ikke vet hva er, at det er noe slikt som eventuelt ville føre til en løsning?

Det er en tanke som flere folk har vært inne på. Det har vært noen som har kunnet konstruere et rom, hvis de antar at Riemanns hypotese er riktig, hvor de kan definere en operator som er relevant. Vel og bra, men det gir jo i grunnen ingen ting selvfølgelig. Det hjelper ikke mye hvis man må postulere resultatene i forveien – det er ikke mye verdi i sånt.

Har du selv arbeidet seriøst med Riemann-hypotesen i de siste 30 årene?

Vel, jeg har tenkt på den fra tid til annen. Det var en gang jeg hadde en idé som jeg tenkte kanskje kunne ha ledet til et bevis. Jeg fulgte den et stykke på veien, men jeg syntes det var litt usannsynlig at det skulle lede frem. Den ville bare gitt Riemann-hypotesen for zetafunksjonen $\zeta(s)$ og for noen av Dirichlets L-funksjoner, men ikke for alle. Jeg har aldri prøvd å fullføre beviset. Idéen berodde på at jeg hadde funnet en måte å approksimere $\varphi(s)\zeta(s)L(s)$, hvor $L(s)$ var en L-funksjon med kvadratisk karakter χ slik at $\chi(-1) = -1$, og $\varphi(s)$ er en hel analytisk funksjon som gjør produktet reelt på linjen $s = \frac{1}{2} + it$, med polynomer som konvergerer mot $\varphi(s)\zeta(s)L(s)$. Det at polynomene hadde symmetrien bygget inn kunne gi håp om at man kunne gjøre noe ad denne vei. Spørsmålet var hva man kunne si om nullpunktene til disse polynomene. Men etterhvert ble jeg mer og mer overbevist

om at det ikke kunne fungere som jeg først hadde tenkt. Det virket så usannsynlig på meg. Men jeg har sett av og til at folk har angrepet et problem på en måte som syntes "hare-brained", for å bruke et engelsk ord, men så viste det seg at man kunne få det til å virke. De har bevist ett eller annet som man ikke lett kunne bevise på annen måte. Og på samme måte har jeg sett folk ha idéer som syntes virkelig strålende og briljante, men det eneste problemet var at når man følger det til enden, så kunne man ikke få noe ut av det likevel. Så det kan virke begge veier: noen ganger fungerer en god idé ikke, og hva som synes en dårlig, idiotisk idé kan faktisk fungere.

Har du kommunisert noen av disse idéene du hadde til andre?

Ja, jeg har nevnt dette som jeg nevnte for dere, Jeg har sagt at jeg ikke har noen særlig tro på at det ville ha ledet til noe om jeg hadde fortsatt med det og fulgt det videre. Det appellerte noe til meg i begynnelsen og jeg prøvde å følge det opp lenge, men jeg ble mer og mer overbevist om usannsynligheten av at jeg kunne ha oppnådd noe på den måten. Men uten faktisk å ha verifisert at det ikke kunne gjøres.

Har du mange idéer, eller etterlatte tanker, som du vil la komme ettertiden til gode?

Nei, jeg kan ikke si det om Riemann-hypotesen. Jeg har en del statistiske resultater. Det er en del folk som har vært på meg i de siste årene og villet at jeg skulle publisere i detalj disse tingene som jeg har forelest om noen ganger, nemlig om lineære kombinasjoner av visse Dirichlet-rekker. Disse lineære kombinasjoner, som er så beskafne at de også har funksjonal-ligninger som leder til en reell funksjon på den kritiske linjen, slik at vi vanligvis har en positiv del av nullpunktene på den kritiske linjen. Jeg må si at det er interessant at dette kan gjøres, men man kan ikke bruke det til noe større. Det er egentlig ikke så mange nye idéer som inngår i det, bare eldre idéer som er kombinert på en ny måte. Så jeg synes det var interessant å utarbeide det og forelese om det, men vet enda ikke om jeg bør publisere det. Det blir en del lengre enn hva jeg egentlig skulle ha lyst til å skrive opp. Som jeg sa tidligere så er jeg av natur noe lat, og det er min unnskyldning for ikke å ha publisert så mye. Mange ting er jo etter hvert publisert av andre. Så selv om jeg ikke skulle publisere dette, så vil det nok etter hvert komme noen andre som vil gjøre det, skulle jeg tro.

Du nevnte at andre forsøk på å løse Riemann-hypotesen – slik som Connes' – at de essensielt sett, som du ser det, bare gir reformuleringer.

Ja, det er en ny måte å komme frem til de eksplisitte formlene – en ny adgang – men det gir i grunnen ikke mer enn hva man allerede hadde. Connes trodde utvilsomt til å begynne med at han holdt på med noe som skulle lede an til et bevis, men det viste seg at det leder ikke lenger enn andre forsøk. Da jeg snakket med ham sist så hadde han innsett dette. Det er ofte slik med sånt arbeid som er

nokså formelt. Det var jo, for eksempel, en japaner Matsumoto som holdt noen foredrag som fikk en hel del folk til å tro at han hadde beviset.

For å avrunde om Riemann-hypotesen: hvis vi, som ikke-eksperter, stilte deg følgende spørsmål og du skulle gi et kort svar: Hva er det Riemann-hypotesen forteller oss om primtallene?

Den forteller oss at de er veldig pent distribuert, omtrent så jevnt og så bra som man overhodet kunne vente. Man kan ikke vente en fullstendig jevn fordeling, selvfølgelig. Men det forteller oss at ihvertfall når det gjelder matematikken – og ihvertfall tallteorien – så lever vi i Leibniz' best mulige verden, slik som den gode Candide i Voltaires "Candide" blir fortalt av sin lærer Pangloss, at han lever i den best mulige av alle mulige verdener. Vel, i alle fall i tallteorien så har man den best mulige sammenheng av tingene, selv om man ikke kan bevise det enda. Det ville gi meg stor tilfredsstillelse å se et bevis, av den grunn at det vil vise at det er noen ting som er riktig i denne verden. Det er så mye annet som ikke går som det skulle, men i alle fall primtallene, og selvfølgelig også zeta-funksjonens nullpunkter, er distribuert så vel som de kunne være.

Har du tenkt over om det finnes noen slags geometriske analogier til primtallene når det gjelder fundamentalitet?

Hvis du betrakter en kompakt Riemannsk flate med den hyperbolske metrikk-en, og ser på de lukkede geodetiske linjer, så kan du si at deres lengder svarer der til logaritmene til primtallene. I det kompakte tilfellet så har man i det vesentlige at Riemanns hypotese er riktig, bortsett fra at vi i endel tilfelle har noen nullpunkter som ligger mellom 1/2 og 1 på den reelle linjen, hvilket jeg ikke tror kan hende med de funksjonene som vi gjerne betrakter i tallteorien. Skjønt jeg vet det er noen som har trodd på at kanskje noen av de kvadratiske L-funksjonene har nullpunkter mellom 1/2 og 1.

Er det ellers noe du har å bemerke om Riemann-hypotesen før vi forlater det temaet?

Jeg tror det er mulig at det tar ganske lang tid enda før det blir avgjort. Fra tid til annen har jo folk vært optimistiske. Hilbert, da han ga sine problemer i 1900, mente at Riemanns hypotese var et av de problemer man ville se løsningen av før det var gått så forferdelig lang tid. Det er jo nå litt over hundre år siden han ga sine berømte forelesninger om disse problemene. Så vi må jo si at hans oppfatning var feil. En hel del av de problemer som han anså som mer vanskelig viste seg å være atskillig enklere. Det var for eksempel en del problemer om transcendens av tall som ble avgjort tidligere. Det har jo vært gjort store fremskritt når det gjelder transcendensresultater siden Lindemanns opprinnelige arbeider fra 1882. Jeg må forresten nevne en historie om denne Lindemann. Da jeg var i Uppsala høsten 1939 så fant jeg i biblioteket der to arbeider av Lindemann som han hadde publisert da han var i nokså høy alder, ihvertfall vel over sytti, der han mente seg å ha løst Fermats problem. I arbeid nr. 2 hadde han en hel del stygge ting å si om de

som påpekte feil i hans første arbeide. Det han hende med den beste. Lindemann var jo virkelig en meget stor matematiker. Hans transcendensresultat var uhyre vidtrekkende og et veldig generelt resultat – han bygget på noen tidligere resultat av Hermite. Det hender at folk, også matematikere, blir litt sånn senile i sine eldre år, dere får bære over med meg hvis ...

(Latter) Vi har ikke merket noe tegn til det, nei.

Var det noen oppdagelser du gjorde under krigen som senere ledet til oppdagelsen av sporformelen?

Sporformelen kom noe senere, og den hadde i grunnen ikke noe særlig forbindelse med hva jeg hadde gjort med zeta-funksjonen. Den kom frem ved at jeg hadde sett et arbeide av Hans Maass hvor han betraktet løsningen av en viss partiell differensialligning, som er invariant under modulgruppen, for eksempel, og det var en hel del problemer han hadde latt stå åpne. Jeg så at man skulle kunne bruke noen idéer som jeg hadde vært litt inne på før krigen, en del ting som jeg hadde kommet inn på i kjølvannet av min hovedoppgave. Disse integraloperatorene, som jeg hadde betraktet, følte jeg meg mye mer familiær med enn differensialoperatorer. Jeg likte bedre å se på Fredholm-ligninger enn differensialligninger, og jeg tenkte at hvis man betraktet klassen av alle invarianter, dvs. integraloperatorer som var invariante under modulærgruppen, for eksempel, så ville det være en mer naturlig ting enn å se bare på den såkalte hyperbolske Laplace-operatoren. Så jeg begynte å se på det. Selvfølgelig, dette var integraloperatorer som strakte seg over hele planet, øvre halvplan hvis man brukte denne representasjonen, men man kunne også bruke invariansen under gruppen til å få en integraloperator over bare et fundamentalområde. Da jeg hadde gjort dette, lå det veldig nær å se om det lot seg gjøre å beregne sporet av integraloperatoren som virket innen fundamentalområdet, og det viste seg at ved å kombinere leddene på en passende måte, så ga det meg en meget tiltrekkende form.

Det gikk forholdsvis lett hvis jeg ikke betraktet modulgruppen, men en gruppe som hadde kompakt fundamentalområde i det hyperbolske plan. I 1952 ga jeg en del forelesninger i Midtvesten om dette ved fire universiteter: I Ann Arbor, Purdue, Chicago og Urbana. Det tok meg en del besvær å gjennomføre beviset for modulgruppen som jo ikke har kompakt fundamentalområde, og det tok meg enda mer besvær å gjøre det generelt for grupper i det hyperbolske plan som har endelig areal av fundamentalområdet, men som har det man kaller "cusps" eller "spisser". Det lyktes meg å fullføre dette. Den vanskelige ting var først å håndtere det kontinuerlige spektrum, såkalte Eisenstein-rekker, og vise at de også kunne fortsettes analytisk om det var en generell gruppe, ikke bare en modulgruppe, men en generell gruppe som hadde endelig areal av fundamentalområdet, men som ikke var kompakt. Det greide jeg å gjøre sommeren 1953, og jeg kommuniserte dette resultatet til Siegel. Jeg tenkte at han ville være noe interessert, og det var han da også. Han spurte om jeg ville komme og forelese om dette i Göttingen i 1954, og det gjorde jeg. Det var en ganske lang rekke av forelesninger som sluttet med

å behandle det ikke-kompakte tilfellet generelt, ikke bare for modulgrupper,men generelt. Det var en assistent som hadde tatt en del notater. Jeg skulle skrive opp behandlingen av det ikke-kompakte tilfellet – det kompakte tilfellet var nokså kurant – så jeg begynte å skrive sammen siste del. Senere fikk jeg da tilsendt dette som denne assistenten hadde skrevet, og jeg syntes det var så forskrekkelig dårlig at jeg ikke sendte tilbake det som han hadde sendt meg. Så de såkalte Göttingen-notene begynte med 6. kapittel. Jeg holdt på den tiden på å utarbeide forelesninger for den kongressen eller symposiet som ble holdt i Bombay januar/februar i 1956. Jeg var glad det ikke varte lenger, da det tidlig blir svært varmt der. Jeg skrev sammen disse foredragene, og jeg holdt så 4×1 timers foredrag i Bombay om dette. Det var det som jeg da publiserte i deres beretning. Der behandlet jeg ikke bare det hyperbolske planet, men også generelle hyperbolske rom og andre høyere dimensjonale tilfeller, og påpekte hva vanskelighetene var. Jeg behandlet det kompakte tilfellet fullstendig, for der er det egentlige ikke noen nye vanskeligheter som kommer inn. I de høyere dimensjoner kommer der inn mer komplikasjoner når man betrakter kontinuerlige spektra som inntreffer med typer av ikke-kompakthet som kan være forenlig med endelig volum av fundamentalområdet, og vi har kontinuerlige spektra av forskjellige dimensjoner. Det synes jeg er et av de bedre resultater av det jeg hadde oppnådd i denne retning.

Jeg ga sporformelen generelt for det kompakte tilfellet, og jeg gjorde også mer i det hyperbolske tilfellet, så jeg syntes ikke det var noen grunn for meg til å inkludere de tingene som denne assistenten hadde sendt meg. Jeg sendte aldri de første 5 kapitlene til Göttingen. Enhver intelligent person kunne komplettere det som ble publisert, dels i beretningen fra møtet i Bombay, og det ble også publisert i en indisk journal.

Poissons summeformel var den på noe tidspunkt en filosofisk motivasjon for deg, da du arbeidet med sporformelen?

Den var egentlig ikke noen motivasjon, men den kan sees som en analogi når man betrakter euklidske rom og kommutative grupper og deres virkning. Poissons formel,hvis man behandler den på samme måte, kan betraktes som et spesialtilfelle av sporformelen.

Kunne du skrive ned sporformelen for oss?

*Vel, den ser noe komplisert ut generelt, men i det enkleste tilfellet der gruppen Γ har et kompakt fundamentalområde – la oss si $\mathcal{D}$ – i det hyperbolske plan, så blir den betraktelig enklere. Så la $\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2, \;\; n = 1, 2, \cdots$ være egenverdiene til den assosierte Laplace-operatoren, og la $h(r)$ være en like funksjon som er analytisk når $|\mathrm{Im}(r)| < \frac{1}{2} + \epsilon$ for en $\epsilon > 0$, og med vekstbetingelse $h(r) = O(1/(1 + r^2)^{1+\epsilon})$. La

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{iur} \, dr$$

*Dette spørsmålet og svaret er hentet fra en annen kontekst, men vi synes det passer inn her.

være Fourier-transformen til $h(r)$. Da blir sporformelen

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(r_n) = \frac{A(\mathcal{D})}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} rh(r) \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}}\, dr + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\log N(P)}{N(P)^{k/2} - N(P)^{-k/2}}\, g(k \log N(P))$$

Her er $A(\mathcal{D})$ arealet til $\mathcal{D}$ målt med hensyn på det invariante hyperbolske målet, $\{P\}_\Gamma$ betegner en primitiv klasse av hyperbolske transformasjoner, $N(P)$ er normen til P. P'ene tilsvarer de geodetiske kurvene på den assosierte Riemannske flaten, og $\log N(P)$ er lengden til P.

Når du ser på den veldige betydningen sporformelen har hatt regner du det som din største matematiske oppdagelse?

* Vel, den er antagelig det, skulle jeg tro. Det er antagelig den som har mest anvendelse, skulle jeg også tro. Skjønt, disse anvendelsene kan jeg ikke si at jeg nødvendigvis begriper. Jeg mener, jeg har hørt at den har anvendelse i fysikk, og sånn, men jeg vet ikke presis hvordan det henger sammen. Og, jeg er egentlig ikke noe særlig interessert i hvordan det henger sammen heller.

Er du overrasket over at den har fått så stor betydning som den har gjort?

*Vel, jeg er litt overrasket over at den har fått anvendelse i fysikk. Matematisk sett så synes jeg nok at den syntes betydningsfull for meg. Den inneholder en hel del informasjon, og selve problemet inneholder også en hel del åpent for fremtidig arbeider. Særlig i de høyere dimensjoner hvor man har kontinuerlige spektra av mer enn en dimensjon, så og si. Det kompliserer jo saken. Det er nok en hel del å gjøre der enda. Men det får heller bli gjort av andre, må jeg si.

Jeg har ikke tenkt å skrive noe mer om sporformelen. Jeg holdt noen foredrag i 80-årene, og også et par ganger senere om det jeg kalte "hybrid trace formula". Det enkleste er, kan man si, hvis du tar det hyperbolske plan og en vanlig algebraisk Riemannsk flate avbildet i det hyperbolske plan, som henger sammen med uniformeringsteoriene – hvordan skal jeg uttrykke dette? – så kan du utlede en del klassiske ting, som for eksempel Riemann-Roch formelen, som spesialtilfeller av sporformelen. Du bruker noen spesielle kjerner, får jeg si. Vel, det lignende kan gjøres i mange høyere dimensjoner også, der er det noe vanskeligere å finne de rette kjernefunksjonene. Det kan gjøres for alle de såkalte "bounded symmetric domains" og for visse klasser av funksjoner. Det finnes tilsvarende ting der, særlig hvis du har et produkt av flere av disse, hvor du har tildels noen av dem som i seg selv gir hva som svarer til en Riemann-Roch formel. Men den andre komponenten i kjernen er en mer generell, og det er det jeg refererte til som "hybrid trace formula". Og av noen av dem kunne man få ganske interessante resultater, et enkelt tilfelle er de såkalte Hilberts modulgrupper som knytter seg til et reelt

*Disse spørsmålene og svarene er hentet fra "video-intervjuet" 14. november, 2005.

algebraisk tallegeme. Hvis det er av graden n så har du et produkt av n hyperbolske plan. Du kan velge en kjerne der, som er hva man kunne kalle den singulære kjerne, som leder til Riemann-Roch formelen, for, la oss si, $n-1$ av disse variable. For den siste kan du ta en generell kjerne, så får du formler som leder til disse Dirichlet-rekker som du kan danne fra denne Hilbertske modulgruppen. Og blant annet får du det interessante tilfelle at hvis n er et like tall, så får du der en rekke av noe som svarer til en zeta-funksjon og en rekke av L-funksjoner, kan du si, som er tilknyttet til gruppen, og denne zeta-funksjon har en pol i $s = 1$. Og i det klassiske tilfellet, hvis du har bare et hyperbolsk plan, eller hvis du har et ulike antall hyperbolske plan, så ville samme problem lede til noe som har ett nullpunkt i $s = 1$. For n like så er det noe som er mer analogt med zeta-funksjonen og Dirichlets L-rekker. Jeg holdt en del foredrag om det i 80-årene, og kanskje også noe senere, men har aldri publisert det, faktisk. Jeg vet ikke om noen andre har publisert det kanskje nu til denne tid. Jeg har ikke fulgt efter hva som har skjedd med dette. Det har blitt skrevet en hel del i litteraturen som jeg ikke har fulgt med i. Jeg leser ikke så mye som jeg gjorde før.

Synes du det er tilført noe vesentlig nytt i de senere utvidelser og generaliseringer av sporformelen?

Vel, synspunktet ble jo skiftet noe da man begynte å se på gruppe-representasjoner, selvfølgelig. På den tiden tenkte jeg ikke på det, saken er den at jeg har i grunnen aldri lest noe større om disse tingene. Det er først senere at jeg har begynt å se litt på dette. I det hyperbolske planet er det ikke nødvendig å se på gruppe-representasjoner, alt kan oppnåes ved å se på automorfe funksjoner og automorfe former, de er alle skalarer så å si, bare en komponent. I de høyere dimensjonale symmetriske rom er situasjonen mer komplisert. Om du har en diskret gruppe hvis fundamentalområde har endelig volum, kan du se på automorfe funksjoner selvfølgelig, men i de fleste tilfelle er det intet som svarer til de skalare automorfe former, og selv for de begrensede komplekse symmetriske områder, hvor skalare former alltid eksisterer, forteller de ikke hele historien. Du må i det høyere dimensjonale tilfellet også betrakte vektorer av funksjoner som transformeres under gruppens aksjon ved en grupperepresentasjon, som er en matrise. Det er bare i det hyperbolske plan at vi får alt ved å se på automorfe funksjoner og skalare former. Det gir mer generalitet å betrakte alle grupperepresentasjoner, men jeg må tilstå at jeg har aldri satt meg noe større inn i dette felt. Jeg har aldri lest noe større. Jeg opererte mest med å se i noen avhandlinger for å se hva folk gjorde, og hva jeg kunne forstå av det og bygge videre på min egen måte. Jeg har lest svært få bøker om matematikk, men de jeg har lest har betydd en hel del for meg. Mest har jeg sett på avhandlinger, mer enn lærebøker, men en lærebok som har betydd en hel del var Heckes "Algebraische Zahlentheorie", den lærte jeg en hel del av – den er en riktig juvel.

Er det andre bøker enn Heckes som har vært viktige for deg?.

Saken er den at når det gjaldt algebraisk tallteori, så var det mange andre bøker

som jeg så, og som jeg prøvde å lese, men de hadde ikke min måte å se det på. Jeg fant Hecke svært forståelig og måten han innførte idealbegrepet på. Hermann Weyl hadde skrevet en bok om algebraisk tallteori, en forholdsvis liten en, og Landau hadde også skrevet en bok om samme emnet. Jeg følte meg aldri komfortabel med deres bøker. Jeg foretrakk Heckes måte å se tingene på. Den fungerte jo svært bra for han, og han var den første som kunne gjøre noe større med zeta- og L-funksjonene for de algebraiske kroppene av høyere grader og bevise funksjonalligningene.

Bortsett fra algebraisk tallteori er det andre bøker, for eksempel Titchmarsh' bok om Riemanns zeta-funksjon, som har hatt betydning for deg?

Den hadde en hel del bra i seg, men hadde også en hel del ting i seg som ikke var bra. Det var ingen grunn til å ta med noe om nesten-periodisk funksjoner, og å betrakte zeta-funksjonen som en nesten-periodisk funksjon. Det er veldig lite nyttig i dette synspunktet. Det kan være interessant på sin måte, men man har aldri fått noen ting ut av det som har hatt noen verdi for zeta-funksjonen eller noen av disse tallteoretiske rekkene. Det kapitlet kunne ha vært helt utelatt. Titchmarsh hadde en hel del gode ting i sin bok. Jeg må si at jeg leste ikke alle hans bevis. I det hele tatt når det gjelder mange av bevisene i disse bøker som berører analytisk tallteori, så var ting gjort uvanlig komplisert. Når de skulle arbeide med de eksplisitte formlene, er det så at det er én formel som en egentlig var interessert i, der rekken ikke er absolutt konvergent. Faktum er at i alle tilfeller er det mye enklere å bruke de integrerte formler. Man kan alltid få konvergens ved å integrere et par ganger, da blir rekkene absolutt konvergente. En kan oppnå like gode resultater ved å bruke disse rekkene og ta deriverte, og det er helt unødvendig å betrakte det som ikke konvergerer absolutt.

Nå har vi jo snakket om noen av dine ting, vi har snakket om Riemann-hypotesen og sporformelen, men såldmetoder det er jo også noe som har stått ditt hjerte nær i lang tid.

Jo, det er så. Det kom først ut som et biprodukt av mitt arbeid med zeta-funksjonen.

Etter doktorgraden?

Etter doktorgraden, ja. Jeg innså at jeg kunne bruke noe av det som jeg hadde brukt der, og det kunne jeg bruke til å finne øvre grenser, og at det virket i en mer generell sammenheng enn hva jeg hadde tidligere. Det var da jeg først begrep igrunnen hva såldmetoden egentlig handlet om. Jeg så på Viggo Bruns arbeider, men jeg kunne aldri forstå dem riktig. Han brukte mye en slags geometrisk fremstilling. Han var avhengig av å se tingene geometrisk med visse figurer og diagrammer og sånn. Jeg så på dem, men de hadde aldri noen mening for meg, så jeg fikk ingenting ut av det. Det fantes jo andre fremstillinger som unngikk dette. Det var Rademacher, som egentlig hadde oversatt Bruns arbeide til et annet språk, så å si, som var mer tilgjengelig for andre matematikere. Så det ble

mer sånn som Rademacher hadde fremstilt såldmetoden som ble brukt og gjort tilgjengelig for en større gruppe av matematikere. Jeg så også litt på Landaus trebinds forelesningsserie om tallteori, som hadde et avsnitt om Bruns arbeider, men han fulgte jo mye Rademachers fremstilling. Jeg syntes det heller ikke var så bra. For å finne øvre grenser så fant jeg ut at jeg kunne bruke kvadrater av $\sum_{d|n,d<z} \lambda_d$, og det virket veldig bra. Faktisk på alle problemer som kunne angripes med Bruns såld-metode, kunne jeg finne øvre oppskatninger med min egen metode, og de ble konsekvent bedre. Ikke bare det, men også mye enklere å finne. Konstantene ble mer naturlige og enkle for jeg endte alltid opp med noe som var et heltallig multiplum av det som var den antagelige korrekte verdi. For eksempel hvis jeg hadde et irredusibelt polynom uten noen fast primfaktor, så ville jeg ende opp med noe som var ganske mye bedre enn de resultater som kunne oppnås med Bruns resultat. Hvis det var noe som dreide seg om flere irredusible polynomer så ble konstanten øket en del. Jeg mener, hvis man betraktet antall primtall, for å ta noe enkelt, hvis man da tok og betraktet antall primtall i et intervall så endte jeg opp med en konstant som var to ganger så stort som det vi mente var det korrekte resultat. Hvis jeg betraktet et binært problem, så endte jeg derimot opp med noe som hadde en faktor som var 4 ganger så stor. Og tilsvarende for flere. Altså Goldbachs problem, eller primtall tvilling problemet, førte til konstanter som var 4 ganger for store. Jeg prøvde så å adoptere dette så jeg også kunne finne nedre grenser. For det er alltid et vanskeligere problem, fordi at en nedre grense har ingen verdi unntagen når den kommer ut positivt. Øvre grenser kommer alltid ut positive. Nedre grense sier bare noe når den kommer ut positivt. Og jeg fant jo selvfølgelig at avhengig av hva problemet var, så kunne jeg få positive resultat bare så lenge jeg gjorde min såldning opp til en viss potens. Jeg kunne for mer kompliserte problemer bare bruke såld-metoden min over en seksjon av primtallene som var opp til en potens med lavere eksponent enn den jeg kunne gjøre for et enklere problem.

La oss snakke om såldmetoder. Den såkalte Selbergs såldmetode, det var det første hovedresultatet ditt?

Jeg publiserte en note sommeren 1946, og jeg begynte å arbeide en del med det. Da jeg kom til Princeton i 1947 gjorde jeg en oppdagelse som satte meg på sporet av det som jeg kaller paritet, og som er ganske viktig for hva man kan gjøre og ikke gjøre med såldmetoder. Jeg prøvde å vise eksistensen av primtall i intervaller, forholdsvis små intervaller, ved å betrakte et forhold mellom to kvadratiske former.

Jeg prøvde å betrakte

$$\frac{\sum_{x<n<x(1+\epsilon)} d(n) \left(\sum_{d|n} \lambda_d \right)^2}{\sum_{x<n<x(1+\epsilon)} \left(\sum_{d|n} \lambda_d \right)^2}; \qquad d \leq z, \lambda_1 = 1 \tag{1}$$

der $d(n)$ er antall divisorer til n, og vanligvis velges $z \leq \sqrt{x}$. Jeg betraktet forholdet i (1). Det er åpenbart at hvis du kan gjøre dette forholdet – man kan godt utstrekke dette bare over kvadratfrie tall, det blir det samme – hvis du kan gjøre dette forholdet mindre enn 4 så vil det i det vesentlige vise at det finnes primtall i intervallet fra x til $x(1+\epsilon)$, hvor ϵ er en liten konstant. Man har forholdet mellom to kvadratiske former i λ-ene, og det gjelder å minimalisere dette forholdet, selvfølgelig. Du kan ikke riktig diagonalisere hele den kvadratiske formen ved å innføre nye variable. Jeg fant at hvis jeg bare prøvde å gjøre den dominerende delen i telleren så liten som den kan være, hvis λ-ene er frie og $\lambda_1 = 1$, så kan jeg gjøre forholdet så nær til 4 som jeg vil, nemlig som $4+O(1/\log x)$. Det syntes meg som det ikke var noen grunn til å tro at jeg hadde funnet det riktige minimum ved å bare ta minimum av den dominerende delen av dette, og sette inn disse verdiene av det som jeg fant. For den andre delen av det som jeg fant ovenfor er av samme orden i virkeligheten, og det syntes meg klart at siden jeg ikke var ved det riktige minimum, så skulle jeg kunne gjøre det litt mindre enn 4 hvis jeg jenket på det. Men det viste seg at det ikke var tilfelle. Jeg prøvde også med andre uttrykk, og etter hvert ble det klart for meg at de tall som har like antall primfaktorer og de som har et ulike antall primfaktorer vil bidra omtrent det samme, så at forholdet ikke kan bli gjort mindre enn 4, faktisk. At det kan bli gjort så nært til 4 som man vil viser at man i virkeligheten da har at de med bare to primfaktorer vil komme til å bidra ulike mye mer enn alle de andre som har et like antall primfaktorer. De som har et like antall primfaktorer, men flere enn to, vil altså gi bidrag av mindre størrelsesorden. Dette viste seg i en del andre sammenhenger også, så jeg innså at øyensynlig hva jeg så gjorde med disse metoder så fikk jeg asymptotisk samme bidrag av de med like antall primtall og de med ulike primtall. Det kom da for meg at det skulle være mulig å konstruere uttrykk hvor jeg fikk omtrent samme bidrag av primtallene og produkter av to primtall, og det var det som ledet meg til denne formelen som ligger til grunn for det elementære beviset for primtallsatsen. Jeg refererer til dette problemet som paritet, og som såldmetoden ikke kan skille mellom. Jeg nevnte det allerede i Trondheim i 1949, hvor jeg holdt et foredrag, og noe mer detaljert i mitt foredrag på verdenskongressen til IMU i Cambridge, Massachusetts, ved Harvard i 1950, at man har denne begrensning. Begrensningen gir også en idé om hva man kan gjøre, og faktum er at man kan finne en uendelig rekke av formler hvor det er bare bidrag fra primtall og produkter av to primtall. De har samme vekt disse to deler, og det er noen forskjellige funksjoner av de to som inngår i disse formlene. Den formelen som jeg ga i min avhandling om det elementære beviset for primtallsatsen er i grunnen den enkleste. Denne formelen fremkommer om man først betrakter formelen

$$\sum_{n<x} \sum_{d|n} \mu(d) \log^2 \frac{x}{d} = x \sum_{d<x} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 \frac{x}{d} + 0\left(\sum_{d<x} \log^2 \frac{x}{d}\right) \tag{2}$$

(μ er Möbius-funksjonen.)

Her sees lett at den indre sum på venstre side alltid er null om n har mer enn to forskjellige primfaktorer. Ved å se på verdien for $n = 1$ og $n = p^a$, med $a > 0$, og $n = p^a q^b$, med $p \neq q$ og $a > 0,\ b > 0$, blir venstre side av (2).

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \log^2 x + \sum\limits_{p^a<x} \left(\log^2 p + 2 \log p \log \dfrac{x}{p} \right) + \sum\limits_{\substack{p^a q^b<x \\ p\neq q}} 2 \log p \log q \\ = \sum\limits_{p<x} \log^2 p + \sum\limits_{pq<x} \log p \log q + 0(x) \end{cases}$$

På høyre side av (2) kan man oppskatte summene som inngår, og man får at høyre side er

$$2x \log x + 0(x)$$

Tilsammen gir dette

$$\text{(4)} \qquad \sum_{p<x} \log^2 p + \sum_{pq<x} \log p \log q = 2x \log x + 0(x)$$

Det er formelen (4) som er nøkkelen til å bevise primtallsatsen?

Ja, det er så.

Det er veldig viktig for oss å få etablert dette. Det var altså faktisk såldmetoden, og i en viss forstand den enkleste applikasjon av såldmetoden, som ledet til denne fundamentale asymptotiske formelen (4)?

Vel, ja. Det er også en slags såldmetode. Dette er en lokal såldmetode. Dere skjønner, at når man generelt bruker disse metodene så finner en alltid at de λ-ene som man ender opp med, avhengig av hva slags koeffisienter som forekommer, alltid er av formen

$$\text{(5)} \qquad \lambda_d = \mu(d) \frac{\log^k \dfrac{z}{d}}{\log^k z}$$

hvor z er en skranke for hvor langt d kan gå, og eksponenten k avhenger av det problem man betrakter.

Er det en form for Lagrange multiplikatormetode du bruker for å minimalisere disse tingene?

Vel, jeg har en måte å innføre nye variable som diagonaliserer, så at det er veldig lett etter at du har innført de nye variable å finne minimum i en sånn formel, i hvertfall av den dominerende del av formelen. Det er faktisk litt mer komplisert. De optimale λ_d, når vi kan bestemme dem eksakt, kommer ut som $\mu(d)$ multiplisert med en kvotient av to summer. Hvis man oppskatter disse summene får man asymptotisk formen (5). Vanligvis må man nøye seg med en approksimasjon.

Så dette er en stor oppdagelse, faktisk?

Vel, det tar en tid før du kan trekke noen mere slutninger ut fra det, men jeg syntes jo at det var en ganske interessant relasjon, slik at det skulle være mulig å trekke mere ut av dette. Det tok meg en tid å få det slik som jeg ville ha det, og det gikk gjennom flere faser. Den ene av dem hadde jeg egentlig ikke planlagt: for å si det slik, så kom det en "interloper in the way". Saken er nemlig den, jeg brukte noe lignende i forbindelse med noe jeg hadde gjort ferdig for publikasjon. Det var et bevis for Dirichlets setning om primtallene i aritmetiske rekker, og jeg benyttet ikke (4), men noe som kan utledes av analogien for (4) for en aritmetrisk progresjon $kn + l$, hvor $(k, l) = 1$, nemlig

$$(6) \qquad \sum_{\substack{p<x \\ p\equiv l(modk)}} \frac{\log^2 p}{p} + \sum_{\substack{pq<x \\ pq\equiv l(modk)}} \frac{\log p \log q}{pq} = \frac{1}{\varphi(k)} \log^2 x + 0(\log x)$$

hvor $\varphi(k)$ er Eulers tallteoretiske funksjon.

Det er da ikke så vanskelig å få en selvmotsigelse hvis du antar at det ikke er uendelig mange primtall i progresjoner. Jeg gikk gjennom dette beviset med Turán som var her i Princeton da, sommeren 1948. Han hadde kommet med noen spørsmål i den forbindelse, og jeg hadde kommet til å nevne formelen (4) – i selve beviset inngikk bare (6). Jeg tror foranledningen til at jeg nevnte formelen (4) var at han hadde spurt om hvor skarp man kunne gjøre noen oppskatninger. Han hadde vært her for vår-terminen og han skulle reise tilbake til Ungarn. Jeg skulle reise opp til Canada for å få et permanent visum, for jeg ville ta en jobb i Syracuse for ett år. Jeg hadde blitt tilbudt et annet år ved instituttet her, men jeg syntes det kunne være interessant å prøve ut hvordan det var ved et annet amerikansk universitet. Jeg må si at jeg angret ikke på det. Så jeg var oppe i Canada nære på to uker før jeg endelig fikk overtalt konsulatet til å gi meg visum.

Måtte du dra til Canada for å få visum?

Du kunne ikke gjøre det innenfra landet, du måtte reise ut et sted, og Canada var det nærmeste stedet. Jeg reiste da opp til Montreal og returnerte til Princeton først ni dager senere. Jeg hadde vært der før og holdt noen foredrag ved McGill University etter at jeg kom til Amerika. Det var om vinteren. Det var veldig kaldt der kan jeg huske, men hotellværelset var så varmt at vi måtte ha vinduene åpne hele tiden, ellers kunne vi ikke leve der. Det var umulig å regulere radiatoren. Oljeprisen var noe lavere den gangen åpenbart! Men tilbake til visumsaken: jeg snakket ikke med selve konsulen, men med visekonsulen. Jeg hadde fått idéen å reise opp der av Hua, en kineser som hadde vært her og som jeg ble kjent med. Han hadde dradd til Canada for å endre sitt visum for å ta en stilling i Urbana, Illinois. Så jeg nevnte hans tilfelle for å oppmuntre denne visekonsulen å gjøre det samme for meg. Han sa til meg etter at han hadde sett "the files" til Hua at det syntes ham åpenbart at Hua ikke burde fått visum. Men så en dag jeg var inne på konsulatet så gjorde han ferdig visum for oss, men før vi fikk visumene

våre så fikk han "second thoughts" og trakk dem tilbake. Så det tok en del dager mer, og vi måtte ha en del dokumenter oversatt. Det var særlig komplisert med dokumenter som min kone Hedi hadde på rumensk, men vi fant en oversetter som var i stand til å gi offisiell bevitnelse om at disse dokumenter var korrekt oversatt. Hedi fortalte meg senere at denne oversetteren i grunnen ikke kunne så mye rumensk. Vi fikk da endelig våre visum, og vi reiste så ned med toget og fikk innreise til USA ved St. Albans i Vermont. Da jeg kom til instituttet neste dag viste det seg at Turán fremdeles var der. Han hadde gått igjennom mitt bevis for aritmetiske progresjoner, som jeg hadde fortalt ham om, og han hadde også nevnt formelen (4). I mellomtiden mens jeg var i Montreal var også Erdős kommet til Princeton, og han sa at han var interessert i denne formelen (4), som han kalte en ulikhet. Jeg kalte den alltid en likhet, det var en asymptotisk formel. Vel, man kan si at det er en ulikhet ved at det er større enn et utrykk hvis du setter minus en konstant ganger dette, eller mindre hvis du setter pluss. Men jeg har alltid kalt en slik formel en asymptotisk ligning, ikke en ulikhet. Men han kalte den en ulikhet. Han ville prøve om han kunne vise at det fantes primtall mellom x og $x(1+\epsilon)$, der ϵ er vilkårlig liten, dersom x var tilstrekkelig stor. Vel, jeg sa at jeg hadde ingenting imot det. Jeg holdt ikke på med å arbeide med noe sånt den gangen. Jeg hadde i grunnen forlatt det problemet da jeg hadde funnet ut om dette med paritet, og innsett at dette forsøket som jeg gjorde med det forholdet (1), som jeg skrev opp først, ikke ville føre frem, altså at jeg ikke kunne gjøre det mindre enn 4.

Så du hadde ikke primtallsetningen i tankene akkurat da?

Jo, jeg hadde primtallsetningen i tankene, det var mitt mål ut fra denne formelen (4) jeg hadde. Jeg sa at jeg ikke hadde noe imot at han prøvde å gjøre dette, og jeg gjorde noen bemerkninger som ville "discourage" ham. Jeg sa at han skulle ikke være så alt for optimistisk at det var så mye annet som kunne sluttes ut fra dette. Men så etter et par dager så nevnte Erdős at han hadde et bevis for at mellom x og $x(1+\epsilon)$ var det primtall, og han ga meg noen av detaljene hvordan beviset gikk. Jeg hadde tidligere oppnådd en del resultater. For eksempel, hvis man tar funksjonen $\psi(x)$, som er summen av logaritmene til primtallene mindre enn x, altså

$$\psi(x) = \sum_{p<x} \log p \tag{7}$$

og betrakter lim sup og lim inf av $\psi(x)/x$, og kaller det henholdsvis A og a, så hadde jeg sluttet at $A + a = 2$. Det passer jo veldig bra at begge av dem skulle være 1, selvfølgelig, og det ville gi et bevis for primtallsatsen. Man finner lett at det er veldig usannsynlig at de er forkjellige fra hverandre, siden det vil føre til en veldig merkverdig fordeling av tallene med like antall primtallfaktorer og tallene med et ulike antall primtallfaktorer, og også en veldig merkverdig fordeling av primtallene. Vel, jeg oppdaget at jeg kunne inkorporere hans resultat, som faktisk

sa mer enn at det fantes primtall mellom x og $x(a+\epsilon)$ – det resultatet i seg selv ville ikke ha vært tilstrekkelig for meg – i det som jeg hadde holdt på med, og at det kunne lede meg til et bevis for at A og a er like, slik at de må være 1, selvfølgelig, og det er jo ekvivalent med primtallsatsen at $\frac{\psi(x)}{x}$ går mot 1 når x går mot uendelig. Så jeg nevnte til Erdős neste dag at jeg kunne bruke hans resultat for å fullføre et bevis for primtallsatsen – et elementært bevis. Vi snakket noe mer om dette, og det viste seg at man kunne på en måte unngå å bruke hans resultat, men å bruke noen av de idéene han hadde brukt, for å få et noe mer direkte og kortere bevis. Jeg hadde egentlig ikke tenkt å innlede noe samarbeid med han . Han spurte meg om vi skulle gå gjennom dette beviset, og jeg tenkte at han da mente at vi skulle gjennom det med et par folk her ved instituttet som var interessert i tallteori. Det var Chowla fra India, og en som het Ernst Straus, som var Einsteins assistent. Straus var noe interessert i tallteori. Turán var reist på fredagen. Jeg sa ok, og kom over om kvelden for å gå gjennom disse tingene. Men det viste seg at Erdős hadde annonsert dette på universitetet, og istedenfor en liten uformell gruppe som jeg trodde det skulle være, så var det et fullt auditorium. Jeg gikk igjennom de første delene som jeg hadde hatt tidligere, og så gikk Erdős gjennom sin del, og til slutt så fullførte jeg beviset ved å kombinere hans resultat med mitt. Etter noen dager så reiste jeg opp til Syracuse for å se etter en leilighet, og dessuten jeg hadde lovet dem at jeg ville komme opp å undervise på sommerskolen og ta meg av ingeniører i hva de kalte "advanced calculus". Dette var i 1948. Jeg kom til instituttet i 1947, og jeg var altså ferdig med mitt første år her i Princeton. Jeg var tilbudt å være i Princeton ett år til, men jeg syntes det kunne være interessant å prøve en jobb i Syracuse. De ville betale noe mer, og dessuten kunne det være interessant å undervise ved et amerikansk universitet. De lovet at de skulle skaffe Hedi en jobb der også, noe som hun ville sette pris på. Så vi dro opp dit. Det tok en tid før jeg fikk skaffet en leilighet, så jeg bodde hos en kollega i mellomtiden. Jeg begynte å høre fra forskjellige kanter at de jo bare nevnte Erdős sitt navn i forbindelse med det elementære beviset for primtallsetningen, så jeg skrev et brev til Erdős og fortalte ham hvordan jeg ville gå fram. Han hadde i mellomtiden holdt noen foredrag om dette her i USA, men selv må jeg si at jeg ikke snakket mer om dette siden i Princeton. Jeg hadde undervisningen, og så var det dette med å skaffe leilighet som tok mye tid. Etter en tid så begynte jeg å maskinskrive mitt bevis om den aritmetiske progresjonen, og jeg forsøkte å forenkle beviset for primtallsetningen. Jeg fant jo snart et bevis som jeg foretrakk som ikke brukte øvre og nedre limes, og som var mer direkte. Det var konstruktivt, og det var dette beviset jeg da begynte å skrive opp, samtidig som jeg også skrev opp dette med den aritmetiske progresjonen.* Jeg skrev til Erdős at vi kunne publisere hver for oss, slik at jeg kunne la hans arbeide komme først, hvis han ville publisere det resultatet som jeg hadde brukt opprinnelig. Så ville jeg publisere et arbeide hvor jeg først skisserte det bevis som brukte hans resultat, og etterpå gi det bevis som

*Atle Selberg skrev et åtte-siders brev fra Syracuse, datert 26 september, 1948, til sin bror Sigmund i Norge, der han skisserer det elementære beviset for primtallsetningen.

jeg var mer fornøyd med og som ikke brukte noen av hans ting. Men han insisterte på å bli involvert mer direkte i dette.

Hva svarte Erdős ellers på det brevet du sendte han?

Han svarte bare at han anså at vi skulle gjøre som Hardy og Littlewood. Men vi hadde jo aldri inngått noen avtale. Vi hadde egentlig ikke hatt noe samarbeid. Det var helt tilfeldig at han kom inn i dette her, det var ikke min mening at han skulle hatt tilgang til dette.

Det er øyensynlig så at Hardy og Littlewood hadde en avtale om at når de arbeidet sammen om noen ting så skulle de begge ha lik anerkjennelse for resultatet. Det er vel og bra de hadde en avtale, og de arbeidet sammen. Erdős og jeg hadde aldri samarbeidet om noe egentlig. Det var den diskusjonen vi hadde holdt etter at jeg hadde funnet det første bevis på primtallssetningen ved å bruke hans resultat. Det var i grunnen kanskje det eneste som kunne kalles litt samarbeid, men vi hadde aldri noen avtale om at vi ville "share alike everything". Jeg må si jeg hadde aldri noen tanke om å samarbeide med noen. Jeg har et felles arbeide, og det var med Chowla, men jeg må si det at det var Chowla som først kom til meg med et spørsmål. Han var interessert i å beregne L-funksjonen som hører til den største diskriminant av en imaginær kvadratisk tallkropp – den største diskriminant som har klassetall 1. Diskriminanten er 163, og han ville gjerne finne en måte å evaluere den L-funksjonen som hører til den kvadratiske karakteren for denne modul i punktet $1/2$, og se om det var en positiv eller negativ verdi. Hvis det kom ut negativt så ville det være et nullpunkt som ikke var på linjen $1/2$, men mellom $1/2$ og 1 noe sted. Det var så at jeg tilfeldigvis hadde en formel som skulle gjøre det ganske enkelt å gjøre en numerisk beregning, der kunne brukes til hvilken som helst zetafunksjon av en positiv definit kvadratisk form i to variable. Jeg ga den formelen til Chowla, og han kom tilbake etter ikke så lang tid og hadde funnet at det ga negativ verdi i punktet $1/2$, så det måtte være nullpunkt som ikke var på linjen $1/2$. Jeg funderte litt på dette og så gjennom detaljene.

Saken er den at det fra gammelt av eksisterer to teorier for kvadratiske former, altså binære former. Det er en hvor du har midtkoeffisienten med 2 foran seg, altså $Ax^2+2Bxy+Cy^2$, og det er en annen hvor du betrakter formen $Ax^2+Bxy+Cy^2$, og hva du kaller diskriminanten er noe forskjellig avhengende av hvilken av disse to du bruker. I det ene tilfellet er det $AC-B^2$, og i det andre tilfellet er det $4AC-B^2$. Min formel hadde vært utviklet egentlig med den mindre diskriminanten, men Chowla hadde satt inn en diskriminant som egentlig var for stor i formelen, og det viste seg da han skiftet til den andre så kom det ut en svært liten, men positiv verdi. Så det var ikke noe nullpunkt. Ved å se på disse tingene så kom vi på en del annet. Jeg mener, ved ikke å betrakte punktet $1/2$, men punktet 1, og se på residuet der når man tar vekk denne zeta-funksjonen som inngår i den Epsteinske. Epsteins zeta-funksjon er i virkeligheten zeta-funksjonen av den kvadratiske kroppen når klassetallet er 1, så den har et Euler-produkt som har zeta-funksjonen og en L-funksjon med kvadratisk karakter. Hvis du tar ut zeta-funksjonen så sitter du

igjen med verdien av L-funksjonen i punktet 1. Vi hadde da et uttrykk for det ut fra denne formelen, og det viste seg at det var i virkeligheten tilgangen til et ganske interessant resultat om periodene av elliptiske funksjoner med kompleks multiplikasjon, i den klassiske formen, altså.

Man betrakter periodene. Hvis du bruker den gamle Jacobi-formen – som også ble brukt av Abel – så får du at periodene alltid kan uttrykkes ved et algebraisk tall multiplisert med et produkt av gammafunksjoner. Dette var bare kjent i to spesialtilfeller før, nemlig hvis du tar elliptiske integraler av formen $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, det svarer til lemniskatebuer, og det forefinnes her kompleks multiplikasjon. Det andre tilfellet, der det også er kompleks multiplikasjon, er hvis du har integralet $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$. Begge disse var klassisk kjent. Integralene fra 0 til 1, for eksempel, kunne uttrykkes ved gammafunksjonen for visse rasjonale verdier. Men dette var altså et mer generelt resultat. Dersom klassetallet var 1 fikk vi et ganske enkelt uttrykk. Men jeg generaliserte resultatet noe så at det gjaldt også hvis klassetallet var større enn 1. Da ble formelen litt mer komplisert, men fremdeles hadde formelen et algebraisk tall ganger et produkt av gammafunksjoner med et rasjonalt argument i seg. Det var et ganske interessant resultat. Jeg ville at Chowla skulle sette sitt navn på det først, men det ville han absolutt ikke, så det ble publisert med navnerekkefølge Selberg og Chowla. Det er jo helt ulogisk, istedenfor å ha det i alfabetisk orden. Jeg fikk ham til å skrive det opp, dvs. jeg skrev opp den delen som behandlet tilfellet hvor klassetallet var større enn 1, han var ikke riktig vant med en del av det som inngikk der. Men han regnet ut noen eksempler hvor klassetallet var 1 i eksplisitt form, hvor han også bestemte den algebraiske faktoren eksplisitt. Generelt vet man at det er et algebraisk tall. Det lar seg uttrykke ved rottegn, men det kan være ganske komplisert.

Det er det eneste arbeidet du har publisert felles sammen med noen?

Ja, men den første impuls kom fra Chowla. Hvis ikke han hadde kommet og sagt hva han forsøkte å gjøre, og jeg hadde husket på denne formelen som jeg hadde funnet i noen annen forbindelse, så ville det egentlig ikke kommet noe ut av det. Det kan vel også være at hvis det viste seg at vi virkelig hadde fått en negativ verdi først, så hadde vi kanskje nøyd oss med det og ikke gjort noe mer med det, bare konstatert at vi hadde motbevist Riemanns hypotese for denne L-funksjonen.

Tilbake til Erdős. Er det riktig å si at det var et arbeidsuhell at han så din fundamentale formel?

Vel, ja. Dere skjønner, Turán var blitt en god venn av meg mens han var i USA, og jeg visste at han skulle reise tilbake til Ungarn. Jeg trodde at han ville ha vært reist når jeg kom tilbake fra Montreal, men det viste seg at han fremdeles var her. Erdős var også kommet her i mellomtiden, og han var kommet inn i dette via Turán. Jeg hadde gått gjennom mitt bevis for den aritmetiske progresjon for Turán, og han hadde stilt et spørsmål, og jeg hadde nevnt denne formelen (4) jeg hadde.

Du sa ikke til Turán at han ikke skulle fortelle om denne formelen videre?

Nei, jeg sa ikke det. For det første, Erdős var ikke der når jeg snakket med Turán, og dessuten trodde jeg Turán ville være reist tilbake til Ungarn innen jeg returnerte fra Montreal. Jeg visste heller ikke at Erdős ville komme til Princeton da på et besøk av flere ukers varighet. Men disse to var jo kjent fra Ungarn, mest fra før krigen. Erdős var ikke i Ungarn under krigen, men Turán var der under krigen.

Beklaget Turán i ettertid det som hendte siden?

Nei, dere skjønner Erdős var hans venn så han ville nødig støte ham. Jeg holdt gode relasjoner med Turán etterpå, men vi unngikk å snakke om dette punkt senere. Erdős svarte som sagt på mitt brev og henviste til Hardy og Littlewood, noe jeg syntes var irrelevant i dette tilfellet - vi var ikke Hardy og Littlewood. Jeg vet ikke hvem han tenkte av oss som var Hardy og hvem som var Littlewood?

Du sa tidligere at da Erdős snakket med deg, så prøvde du å "discourage" ham littegrann, kan du spesifisere det litt mer?

Jeg sa den gang at man kunne gi et moteksempel, nemlig at en analog formel skulle implisere ett eller annet. La oss se på den kontinuerlige analogi. La oss si at man har en formel som

$$\int_0^x \log t \, df(t) + \int_0^x f\left(\frac{x}{t}\right) df(t) = 2x \log x + 0(x) \tag{8}$$

Om man har noe sånt som dette, så er det ikke nødvendigvis så at $f(x)$ er asymptotisk til x. Jeg kan konstruere moteksempler til det, men funksjonene $f(x)$ jeg da benytter er ikke helt monotone. Derimot er funksjonen $\psi(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ en monoton funksjon, og det er monotone funksjoner som er relevante for tallteoretiske anvendelser. Jeg prøvde liksom å skremme ham litt vekk fra selve primtallsatsen. Det var jo, kan man si, litt uhederlig at jeg ikke sa at mitt moteksempel ikke var riktig monotont.

Vi skjønner psykologien særledes godt. Du vet at du er nær et bevis for primtallsetningen, og vil ikke ha noe innblanding.

Jeg ville ikke ha noen innblanding der. Jeg foreslo for Erdős at vi kunne hver for oss publisere hva vi hadde gjort. Han kunne ha førsteretten på å publisere sitt resultat, så det kunne kommet ut før mitt resultat, som egentlig ikke trengte hans, men jeg ville gi en full skissering av hvordan jeg først hadde brukt hans resultat. Det var også det jeg gjorde. Hermann Weyl ble en slags mellommann. Da Hermann Weyl tok avskjed her i Princeron ga han meg noen relevante dokumenter.* Weyl

*Selberg tillot oss å ta kopier av to av Weyl's brev til Nathan Jacobson, redaktør av Bulletin of the AMS – et av disse var referee-rapporten av Erdős arbeide. Vi fikk Selberg's tillatelse til å gjøre med disse brevene som vi ønsket. Siden disse har stor historisk interesse, og siden deler av disse er allerede lekket ut og finnes i bøker som omtaler denne kontroversen, så gjengir vi brevene her.

hadde hørt hvordan saken hang sammen, og han tok stort sett mitt parti, men han mente at jeg kunne være generøs og la Erdős publisere sitt arbeide. Det hadde jeg heller ingenting imot at han kunne gjøre. Men saken er den at Erdős hadde på den tiden på en måte allerede publisert. Han hadde først holdt noen foredrag i Boston, ved MIT tror jeg, og senere hadde han reist til Europa og holdt noen foredrag i Holland hvor van der Corput var. Og van der Corput skrev opp et referat av hans foredrag. Det var i grunnen den første publikasjonen. Det kom allerede høsten 1948, og mitt arbeide kom først om våren 1949. Jeg sendte mitt til Annals of Mathematics. Min opprinnelige idé var at begge kunne publisere i Annals of Mathematics, men det ble til at Erdős ville publisere i Bulletin of the American Mathematical Society, som var redigert av Nathan Jacobson ved Yale University på den tiden. Jacobson sendte Erdős avhandling til Hermann Weyl for at han skulle se på den. Weyl skrev en uttalelse til Jacobson hvor han uttalte at han syntes at Erdős nok ikke riktig var helt ærlig. Han ga krav på litt for mye ifølge Weyl. Det er sannsynlig at dette har noe å gjøre med det jeg senere hørte av Siegel. Han hadde snakket med Erdős før Erdős hadde reist tilbake til Europa. Siegel hadde kommet til Princeton – dette var mens jeg var i Syracuse. Siegel hadde snakket med Erdős og sagt at det måtte være en mulighet å komme til en enighet om dette her på noen måte. Men Erdős hadde sagt: ”What I want is immortality”. Det er jo en helt idiotisk ting, det finnes ingen egentlig udødelighet, ikke engang i matematikken. Jeg mener, hvis navnene bevares så skriver man dem etterhvert ikke med stor bokstav, men med liten, slik som i ”abelian”. Vel, det er ikke mange som vet noe mer om navnene.

Hvorfor ville ikke Erdős sende denne artikkelen til Annals, han også?

Vel, det passet jo ikke lenger med den idé som jeg hadde fremsatt. Jeg mente vi skulle presentere det vi hadde gjort, men han ville ha en del mer involvering enn det. Hermann Weyl skrev senere til Nathan Jacobson at det var uriktig av Erdős å presentere så mye av det som egentlig var gjort av meg. Så Jacobson sa han ville ikke ha dette inkludert i denne publikasjonen til Erdős. Så han avslo å publisere det i Bulletin. Erdős henvendte seg da til en han kjente ved Colombia University som var medlem av National Accademy of Science i Washington, og som hadde rett til å fremlegge det der. Så det kom i deres Proceedings. Dette er ikke et særlig bra sted å publisere matematikk, siden det er et sted som inneholder alle slags artikler innen vitenskap. Det er ikke ofte matematikere leser dette tidsskriftet. Men det ble jo publisert da, og forholdsvis fort. Jeg vet ikke hva som kom ut først, mitt eller hans. Men den aller første publikasjonen var den som van der Corput fikk i stand og som kom om høsten 1948. Jeg har en kopi av det. Jeg har liggende en "file" noe sted som har mye av dette her i seg, men jeg tror at papirene er noe blandet opp. Ja, det er denne her. Jeg tror van der Corput har omgjort stoffet en del, at det ikke var slik Erdős presenterte det. Han har gitt det sin egen form, men det var i alle fall den første publikasjonen. Det er kanskje ikke så mange som vet om denne publikasjonen?

Den ble bare sirkulert slik?

Ja, han sendte meg en kopi av den. Han nevner mitt navn først, han tar det ikke i alfabetisk orden. Jeg har forøvrig aldri truffet van der Corput.

Selberg-Erdős, Selberg-Erdős. Han, dvs. van der Corput, nevner deg konsekvent først!

Han forsto, og han har øyensynlig endret noe på den fremstillingsformen som Erdős gir. Jeg må si, jeg har aldri lest detaljene – det er besværlig å lese andres arbeider.

Hardy trodde jo ikke det var mulig å gi et elementært bevis for primtallsetningen.

Ja, det var ikke så merkverdig i grunnen. Men det ble vel en hel det folk som skapte stort oppstuss om dette. Erdős skapte jo en hel del propaganda for seg selv. Jeg var i Syracuse, og jeg foreleste ikke om dette på noe sted. Faktum er at jeg har egentlig aldri holdt et foredrag om det elementære beviset for primtallsatsen. Jeg har holdt et foredrag et par ganger om et elementært bevis for det vesentlige av det Beurling oppnådde av resultater om såkalte generaliserte primtall. Det elementære beviset gir et noe svakere resultat enn Beurlings. Jeg er ikke klar over om det er mulig å gi – men man skulle tro at det er mulig – et elementært bevis som skulle gi en skarpere form lik den Beurling hadde.

Kan du foreklare hva et generalisert primtall er?

Beurling foreleste om dette på den Skandinaviske Kongress i Helsingfors i 1938, og jeg så senere på hans arbeid. Så du har et sett av reelle tall $1 < p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ osv., og du danner alle mulige produkter $\{n_k\}_k$ av disse, og ordner dem etter størrelsen, så du får $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$. Du kaller antallet av p'ene opp til x for $\pi(x)$, og antallet av n'ene som du kan danne opp til x kaller du $N(x)$. Spørsmålet er så, hvis du antar at $N(x)$ forholder seg asymptotisk som en konstant ganger x, pluss et restledd av formen $0(x/\log^\alpha x)$, altså

$$N(x) = Ax + O\Big(\frac{x}{\log^\alpha}\Big) \tag{9}$$

hva kan du slutte om $\pi(x)$? Beurling viste at for $\alpha > 3/2$, så var $\pi(x)$ asymptotisk lik $x/\log x$, altså svarende til primtallsatsen. Han viste også mer. Hvis dette, det vil si (9), holder for alle α, så kan du gjøre tilsvarende skarpere ting. Da har du at $\pi(x)$ er lik integrallogaritmen av x pluss $o(x/\log^\beta x)$ for alle β, altså

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + o\Big(\frac{x}{\log^\beta x}\Big) \tag{10}$$

Integrallogaritmen kan defineres på mange måter, men la oss si at $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$.

Men er det slik at Beurlings bevis bruker primtallsatsen?

Nei, det bruker ikke primtallsatsen. Beurlings bevis er et analytisk bevis. Jeg kunne lage et elementært bevis, men jeg må anta at restleddet her er $o(x/\log^2 x)$, da kan jeg få det til.

Jeg har ofte fundert på om det var mulig å forbedre mitt bevis så at det gjaldt for $\alpha > 3/2$, men jeg har ikke hatt tålmodigheten til å utarbeide det. Jeg kan ikke innse hvorfor det ikke skulle være mulig.

Du har selv mottatt Fields-medaljen. For tre år siden ble Abel-prisen innstiftet. Hva mener du generelt om den type vitenskapelige priser, synes du det er positivt?

Det fremmer ikke vitenskapen, det er ingen som gjør det vitenskapelige arbeidet fordi det finnes priser, det kan jeg ikke tenke meg.

Tror du en gjør matematikken en tjeneste i den forstand at matematikk får mer omtale og blir mer kjent i offentligheten?

Om det tjener matematikken å få mer omtale er et spørsmål.

Ja, det er sant, på godt og vondt.

En pris, det gjør en eller et par personer glad, men det skaper hver gang flere skuffede, skulle jeg tro.

Har man prestasjonsangst etter at man har fått en pris som for eksempel Fields-medaljen?

Jeg tror ikke det egentlig, jeg tror at det skulle mer inntreffe i en høyere alder. Hvis det tildeles folk som er så vidt unge er de nokså immune mot slike ting.

Hva mener du så om Abelprisen og tildelingene av den?

Jeg foreslo første gang Serre og Grothendieck som mulige kandidater, som de jeg skulle foretrekke. Jeg trodde nok at det skulle bli Serre, og det ble det jo også. Senere har jeg ikke gjort noe forslag. Jeg er ikke så særlig fornøyd med hvordan de har håndtert prisen. Det skulle være en pris i matematikk som gjaldt matematiske idéer, og det med å dele den opp og se til at forskjellige områder, som for eksempel anvendt matematikk, skal bli tilgodesett, må jeg si er nokså idiotisk.

En av grunnene til at du ikke har fått Abelprisen, er kanskje at du er norsk?

Jeg er litt for gammel, tror jeg. En aldersgrense bør en kanskje ha. Hvis man gir den til noen i min alder, er det bare arvingene som nyter godt av det. Det kan selvfølgelig komme vel med, da det kan hjelpe dem til utdannelse av barnebarn for eksempel.

Et berømt problem som ble løst for noen år siden var Fermats siste teorem. Mange sier at dette var en seier for moderne matematikk, at man måtte bruke et stort maskineri for å løse dette. Vi har et spørsmål til deg i den anledning. Tror du at det vil komme et veldig enkelt bevis med tiden, eller tror du at dette er fremtiden, at de store maskinerier vil måtte trenges for å løse tilsynelatende elementære problemer, à la Fermats problem?

Det er nok mulig at man kan finne enklere bevis noen gang i fremtiden. Jeg kan ikke si i hvilken retning. Det er to ting: det kan finnes en stor forenkling

av dette bevis som beror på sammenhengen mellom den kubiske kurven som må eksistere hvis det finnes en løsning, men det kunne også være at man kunne finne en bevis som unngår å trekke inn denne sammenhengen. Jeg tror ikke at man vil gjenoppdage Fermats opprinnelige bevis.

Hvis det fantes?

Man kan vel ikke tvile på ham? Han var en meget begavet mann, Fermat. Ingen tvil om det.

Men du tror ikke at han hadde beviset?

Enten hadde han det, og han kunne ikke finne plass til å skrive det ned, eller så oppdaget han senere at det ikke var helt riktig sånn som han hadde trodd. Det er lite sannsynlig at han hadde noe bevis fordi man visste litt for lite om algebraiske tall på den tid. Hvis alle algebraiske ringer hadde hatt en pen euklidisk algoritme så skulle det ha vært mulig for ham å konstruere et bevis, men det er jo ikke tilfelle.

Vi syntes det var litt interessant det du sa her i sted om Grothendieck, at du hadde foreslått ham for Abel-prisen. Grothendieck var jo, hva skal man si, en av det forrige århundrets store maskinbyggere, så du har en viss sans for sånne maskiner og?

Grothendieck var utvilsomt en uhyre begavet mann, og han gjorde jo en hel del. Riktignok var André Weil ikke så begeistret for Grothendieck. Han hadde visse innvendinger mot Grothendiecks teorier, at det ikke fantes noen riktig "intersection theory", som han sa. Jeg tror at han hadde visse fordommer også. Men Grothendieck gjorde jo en del andre ting, blant annet i analyse, som var ganske geniale og nokså uventet, må jeg si.

Hva vurderer du selv som ditt beste matematiske resultat?

Det må være sporformelen.

IV

Utskrift av videointervju med Atle Selberg i Fuld Hall, Institute for Advanced Study, Princeton 14. og 15. november, 2005 ved Nils A. Baas og Christian F. Skau.

© 2007 Nils A. Baas og Christian F. Skau

Part I

14. november 2005.

Vårt første spørsmål til deg er, når gjorde du din første matematiske oppdagelse, og hvor gammel var du?

Jeg må si, alderen kan jeg ikke presis huske, men jeg vet vi var nylig flyttet til det hus i Nesttun ved Bergen hvor vi ble boende i mange år. Det var ikke så lenge efter det, så jeg må ha vært syv eller åtte år gammel. Og det var en gang vi lekte sammen med noen fra naboskapet der, et ballspill. Jeg kan ikke nu huske presis om det var langball eller fotball. Det var bare de to tingene vi gjorde, i grunnen der. Jeg tror det var langball, for der er det gjerne mer anledning til å stå, for en del tar pause mens andre ting foregår. For i langball er det også slik at man skal stå stille. Jeg gjorde også ganske mye hoderegning og sånt. Jeg regnet ut kvadrattallene oppover, og tok differansen, og jeg oppdaget at jeg fikk ulike tall. Jeg greide da å faktisk bevise at dette gjaldt generelt ved at jeg, som man ville utrykke det hvis man skriver det i formler, mellom n^2 og $(n+1)^2$ så skjøt jeg inn tallet $n(n+1)$ og da er det lett å regne ut differansen til begge sider, og så får man $2n+1$ som summen, n pluss $n+1$. Og selvfølgelig, jeg brukte ikke n, jeg bare tenkte meg ... gjorde meg i tankene som tallet og tallet pluss ett og sånn. Og det gjorde et inntrykk på meg at jeg fant dette her. For eksempel det følger jo av dette, om du summerer de ulike tallene og oppover, så får du bare kvadrattall. Noe senere så fant jeg på samme måte, og det ble veldig nyttig for meg i hoderegning, at $a^2 - b^2$ er det samme som $(a-b)(a+b)$. Og det kan vises på samme måte, at mellom a^2 og b^2 skyter inn tallet ab, produktet av de to. Og da kan man igjen lett se differansen til begge sider, og så får man denne formelen. Og den fant jeg var ganske nyttig.

I de tidlige formative årene, mens du ennå var i gymnasiet, var det enkelte matematikere som stod for deg som forbilder, og som fikk innflytelse på hva du valgte senere som forskning i matematikk?

Vel, da jeg var i gymnasiet hadde jeg allerede lest ganske mye matematikk, så jeg var jo kjent med navnene til en hel del. Men jeg kan ikke egentlig si at de var forbilder for meg. Fordi jeg tenkte jo ikke på ... jeg mener for eksempel et navn som Abel eller Riemann eller for ikke å snakke om Gauss. Det falt meg ikke inn å bruke de som forbilder, for jeg tenkte jo at de lå jo langt foran hva jeg kunne regne med å prestere noen gang. Så jeg kan ikke si å ha hatt noe forbilde i den forstand. Det fantes en del matematikere som jeg beundret, men de var ikke forbilder. Jeg mener, i mitt valg av hva jeg ville lese og ville beskjeftige meg med så hadde jeg aldri noen tanker på å følge efter noen bestemt. Det var mer hva som appellerte til min fantasi.

Men når ble du kjent med disse navnene slik som Abel, Gauss og Riemann? I hvilken alder?

Jeg mener, vi hadde jo disse bøkene i min fars bibliotek. Så jeg så på disse bøkene til dels før jeg kom i gymnaset, selv om jeg ikke forstod noe særlig av det på den tiden. Jeg måtte jo først lærer meg litt av grunnlaget, som jeg gjorde på en noe ubalansert måte, får jeg si. Den første store lærebok jeg tok fatt på var da jeg var 12-13 år gammel, jeg begynte å lese Størmers bifagsforelesninger i matematikk. Grunnen til det var at da jeg bladde i denne boken kom jeg over en formel som jeg syntes veldig merkverdig. Nemlig en rekke som var først oppdaget av Leibniz. At

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \cdots$$

med de ulike tallene som nevner og med avvekslende fortegn. Og dette syntes så merkverdig at jeg bestemte meg til at jeg ville lese i hvert fall så langt at jeg kunne forstå hvordan dette hang sammen. Men det ble jo til at jeg leste hele denne boken, selv om jeg syntes begynnelsen var nokså kjedelig for den begynte med å definere de reelle tall ved hjelp av det man kaller Dedekind snitt. Det syntes jeg, for det første, var besværlig å lese gjennom - det var jo uinteressant og dessuten var det nokså betydningsløst, fordi jeg hadde inntrykk av at jeg allerede visste hva et reelt tall var. Men efter jeg var ferdig med dette første kapittel, så ble stoffet mer interessant, så jeg kom efterhvert til denne Leibniz-rekke og forstod hvordan den ble utledet og så videre. Jeg må si at Størmers bifagsforelesninger var en veldig god bok, synes jeg. På mange måter kanskje, av alt det jeg har lest var det kanskje den bok som betydde mest for min utvikling som matematiker.

Før vi går videre, kunne du si litt mer om din oppvekst og hvilke steder i Norge du føler deg mest knyttet til?

Jeg er født i Langesund, men har ingen erindringer om Langesund. En del av mine eldre søsken husket Langesund svært godt, men jeg var efter hva jeg ble fortalt omkring syv uker gammel da vi forlot Langesund og reiste til Voss. Så Voss er det første sted jeg kan huske. Vi ble der i flere år. Vi dro fra Voss da jeg var cirka 5 år. Enten litt før eller litt efter jeg ble 5 år. Jeg er ikke riktig sikker på det. Men, jeg har ganske godt minne om særlig de senere årene. Begynnelsen av mitt opphold der kan jeg selvfølgelig ikke huske noe av. Jeg var litt for ung for det. Vi bodde også på forskjellige steder der, først et sted som jeg har veldig vage erindringer om, fordi jeg tror jeg var ikke stort mer enn to år eller så da vi dro derfra. I mellomtiden hadde min far bygget et hus, en villa, ikke så langt fra jernbanestasjonen faktisk på Voss. Vi flyttet inn der. Det huset står fremdeles. Jeg har selvfølgelig ingen ideer om hvem som bor der nå. Jeg har ofte gått opp og sett på det når jeg har vært på Voss, som jeg har besøkt en hel del i de senere år når jeg har vært i Norge. Mye for det jeg har noe slekt der, og dessuten, mine foreldre ble begravet der. Og også min første kone.

Er hun også begravet på Voss?

Ja, hun er begravet der. Jeg kommer også til å bli begravet på Voss.

Hvor flyttet dere så fra Voss?

Det er som jeg sa da jeg var cirka fem år gammel. Det er en episode som jeg husker ganske mye av fra like før flyttingen, men jeg burde kanskje ikke fortelle den.

Vi prøver!

Min bror Ole som var litt over to år eldre enn meg hadde fått en gyngehest, jeg tror cirka ett år før. Og det må jeg si, jeg hadde holdt dette imot ham at han hadde den gyngehest og at jeg ikke hadde noen gyngehest. Så jeg, før vi flyttet fra Voss, så husker jeg sa til ham at jeg ville hugge bena av gyngehesten før vi skulle reise. Det kan jo sees på som et forsøk på å gjøre flyttingen noe lettere. I alle fall, han trodde ikke noe på meg, men jeg fant en øks og hugget benene av gyngehesten. Så han hadde ingen gyngehest lengre da han flyttet fra Voss.

Og da var det til Bergen dere flyttet fra Voss?

Vi flyttet ikke til Bergen, men min far hadde da opptatt en stilling i Bergen ved Syneshaugen skole. Han var lærer i gymnaset der. Vi flyttet først til et sted noe utenfor Bergen, på den såkalte Bergensbanen, et sted som het Hop, der bodde vi nesten ett år, og så flyttet vi til Nesttun, hvor vi ble boende ganske lenge. Jeg flyttet vel fra Nesttun i enten '32 eller '33. Jeg var i tredje middelskoleklasse da vi flyttet på høsten. Min far hadde allerede reist dit. Men så tok det en tid å skaffe hus for familien der, så vi ble værende på Nestun en tid. Vi skulle også selvfølgelig selge huset vi hadde på Nestun og arrangere flytningen, så jeg ble gående litt på skolen i Bergen på høsten '32 eller '33, jeg skulle kunne regne det ut hvis jeg ... Jeg og min bror Ole gikk fremdeles på skole i Bergen, han var begynt i Gymnaset der. Men vi syntes efterhvert at det var ikke i grunnen så nøye. Huset var allerede solgt, så vi bodde ikke med noen andre av familien, men bodde noe annet sted de to av oss. Så efterhvert, vi bestemte oss til at vi ville ikke gå på skolen lengre men vente til vi kom til Gjøvik og begynne der. Så vi sluttet å gå på skolen. De folkene vi bodde hos trodde at vi gikk på skolen, men vi, får jeg si, drev omkring på forskjellige steder og det kunne være ganske interessant også, for så vidt. Men ble jo slutt på det selvfølgelig. Når vi kom til Gjøvik begynte vi på skolen igjen.

Så det var på Gjøvik du gikk på gymnasiet?

Ja, der gikk jeg også ut 3. middelskoleklasse, og tok Middelskoleeksamen, og så begynte jeg på gymnaset. På gymnaset gikk jeg bare to år. Jeg bestemte meg efter å ha gått første klasse av gymnaset at det ble litt lenge igjen, så jeg bestemte meg til å hoppe over en klasse og begynte i 3. gymnasklasse efter den første. Jeg måtte ta en spesiell eksamen i tysk for å kunne gjøre det, men det gikk jo nokså lettvint. Min tysk var ganske god, for jeg hadde lest ganske mye tysk litteratur. Vi sluttet skolen, altså gymnasiet, samtidig, min bror Ole og jeg på tross av aldersforskjellen. Han var litt over to år eldre.

Dere var ni søsken og derav fem gutter. Og du var den yngste?

Jeg var den yngste, ja.

Dere fem gutter ble jo alle professorer, og tre av dere i matematikk. Hadde dine eldre brødre noen innflytelse på ditt valg av matematikk som felt?

Jeg må si, hva som gjorde at jeg valgte matematikk var til dels hva jeg hadde lest på egenhånd i min fars bibliotek, og det drev meg i aller tidligste år også. Før jeg ble interessert i å se på de matematiske bøkene, så må jeg tilstå jeg leste mest i en del leksikoner i huset. Ett norsk, som ikke var så veldig stort, men også et stort tysk ett, som jeg selvfølgelig ikke riktig kunne forstå ordene i. Men det var ganske mange interessante illustrasjoner i det, så jeg bladde mye i det og så. Men i det norske leste jeg en hel del. Ganske tidlig. Jeg tilbrakte ofte en hel del av tiden efter skolen med å sitte med forskjellige bind av dette norske leksikonet og se på artikkel efter artikkel. Men jeg må si på den tiden interesserte jeg meg litt mer for kjemi enn for matematikk, og mer spesielt, jeg var interessert i ting som eksploderte.

Men da du begynte å studere, vurderte du ikke å studere kjemi, sammen med matematikk?

Nei, jeg tenkte at kjemi var ikke noe fag for meg, for der må man ta ganske mye laboratorieforsøk. Jeg bestemte meg til, for sikkerhets skyld å ta fysikk som jo har noe laboratorium, men ikke på langt nær så mye som kjemien. Ellers hadde jeg, som bifag, ved siden av fysikken, så hadde jeg mekanikk og astronomi.

Dine to eldre brødre, Henrik og Sigmund, hadde de noen innflytelse på ditt valg av felt, innenfor matematikk?

Jeg må si, den som hadde en innflytelse var min bror Sigmund som jeg snakket mer med. Han hadde også begynte å lese matematikk på egenhånd. Og han gjorde meg oppmerksom på - for eksempel - en bok i min fars bibliotek, som jeg nok vel ikke hadde åpnet hvis han ikke hadde vist den til meg. Det var en algebra bok av en franskmann, Serret. Men den var oversatt til tysk, så jeg kunne lese den, efter jeg hadde begynt å lære noe tysk. Og det hadde noe i seg som fanget min interesse, og som han viste meg. Det var noe av Chebyshevs arbeider om primtallenes fordeling, og dette syntes jeg var uhyre interessant, så det leste jeg gjennom. Jeg må si at resten av boken var ikke verdt å lese, så jeg lærte ingen algebra egentlig. Min far subskriberte på Norsk Matematisk Tidskrift, og av og til så jeg på artikler der. Og det kom en artikkel av Carl Størmer om Ramanujan. Den syntes jeg var uhyre interessant. Men, selvfølgelig, det var ikke noe mer. Min far hadde ingen bøker om Ramanujan, selvfølgelig. Men min bror Sigmund hadde vel lest samme ting, og hadde tatt ut fra universitets bibliotek Ramanujans samlede verker, eller hva det nu heter, kanskje "selected" verker, som var publisert av G. H. Hardy. Han tok dette med hjem i en eller annen ferie så jeg fikk se den, og det gjorde et stort inntrykk på meg. Og jeg må si, disse to ting kom nok til å bestemme mye mine framtidige interesser i matematikk. Jeg mener primtall, og selvfølgelig, når man er interessert i primtall så følger det at man blir interessert i zeta-funksjonen, for eksempel. Og av Ramanujan kom interessen for modulformer og den slags, og

det leder selvfølgelig også til en interesse for mer generelle automorfe funksjoner og former. Så disse ble hovedinteresser. Jeg ble senere også interessert i såld-metoden. Den kom ikke i grunnen av noen ytre innflytelse, men fordi jeg i forbindelse i mitt arbeide med zeta-funksjonen så fikk jeg noen ideer som ledet meg inn til den. Først til den annen måte å betrakte såld-metoder på, og til et mylder av arbeider på dette området også. Men selvfølgelig dette var jo forbundet med spørsmål om primtall så det var jo egentlig ikke ut av det generelle området som Sigmund hadde introdusert meg til. Jeg kan ikke si at min bror Henrik hadde noen innflytelse på meg, men han var hjelpsom. Han maskinskrev min første avhandling som jeg fikk framlagt i høsten 35, da jeg begynte ved universitetet. Størmer fremla den i videnskapsakademiet og han ikke bare maskinskrev den men han også førte inn formlene med sin håndskrift fordi min håndskrift ikke var så vakker, og den var også noe stor. Hans var mer delikat, får jeg si. Og så det passet bedre.

Du sa at du allerede tidlig hadde en ganske god forståelse av hva de reelle tall var, du syntes ikke Dedekind snitt var nødvendig, og jeg husker du nevnte en gang at du kalte desimaltall for proletariatet av reelle-tall. Men ligger det i det at primtallene, det er liksom overklassen, adelen blant tallene?

Selvfølgelig. Jeg mener, for det første heltallene danner jo en overklasse, får man si blant de rasjonale tall, og såklart enda mer i forhold til de generelle reelle tall. Men jo, primtallene er de mest interessante av heltallene, synes jeg.

Men blant primtallene, er der noe hierarki der?

Jeg skal kanskje nevne at den tyske matematiker Kronecker uttalte seg jo om dette: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen. Alles andere ist Menschenwerk". ("De hele tall er skapt av Gud, og alt annet er menneskeverk.") Matematikeren Siegel, som var her en stund, hadde en liten modifikasjon av dette. Han sa nemlig at "Nur die Zwei ist von dem Teufel gemacht." For det er så at i tallteorien, er primtallet 2 en unntagelse, det oppfører seg helt annerledes enn de andre primtallene.

Jeg lurer på, ville det være en ide om du skrev opp zeta-funksjonen på tavlen?

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Rekken konvergerer så lenge realdelen av s er større enn 1.

Kan du si noe om hvorfor denne sier så mye om primtallene?

Vel, den kan også skrives på en annen måte, som et produkt utstrakt over primtallene. Det er den såkalte Eulers formel.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad (*)$$

Det merkverdige er at den ikke ble brukt, i grunnen, til å finne ut noe om primtallene. Det er merkverdig at verken Legendre eller Gauss, som begge var

interesserte i approksimasjoner til antallet av primtall mindre enn, la oss si x, som vi gjerne betegner ved $\pi(x)$, og approksimasjoner til dens asymptotiske utrykk, at de aldri prøvde å se på Eulers formel. Den første som faktisk brukte dette i sine arbeider var Chebyshev og deretter Riemann. En del ting ville vært mye annerledes da. For eksempel, Legendre ville ha innsett at i den asymptotiske formel som han gir, så er hans konstant gal. Det skulle være en 1 og ikke en $1.0\ldots$ og så noen andre siffere. Det er lett å se. Man behøver bare å betrakte dette som en reell funksjon av en reell variabel og se hvordan den oppfører seg når s nærmer seg 1 ovenfra. Og det er veldig lett å se hvordan den oppfører seg ved å sammenligne den med et integral av samme slag. Så er det klart at den oppfører seg som $1/(s-1)$ pluss noe som er begrenset. Av dette følger allerede at hvis man ser nøyere på det, at hvis det finnes en god elementærfunksjon som approksimerer, så er det i virkeligheten den såkalte integrallogaritme. Dette ble senere vist av Chebyshev, som sagt. Men det kunne ha vært gjort veldig lett av Legendre eller Gauss om de hadde brukt Eulers formel. Og det er merkverdig at de ikke gjorde det, for selvfølgelig, de kjente jo formelen til Euler begge to.

Var det så at Abel kommenterte noe om dette da han var i København?

Han kommenterte Legendre, som i sin store bok om tallteori, så nevner han denne, og han gir et slags argument som han kaller et bevis for den. Og Abel skriver hjem til Holmboe at denne formelen som Legendre gir synes han må være den merkverdigste i hele matematikken. Men så sier han at beviset kan du agitere deg på til jeg kommer hjem. Men Abel kan ikke ha vært så veldig kritisk på den tid, som han ble senere, må jeg si. For et egentlig bevis er det ikke. Legendres argument gjør den meget plausibel, men det er ikke noe virkelig bevis der.

Denne formelen $(*)$, den gir jo oss sammenhengen mellom zeta-funksjonen og primtallene. Kunne du da si noe videre om for eksempel hvorfor nullpunktene til zeta-funksjonen sier så mye om primtallenes fordeling? Kan du si noe enkelt om det?

Det kommer først frem gjennom det Riemann gjorde. Riemann var den første som begynte å se på denne funksjonen. Chebyshev betraktet den bare for reelle variable, faktisk. Men han kan fortsette den analytisk også, men han bruker ikke å se på den som en kompleksvariabel-funksjon i sitt arbeide. Og det er nok for hans formål å se på den som en funksjon av en reell variabel. Og egentlig bare for s større enn 1, hvordan den oppfører seg når s'en nærmer seg 1 ovenfra. Men Riemann så på den som en funksjon av en kompleks variabel og viste den generelle analytiske fortsettelse. Det er egentlig ikke vanskelig å vise, men han viste det i en form som også gav ham funksjonalligningen. Nu må det sies at funksjonalligningen var egentlig ikke ny heller. Den finnes også noe i tidligere litteratur. Faktum er at allerede Euler hadde en form av funksjonalligningen. Og det var en del andre som jeg husker jeg fant i min fars bibliotek. Det var en del bøker jeg så på. Blant annet en bok av en tysk forfatter som het Schlömlich som hadde skrevet noe som het Kompendium der Höheren Mathematik, egentlig om analyse, som hadde en

hel del forskjellige ting. Blant annet om hva han kaller "synectische-funktionen", det er i virkeligheten hva vi kaller analytiske funksjoner. Denne boken kom ut ganske mange år før Riemanns avhandling, og han betrakter en del Dirichletrekker som dette og beviser funksjonalligninger, for eksempel, og analytiske fortsettelser. Men han gjør ikke noe med det, hverken tallteoretisk eller noe som helst. Jeg vet ikke hvor mye av dette Riemann kan ha sett. Hva som er sikkert er at Riemann har sett Chebyshevs arbeider, men han unngår å nevne det i sitt arbeide. Jeg har hørt av en person som har vært i Göttingens bibliotek og sett på Riemanns opprinnelige manuskript til denne avhandlingen, og liksom i papirer omkring det ... Riemann nevner i sin avhandling bare to matematikere som har beskjeftiget seg med primtallene, og det er begge matematikere fra Göttingen. Den ene er Gauss og den andre er Lejeune Dirichlet. Men Riemann hadde lest Legendres tallteori mens han gikk i gymnasiet, det vet vi fordi hans matematikklærer på den tid, som jeg tror hadde navnet Schmalfuss, såvidt jeg husker, nevner at han lånte denne boken til Riemann og at Riemann gav den tilbake efter en uke, jeg tror det var en uke. Det er et ganske solid verk dette her, og Riemann sa at det var en vidunderlig bok, og at han kan den faktisk utenat allerede. Så han må ha lest den gjennom ganske grundig, men han nevner ikke Legendre heller. Hva jeg blev fortalt var at i hans manuskript, så finnes navnet Chebyshev men han har strøket det ut, og nøyd seg med å nevne bare disse som kom fra Göttingen.

Kan du illustrere hva Riemann hypotesen egentlig sier - kanskje du kunne skrive det på tavlen?

Den sier rett og slett at i den analytiske fortsettelse, funksjonalligningen, så finnes det noen nullpunkter som er de såkalte trivielle nullpunkter. De kommer inn på grunn av disse gamma-funksjonene som inngår i funksjonalligningen. Og de kommer på like negative heltall, men så finnes det også en del komplekse nullpunkter som må ligge med realdelen mellom 0 og 1, og symmetrisk. Deres realdeler må ligge symmetrisk om linjen 1/2 fordi at hvis man har ett nullpunkt så er også 1 minus dette også et nullpunkt. Og disse kalles de ikke-trivielle nullpunkter. Og Riemann, faktisk, beregnet en del av dem og fant at disse første som han beregnet de lå på linjen med realdel lik 1/2 og var enkle nullpunkter. Så han formodet at de alle lå på den linjen. Og han hadde funnet en meget god approksimasjonsformel for å beregne funksjonen i denne stripen hvor realdelen ligger mellom 0 og 1, og særlig på linjen hvor imaginærdelen er lik 1/2. Så han hadde kunnet gjøre numeriske beregninger gående opp ett stykke, og hadde funnet flere nullpunkter på linjen, og ingen utenfor. Så han hadde et visst grunnlag for å gjøre sin formodning. Dessuten var det dette at denne eksplisitte formel som han angir for $\pi(x)$, den blir enklere, den vil ha det minste restledd så å si. Det opptrer visse rekker som inneholder nullpunktene. Og disse rekkene vil ha den minste innflytelse hvis de alle ligger på denne linjen hvor realdelen er lik 1/2. Det vil føre til den enkleste fordeling, den jevneste fordeling av primtallene hvis det er slik. Det er også filosofiske grunner til å tenke seg at de skulle være der. Særlig hvis man for eksempel er tilhenger av

Leibniz' filosofi, at i denne verden er ting så bra som de kan være, og da skulle man tro at det i hvert fall må gjelde for primtallene.

Kunne du tegne på tavlen hvor nullpunktene skal ligge? Du har sagt det med ord, men det kunne jo være fint med en tegning.

(Selberg skriver på tavlen) Vanligvis, man betegner realdelen med σ og imaginærdelen med t. Og du har den linje hvor sigma er lik 1/2. Så ligger da nullpunktene nødvendigvis i alle fall i denne stripen der σ ligger mellom 0 og 1, som kalles ofte for den kritiske stripe, og linjen $\sigma = 1/2$ kalles gjerne den kritiske linje. De ligger i alle fall symmetrisk til denne linjen her, slik at om det var et nullpunkt på denne side så måtte det være et nullpunkt på samme avstand med samme t, men med σ like langt fra 1/2 på den andre siden. Hvilket betyr at de som ikke lå på linjen måtte forekomme i par, på hver side. De som er på linjen kan være enkle nullpunkter som er alene, og nu har man beregnet med moderne regnemaskiner nullpunktene uhyre langt opp, og de ligger alle på linjen, de er alle enkle. Så det kan i dag vanskelig kastes noe tvil på Riemanns hypotese, må jeg si. Den numeriske evidens er nu ganske overveldende. Det var den ikke da jeg begynte å arbeide, får jeg si. For da hadde man bare beregnet den numerisk for en forholdsvis kort strekning, som ikke kunne regnes for typisk på noen måte. Det fantes gode grunner til å kaste tvil på den fra det synspunkt, men ikke at jeg egentlig hadde noen tvil, noen gang.

Kan du fortelle oss litt om din studietid i Oslo? Hva du arbeidet mest med da?

Som sagt, jeg kom til Oslo høsten '35, 1935 selvfølgelig. På den tid var det ganske mange av familien som var i Oslo, så vi hadde leiet en leilighet oppi Ullevål Hageby, i en villa med to leiligheter i. Vi hadde toppleiligheten, og det var en skipskaptein som hadde leiligheten under oss. Jeg kan ikke huske hans navn. I alle fall, det var, skal vi se, ved siden av meg selv, så begynte min bror Ole også sine studier den høsten i filologi, for hans vedkommende. Mine brødre Arne og Henrik var også begge i leiligheten. Henrik var dosent ved universitetet, og min bror Arne var ingeniør ved brokontoret i vegvesenet. Dessuten var min eldste søster Anna der. Hun tok noen studier der. Hun var lærer egentlig. Min bror Sigmund ble værende på Gjøvik. Han hadde fått pleuritt, så han hadde ligget til sengs over hele sommeren, og ble også liggende hele høsten. Det var sent på høsten da han kom ned til Oslo. Han hadde lagt på seg en hel del mens han lå til sengs, kan jeg huske. Så, det var for så vidt så mange av oss at det var en god ide å leie en leilighet. Vi hadde også en housekeeper, eller en husholder, som det heter. En dame som kom fra Hardanger. Hennes første navn var Martha, jeg kommer ikke på nu hva hennes siste var. Det spiller vel ingen rolle, kan jeg anta. Så jeg levde nokså forskjellig fra de fleste andre studenter som kom utenfra til universitetet. Jeg var således på den tid fremdeles i familien. Det første faget jeg tok var astronomi. Eller, det fantes jo også dette de kalte forberedende prøver. Latin hadde vært gitt opp på den tiden, men det var fremdeles noe i filosofi og psykologi, som de kalte det. Jeg gikk selvfølgelig ikke på noen forelesninger i dette, jeg bare så litt på disse

bøkene. Jeg fulgte forelesningene i astronomi, som var til dels astrofysikk og til dels hva man kaller himmelmekanikk. Ved siden av det så drev jeg da med min matematikk ved siden av. Jeg fikk mitt første arbeide framlagt av Carl Størmer efter at det var blitt maskinskrevet av min bror Henrik. Også formlene ble innført av ham. Så hvis man ser på manuskriptet der ligner det ikke mye på mine senere manuskripter. Da jeg begynte å føre inn formlene selv. Det ser mye penere ut dette første.

Hva var emnet i dette arbeidet?

Det var inspirert av Ramanujan, får jeg si. Det var skrevet på tysk på den tiden, for det var mitt beste språk, "Über einige arithmetische Identitäten". Og jeg hadde en del formler av forskjellig art der. Det ble send til England, til en matematiker G. N. Watson, som hadde arbeidet en hel del med Ramanujans ting, for hans bedømmelse. Det tok ganske lang tid før han sendte det tilbake med en uttalelse. Jeg skal egentlig ikke klage, for senere var jeg heller ikke så særlig kvikk hvis jeg fikk tilsendt noe jeg skulle se på. Så jeg må si at Watson var nok ikke på noen måte langsommere enn hva jeg har vært. Men jeg synes det tok lang tid, og Størmer sendte efterhvert, tror jeg, ett purrebrev på ham, så da kom det tilbake. Han hadde ett par forslag på endringer i notasjonen og sånn. Det gikk jo greit altså. Så det kom da ut, og jeg fikk dette publisert. I mellomtiden var jeg begynt å arbeide med noe annet som også holdt på å gjøre med Ramanujans saker. Det var om hans såkalte mock theta funksjoner. Watson hadde skrevet om noen av dem. Ramanujan hadde nevnt tre klasser av funksjoner: mock theta funksjoner av orden 3, 5 og 7, som han kalte dem. Og mellom de første hadde han gitt visse relasjoner. Mellom disse av orden 7 hadde han ikke gitt noen relasjoner. Mitt arbeide gikk i det vesentlige ut på å vise at de hadde den opptreden i nærheten av singularitetene på enhetssirkelen, nær de rasjonale punkter på enhetssirkelen som de skulle ha ifølge hans definisjon. Og jeg kunne bruke en del av det jeg hadde funnet i mitt første arbeide, noen av disse formlene, til dels, for å kunne gjøre disse oppskatningene som var nødvendige. Så jeg kunne vise at de oppførte seg som Ramanujan sa de skulle. De var mock theta funksjoner i den forstand at de oppførte seg som en riktig theta funksjon opp til en feil som var begrenset eller liten når man nærmet seg singularitetene. Så dette arbeidet gjorde jeg ferdig også under det første året, og gav det til Størmer. Det ble trykt året efter. Ja, jeg tok selvfølgelig også noen eksamener på universitetet, men det er ikke så mye å snakke om. Jeg mener efter astronomi tok jeg mekanikk som fag, og så til slutt fysikken, som jeg hadde utsatt på grunn av at laboratiorie-tingen tok sin tid, selvfølgelig. Jeg gikk på forelesninger i mekanikk også. Det var Edgar Schieldrop han var på mange måter en god foreleser, men han hadde den feil, må jeg si, at han ofte gikk nokså lett henn over ting som i virkeligheten var nokså vanskelige, mens han spanderte lang tid over det som var egentlig ikke så vanskelig. Men han fremstilte det som om det var vanskelig. I fysikk gikk jeg litt på Lars Vegards forelesninger. Men Sem Sæland som foreleste også, han var gått av som rektor og kommet tilbake

til fysikken. Jeg hørte på en forelesning av ham og den synes jeg var så dårlig. Det var ikke verdt å høre på ham lenger, tenkte jeg. Så jeg leste fysikk utenom. Men selvfølgelig, jeg gikk på laboratoriet og jeg ble satt... vi var jo to og to som arbeidet sammen. Da vi gjorde vårt første eksperiment... jeg så at denne som jeg var sammen med, jeg kunne ikke riktig ha tillit til ham når det gjaldt å håndtere de elektriske ting. Jeg så han var begynt å sette opp det første eksperimentet og det ville ha ledet til en kortslutning hvis jeg ikke hadde stoppet ham i tide. Så jeg fikk den avtalen at jeg skulle gjøre eksperimentet, så kunne han skrive det opp. Så det holdt vi oss til senere, og det gikk bra på den måten.

I astronomi, var det Rosseland som foreleste der?

Det var Rosseland som foreleste, ja. Vel, det var også noe litt annet, men denne observatoren, som det ikke var noe særlig å høre på, får jeg si.

Hva med matematikkforelesninger, gikk du på dem?

Vel, jeg gikk på Heegaards forelesninger fordi jeg hadde ikke lest noe større geometri. Jeg mener, jeg var ikke interessert i disse tingene. Men jeg måtte jo lære meg noe av det fordi det var jo eksamen i det. Så jeg gikk og hørte på Heegaard, som var forresten en ganske god foreleser. Heegaard var en veldig mangesidig mann, han kunne veldig mange språk. Han kunne blant annet gresk for eksempel, og oversatte en del fra... han skrev en del ting som var mer arkeologiske ting om egyptisk medisin og magi tildels, og oversatte papyrus som var skrevet på gresk i den senere tid, i den hellinistiske tid i Egypt og sånn. Jeg tror ikke han kunne oversette de riktig gamle ting som var skrevet på egentlig egyptisk. Men han var kunnskapsrik i det henseendet også utenom. En noe merkverdig mann på forskjellige måter, men hans forelesninger var i grunn ganske gode. Størmer gikk jeg på, tildels ut av høflighet, får jeg si. Jeg satt alltid langt bak, sånn at jeg kunne, om jeg ville tenke på noe annet. Men Størmer var svært hjelpsom til meg når det gjaldt å få mine ting publisert. Han spilte jo antagelig en rolle når jeg søkte om bidrag fra Nansenfondet. For det fantes en særlig mindre avdeling av Nansenfondet som kaltes for Abelfondet. Det hadde vært finansiert av en som het Hanevik, på en tid da han hadde penger. Han var en meget velstående mann under krigen og like efter den første verdenskrig, men så kom det en tid da det gikk veldig ned. Så han mistet det meste av det, de pengene han hadde. Hans tanke hadde vært egentlig å gjøre et mye større bidrag. Det skulle ha vært større dette Abelfondet. Det var ikke så stort, men det rakk i alle fall for mine behov. Og han hadde jo også lovet å skaffe Oslo en opera. Christopher Hanevik var hans navn. Men det ble det aldri noe av. Han førte en del saker for å få tilbake en del av de ting han hadde mistet. Han døde antagelig før disse tingene ble riktig avgjort. Det dro ut og ut... men vi skal ikke snakke mer om Hanevik i alle fall. Jeg må si jeg tror i grunn Størmer var også en god foreleser. Og han foreleste bare bifag på den tid. Før jeg kom til Oslo hadde han holdt noen forelesninger om gammafunksjonen for hovedfagsstuderende, men de var over da jeg kom. Han gav bare bifagsforelesninger mens jeg var der. Heegaard foreleste hovedfag. Da jeg senere tok matematikk som hovedfag, så

hørte jeg på min bror Henrik som foreleste funksjonsteori, i det vesentlige. Og på den tid var Skolem kommet til Oslo fra Bergen, og han foreleste algebra. Nokså gammeldags algebra. Han brukte den bok av Dedekind og noen annen, jeg kan ikke huske det andre navnet. Det var absolutt ikke moderne algebra, som man sier.

Hva slags geometri foreleste Heegaard på den tiden?

Han foreleste om algebraiske kurver for eksempel, og algebraisk geometri. Han foreleste om topologi, Riemannske flater, og sådann. Om differential geometri. Det var en hel del, ikke alle ting i samme semester. Dette her var hans hovedfagsforelesninger. Bifagsforelesningene var jo noe enklere stoff da.

Når fullførte du din hovedoppgave i matematikk?

Jeg fullførte den i '39. Året før hadde jeg allerede begynt på det som ble min hovedoppgave og jeg holdt et foredrag, et såkalt kort foredrag, på 20 minutter på den Skandinaviske kongress i Helsingfors i Finland. På den tid sa vi Helsingfors og ikke Helsinki. Det var min første forelesning, får jeg si, som jeg gav noen gang. Og den gikk forholdsvis bra. Den ble trykt i kongressberetningen, et forholdsvis kort referat av den.

Hvilket emne var det du behandlet?

Det dreide seg noe om modulformer. Framstillinger av modulformer ved Poincaréske rekker. En litt annen type enn de Poincaré hadde betraktet, og som ledet til visse formler for koeffisientene i disse modulformene, og en del konsekvenser som kunne dras fra dette.

Hvilken karakter fikk du på hovedoppgaven din?

Såvidt jeg husker fikk jeg 1 på hovedoppgaven hos Skolem. Han sa at den var egentlig for stor for en hovedoppgave. Den var på ganske mange sider. At det var mer enn doktoravhandling, men jeg ville jo ha hovedfagseksamen så jeg hadde ingen tanker på å bruke det som doktoravhandling. Den skrev jeg først en del år senere. Efter våren '39, da jeg tok min hovedfagseksamen, så gjorde jeg min første "instalment", eller første del av min militærtjeneste. Jeg hadde fått den utsatt et år på grunn av at jeg arbeidet med hovedfaget, og at jeg ville delta på denne kongressen i Helsinki, eller Helsingfors.

Men så ble det universitetsstipendiat?

Ikke med en gang, nei. Det tok et par år før jeg ble universitetsstipendiat. Det var en del andre folk som ventet på å bli universitetsstipendiater, og sånn. Det var ikke så lett å gå forbi, får en si, de som hadde mer ansiennitet.

Men så, etterpå fortsatte du å studere og å arbeide på egenhånd?

Jeg levde jo i Oslo de årene. Vel, altså høsten 39 hadde jeg egentlig tenkt å reise til Hamburg for å studere med Erich Hecke. Han hadde gitt et foredrag på

kongressen i Oslo i 1936 som var uhyre interessant, syntes jeg. Jeg hadde ikke vett nok til å gå på denne forelesning da kongressen foregikk, men jeg så den etterpå i kongressberetningen. Den gjorde et stort inntrykk på meg. Så jeg hadde bestemt meg for å dra dit og være i Hamburg det neste året. Jeg hadde fått et reisestipendium, men jeg bestemte meg for ikke å dra dit siden krigen brøt ut omtrent samtidig som jeg kom ut av militærtjeneste på Gardermoen. Jeg var i feltartilleriet, regiment nr. 2.

Kan du fortelle oss litt om hvordan du da ble involvert i krigen, i starten av den tyske okkupasjonen?

Først, jeg dro til Uppsala i stedet for til Hamburg. For jeg ville ikke dra til Hamburg efter at krigen var brutt ut. Jeg dro til Uppsala mest av to grunner: Den første var at jeg visste at de hadde en veldig god matematisk institusjon med et veldig godt og tilgjengelig matematisk bibliotek i Sölvegatan. Den såkalte Matematiska Institutionen der, som lå på den tid i noe som het Sölvegatan. Og faktum er at biblioteket var mye mer tilgjengelig den gang enn det er nu i Uppsala. Matematiska Institutionen har flyttet i mellomtiden. Det var et bra sted på den måten. Jeg arbeidet bra der, men den andre ting som hadde egentlig trukket meg til Uppsala var professor Arne Beurling som jeg hadde hørt på i Helsingfors i 1938. Han gav faktisk det foredraget der som gjorde størst inntrykk på meg, og jeg hørte på en hel del forelesninger, må jeg si. Men absolutt, Arne Beurlings foredrag var toppen for meg. Han var jo i Uppsala, men det viste seg da jeg kom til Uppsala at han var ikke der da. For han var kalt inn til militærtjeneste. Og han tjenestegjorde i kryptografitjenesten, så og si, og gjorde også en stor innsats der under krigen. Jeg traff ham bare en eneste gang den tid jeg var i Uppsala.

Det var en søndag da jeg var nede på biblioteket på Matematiska Institusjonen og arbeidet. Da kom Beurling inn, han var på besøk i Uppsala, og kom inn for å se efter noen ting i biblioteket. Jeg snakket med ham en del da. Men, det var et godt sted å arbeide. Jeg hadde ikke mye bruk for professorene der, men på den annen side, jeg skaffet meg en del venner. Det var en del yngre folk der. Vi brukte å gå ut sammen på eftermiddagen til et konditori som var i nærheten og sitte der en stund og ha kaffe og litt kaker kanskje. Snakke sammen om litt løst og fast, som det heter. Det var en dosent der som het Harald Bergström som ble en venn av meg. Det var en annen mann, han var en tallteoretiker på den tiden, en elev av Trygve Nagel. Det var en annen elev av Trygve Nagel, jeg kan ikke huske hans første navn. Det var Billing til efternavn. Han var også en elev av Nagel. Han levde ikke så lenge. Han døde et par år efter faktisk. Han var også en ganske.... han var sønn av en biskop husker jeg. Bo Kjellberg var der. Han var vel den yngste av de andre. Også var det en kjemiker. Han hadde noe interesse i matematikk. Han het Claesson til etternavn. Jeg kan ikke komme på hans fornavn, han ble senere professor i kjemi der og var formann for denne komiteen for Nobelprisen i kjemi i mange år. Jeg traff ham en del par ganger senere også, men dessverre, han fikk Alzheimer allerede i 60-årene. Han var ikke så svært gammel litt over 60, tror

jeg, da han fikk Alzheimer.

Hvor lenge var du i Uppsala totalt da?

Jeg må si jeg var der til ut i desember en del. Men jeg synes det ble så ufyselig vær der. Det var så ille når vinteren begynte å komme. Ikke at det var så veldig kaldt, men det var så surt og så mye vind. Og når det kom snø, det kom noe, så ble bare snøslaps i Uppsala. Det var vanskelig å holde sine føtter tørre, får jeg si. Jeg hadde likt Uppsala ganske bra tidligere, men jeg syns det var ille. Så jeg bestemte meg da i desember, jeg reiste hjem til jul i midten av desember tror jeg, at jeg ikke ville gå tilbake til Uppsala. Jeg ville like godt være om våren i Oslo og arbeide der. Riktignok, det var mer besværlig å få tak i bøker i Oslo. På Blindern hvor vi var, hadde vi svært lite matematiske bøker og tidsskrifter. Om man skulle ha noe særlig utenfor måtte man ned på Drammensveien til universitetsbiblioteket. Og det var så at man kunne ikke gå inn å ta ut selv å få ut av bokhyllene hva man ville ha. Man måtte se i katalogen og skrive ut en bestilling, levere den inn, og så var der noen som gikk og hentet. Det var en del ventetid selvfølgelig, og det var et besværlig system syntes jeg. Utvilsomt, matematikerne i Oslo var lite tjent med det i virkeligheten. Det var mye bedre å ha tingene delt opp slik at de er der hvor de brukes, eller i hvert fall ganske nære i samme bygning.

Hva skjedde så den 9. april 1940?

Jeg hadde gjort ferdig en del manuskripter mens jeg var i Uppsala. Og da jeg kom tilbake til Oslo om våren litt ut i januar, så gav jeg disse manuskriptene til Størmer og sa han kunne fremlegge dem. Det var to manuskripter, såvidt jeg husker. Ett som hadde noe av et utdrag av min hovedoppgave som ikke hadde vært nevnt i det jeg sa i Helsingfors i ′38, og en annen avhandling som jeg hadde skrevet, som handlet om dette som vil kalles Rankin-Selberg konvolusjon som jeg hadde fått ideen til og kompletterte på ett par dager. Mine kunnskaper var jo veldig sporadiske på mange felter. Jeg fant ut hva om var det invariante mål i det øvre halvplan når man betraktet det som en modell av den hyperbolske geometri. Det hadde jeg ikke. Saken er den at i disse arbeider jeg hadde sett på, som alle var på engelsk... Ramanujan, Hardy og disse andre. De var ikke så særlig interessert i den mer differensial-geometriske naturen av det hyperbolske plan. Det forekom ikke noe sted i deres arbeide. Men jeg hadde sett på det i en avhandling av en tysker, og med en gang jeg så det, så jeg at jeg kunne bruke det til å gjøre noe som jeg da skrev opp, og gjorde en del anvendelser av, som jeg også indikerte. Anvendelser uten bevis, får jeg si. For jeg tenkte at jeg ville skrive en større avhandling om dette senere. Disse arbeidene gav jeg da til Størmer i, jeg antar da i januar, da jeg kom ned til Oslo igjen. De ble fremlagt og efterhvert trykt. Men før det, vel kanskje i mars eller så, så jeg i et referat av en avhandling der i Zentralblatt. Jeg brukte å se på de forskjellige felt. Og jeg så det var en engelskmann, eller rettere sagt, jeg visste det ikke på den tid, men han var en skotte, som het Rankin, som hadde gjort noe av det samme, ikke riktig så generelt som jeg hadde gjort det. Hos han var det ikke en konvolusjon egentlig. Han hadde bare betraktet en Dirichletrekke

som var dannet ved kvadratene av koeffisientene til en modulform, mens jeg hadde betraktet en hvor man tok koeffisientene til en og koeffisientene til en annen form av samme type, men konjugert. Så hva jeg betraktet var en riktig konvolusjon av to og beviste funksjonalligninger for disse rekkene. Og hadde en del konsekvenser av dem. En av disse konsekvenser fantes også hos Rankin. Vel, jeg ble jo noe skuffet, selvfølgelig, men jeg hadde jo blitt skuffet før også. Da i forbindelse med dette med partisjonsfunksjoner.

Men så ble jo det hele avbrutt da krigen kom den 9. april. Vi ble jo vekket om natten. Det var allerede nokså forstyrrende nyheter om kvelden, får jeg si. Men om natten, selvfølgelig, gikk flyalarmen, så vi var oppe tidlig den morgenen, og jeg fant ut hva som foregikk. Så jeg pakket mine ting som jeg skulle ha med meg og dro opp til Gardermoen. Egentlig, mitt direktiv var at jeg skulle melde meg på tredje mobiliseringsdag. Men det stod klart for meg at dette var en situasjon der man ikke kunne følge reglene. Hvis jeg ville ut av Oslo og komme til min avdeling, så måtte jeg gjøre det med en gang for, jeg mener, da jeg dro ned til jernbanestasjonen så var tyskerne allerede kommet inn i Oslo. Jeg fikk et tog opp til Gardermoen, og der var en del folk og en hel del forvirring, får jeg også si. Det ble oppsatt en bataljon, en artilleribataljon som jeg da ble med i som såkalt peileskivefører. Det var egentlig ikke det jeg var trent for. Heldigvis fikk jeg ikke bruk for den spesielle trening som en peilerskivefører skal ha fordi vi stort sett når vi brukte våre kanoner, så hadde vi nokså direkte sikte. Det var en noe annen type krig enn hva man egentlig hadde planert for. I hvert fall da jeg gjorde militærtjenesten. Vi planerte for noe ganske annet, med mer nøyaktige observasjoner. Dette her var mer improvisert får vi si, alt sammen. Men vi fikk ferdig denne artilleribataljonen som var ledet av en Roar Hegstad, en major, og med en løytnant som hans stabssjef, Zeiner Gundersen, han ble senere sjef for generalstaben i Norge. Det vesentlige jeg kan huske om ham var, jeg hørte han hadde en veldig god eksamen fra krigsskolen, men han var forbannet hissig. Derimot, major Hegstad, må jeg si jeg fikk stor respekt for. Fordi det var ingenting som kunne oppsette hans temperament.

Så Zeiner Gundersens eksamen hjalp ham ikke så godt?

Vel, ikke der presis. Vel, i alle fall, jeg husker navnene på et par andre fra den avdelingen også, men det tjener ikke til mye å gjenta dem. Det var bare noen få av dem jeg kjente fra før av. De fleste folk jeg hadde gjort militærtjeneste med var ikke der.

Dro dere så oppover Gudbrandsdalen?

Vel, vi dro ikke til Gudbrandsdalen med en gang. Vi gikk på østsiden av Mjøsa. Fra der hvor vi var og fulgte oppover. Vi hadde en del trefninger. En ting som særlig sitter i min hukommelse det var på ett sted, jeg kan ikke huske navnet på det. Og jeg var da faktisk ved staben hvor Hegstad var, major Hegstad. Og det var en nokså stor åpen mark derifra, og senere var det skog nedenfor. Og vårt artilleri skjøt noe nedover der, og det foregikk en del øyensynlig. Men våre tropper trakk seg tilbake efterhvert. Men de første som trakk seg tilbake var elgene i skogen. Jeg

så 11 elger komme ut av skogen og over marken der. De dro hen noe annet sted. Jeg håper de fant ett mer fredelig sted. I alle fall, senere stoppet vi på en gård som het Bergseng, husker jeg. Og som lå litt syd for Hamar. Og efterhvert kom vi opp igjennom Gudbrandsdalen. Og da ble vi jo noe avløst. Det kom noen tropper utenfra. Britiske og noen kanadiske. Jeg må si, da jeg snakket med noen av dem, de sa de hadde ventet på å bli sendt til Finland, men ble sendt til Norge i stedet. Og jeg tror ikke de ville gjort noe større nytte for seg i Finland, heller selvfølgelig. Men jeg husker den gang jeg stod vakt ved vår bilpark. Vi transporterte folk med lastebiler mest, og kanonene med hester. Og det var ganske imponerende hva hestene kunne gjøre. Jeg mener, vi gikk over 200 kilometer på tre dager en gang. Men det var stadig å trekke seg tilbake efterhvert. Jeg mener, vi holdt stillinger for en tid, men så måtte vi gi dem opp. Så ble det til at disse fremmede tropper som kom inn skulle holde stillingene da, med noe artilleristøtte fra oss, ved siden av hva de måtte ha selv. Men det nyttet ikke så mye. Jeg husker, som sagt, jeg stod vakt ved denne bilparken, og jeg så to figurer som lusket i kanten av skogen der. Når de kom ut efterhvert, det var to britiske soldater som hadde kastet alt sitt våpen og utstyr, for å kunne løpe så fort de kunne, antar jeg. De hadde vært noe sted hvor de øyensynlig ble oppmerksomme på at tysk artilleri var begynt å skyte seg inn, som det heter, på deres posisjon. Så hadde de, i stedet for å trekke seg tilbake på en mer disiplinert måte, hadde de da rett og slett gått over i vill flukt. De hadde ingenting med seg annet enn sine uniformer, i det vesentlige. Vel, det var ikke alle som gjorde det selvfølgelig, men noen gjorde det.

Ble du selv noen gang beskutt direkte?

Å ja, men jeg ble ikke så mange ganger beskutt, men det var med maskingevær, tildels. Det var mer bombing. Det var jo mange ganger man, liksom, gikk av veien. Vi reiste som regel langs veiene når vi transporterte oss. Og kaste seg ned og prøve å beskytte hodet. Vi hadde jo ikke hjelmer som beskyttelse. Vi hadde ingen stålhjelmer. Vi prøvde å dekke vårt hode så vel vi kunne, og så hørte vi efter disse bomber. De gjør jo en sånn pipende lyd når de kommer... på deres måte. Men hvis man hører at de eksploderer så vet man at man er klar av dem. Som regel må jeg si at bombingen var ikke noe særlig presisjonsbombing. For eksempel da jeg kom til Åndalsnes, som var hvor vi endte opp da de fremmede tropper ble trukket ut. Så vi endte opp der nede ved Åndalsnes. Og tyskerne hadde prøvd å bombardere jernbanestasjonen der, men de hadde ikke greid å treffe verken sporene eller selve stasjonen. Men det var en hel del ting omkring som var truffet. Og vi hadde et par dager da vi gikk og inspiserte en del hva som fantes der. Det fantes en del tekstilfabrikker, eller hva man skal kalle det, i en del hus. Og jeg husker, det var en del hus der som var skadet av eksplosjoner fra bomber. Blant annet ett som lå litt på skakke ved siden av. Jeg husker jeg var inne i ett rom hvor hele gulvet var dekket av knapper, som hadde kommet ut av noen ting. De lå nok ikke vanligvis spredt utover gulvet i et tykt lag. Det var et sted hvor det eneste som stod igjen uskadd, det var bensinstasjonen. Den var ikke truffet.

Du nevnte en episode en gang hvor du hadde beskutt et tysk fly?

Å, ja. Det var oppe i Gudbrandsdalen. Det hendte en morgen. Jeg gikk til en sånn vanrenne av tre, for jeg ville børste mine tenner, så jeg gikk dit hvor det var. Det var en åpning i skogen. Da jeg stod og børstet mine tenner om morgenen så kom det et fly over. Jamen begynte han ikke å skyte med sine maskingevær ned. Da ble jeg forbannet, så jeg tok denne karabinen som jeg hadde. Vi hadde i artilleriet, vi hadde et litt kortere gevær som ble referert sånn, men det var ellers konstruert som den vanlige Krag-Jørgensen riflen. Og jeg skjøt efter flyet, men prøvde å skyte litt foran det for at det skulle være en sjanse for å treffe det, men jeg vet ikke. Men i alle fall, det gav meg i alle fall litt utløp for raseriet. Jeg mente han kunne i alle fall latt meg børste tennene i fred.

Men så etter Åndalsnes, da gikk det liksom i oppløsning?

Da reiste jeg nedover til vår avdeling. Vi endte til slutt opp på Trandum som krigsfanger. Offiserene endte opp noe annet sted. Men soldater og korporaler, jeg skal ikke si om vi hadde noen sersjanter hvor vi var, mulig vi hadde også det. Og jeg var der en tid. Tyskerne var da begynt å ville lage en flyplass på Gardermoen. Så de begynte å sende en del av disse krigsfangene ut til å arbeide der på forskjellige måter. Blant annet ble det tatt opp en hel del stubber her og der som stod igjen av trær som hadde vært felt. Jeg husker vi var ute en dag og skulle arbeide med dette. Jeg må si, jeg syns det riktige var å prøve å gjøre så lite som mulig. Så jeg fant en stor haug av røtter og sånne stubber som hadde vært tatt opp som var pakket sammen, hvor de fremdeles drev og brakte inn. Jeg fant ett sted som lå bak den hvor jeg var vel ute av syne av alle de andre, og jeg satte meg ned der for å gjøre ingenting uten å bli sett. Men plutselig fikk jeg et veldig dunk i hodet. Det var noen idioter, og jeg så dem efterpå. Den ene av dem kjente jeg faktisk. Han var en gutt fra Gjøvik som liksom ville vise kreftene sine ved å kaste disse stubbene så langt de kunne. Så disse hadde kastet den over denne haugen. Og det kom ned i presis i hodet mitt. Heldigvis holdt hodet. Jeg mener, jeg må ha en ganske solid skalle, for den har vært utsatt for en del andre kollisjoner gjennom tiden og har alltid holdt. Jeg har aldri brukket noenting. Jeg må ha nokså solide ben tror jeg. Men i alle fall, jeg hadde hodeverk i flere dager etter det. Og jeg skjelte dem grundig ut, disse fyrene. Særlig han fra Gjøvik. Jeg må si han, senere gikk han inn i denne såkalte norske avdeling av Waffen SS, han ble nazist. Antageligvis ikke så særlig intelligent, nei.

Etter at krigen var begynt i Norge så begynte du på din doktorgrad. Kan du så fortelle oss litt om hvorfor du valgte Riemanns zeta funksjon som tema for den?

Jeg må si, da jeg ble løslatt fra denne fangeleiren på Trandum kom jeg til Oslo. Siden reiste jeg hjem for sommeren, og da arbeidet jeg egentlig ikke med matematikk for en tid. Jeg tenkte at jeg ville slå meg over på noe nytt. Det første jeg tok fatt på var noe som var inspirert av en avhandling av Polya, som jeg så, om "Über ganze ganzwertige Funktionen", hvor han hadde forbedret litegrann et gammelt

resultat av Hardy. Jeg så at jeg kunne forbedre det en hel del mer. Så jeg skrev et arbeid om det, og også et annet arbeide hvor jeg behandlet samme problem for funksjoner som tar heltallsverdier både for positive og negative hele tall. Og siden et tredje arbeide om funksjoner som antar helltallsverdier, ikke bare på de hele tall, men også de deriverte opp til en viss orden tar heltallsverdier. Og jeg kunne vise en del nye resultater i denne retningen. Men jeg fikk en idé om å prøve å gjøre noe om zeta-funksjonens nullpunkter på den kritiske linje. Altså, ideen var å vise at det var nullpunkter, og helst mange nullpunkter på linjen.

Min idé var egentlig å betrakte det som et slags momentproblem, å betrakte integraler over, ikke over zeta-funksjonen, men over denne reelle funksjonen man kan danne ved å bruke funksjonallignen.

Den funksjonen som er reell på den kritiske linje og skifter tegn om det er nullpunkter, i hvert fall hvis de er nullpunkter av ulike orden og multiplisere den med potenser av noen slags vektfunksjon og se på tegnveksler av disse momentene, som man kunne kalle dem, hvis man integrerer opp en viss seksjon av linjen. Jeg kunne få noen resultater på denne måten, men de var ikke så særlig gode sammenlignet med hva som var allerede kjent på annen måte. Så jeg kom til at dette var ikke hva jeg burde fortsette med. Så jeg så nærmere på de arbeider som hadde vært gjort, og fremfor alt det arbeid som hadde nådd de skarpeste resultater, et arbeide av Hardy og Littlewood fra omkring 1920. Som vanlig, jeg leste ikke alle detaljene. Jeg har alltid hatt vanskeligheter med å lese andre folks matematikk, men jeg prøvde å se hva som var hovedtrekkene i det, og særlig hva som gjorde at de ikke fikk et skarpere resultat. På slutten av sin avhandling hadde de et avsnitt som behandlet nettopp det, og prøvde å forklare hvorfor de ikke kunne få skarpere resultater med sin metode. Jeg leste særlig dette avsnittet også. Jeg tenkte over det, så innså jeg at det var rivende galt hva de hadde skrevet der. Men de hadde påpekt ting om variasjoner av zeta-funksjonens argument, men jeg kom til at det var i virkeligheten variasjonen i amplituden. Jeg mener, det er jo en oscillerende funksjon, og det er så at disse oscillasjoner varierer ganske mye i størrelse fra tid til annen. Som deres metode var, så når de brukte disse intervaller, som de betrakter, så når de ble for små så ble det så at i virkeligheten deres metode bare registrerte hva som hendte i de intervaller som hadde eksepsjonelt store oscillasjoner, det ville dominere det hele. Og de ville bare kunne fått noe om... så den kunne ikke virke denne metode. Så jeg fikk den idé å prøve å sette en dempningsfaktor som skulle minske oscillasjonene, men uten selvfølgelig å endre fortegnet på funksjonen, noe sted. Så det måtte være et kvadrat, selvfølgelig, tenkte jeg, jeg satte inn der. Hva jeg tenkte var først, jeg tok en seksjon av Euler produktet, og så på kvadratroten av det, og brukte en del av de første faktorer og det viste seg at det allerede ledet til en forbedring, riktignok ikke så langt som man ville ha det, ikke til den riktige størrelsesorden, men til en som var markert større enn det Hardy og Littlewood hadde funnet. Og efter det eksperimenterte jeg med forbedrede dempningsfunksjoner og efterhvert fant jeg frem til at jeg skulle bruke en seksjon av rekkeutviklingen for zeta-funksjonens inverse kvadratrot, og

putte inn en dempningsfaktor på koeffisientene der som trappet dem ned, så de ble null efter de nådde en viss potens av, la oss si T hvis jeg betraktet intervallet fra 0 opp til T, eller fra T til $2T$. Det siste er på en måte lettere, for da arbeider du hele tiden med samme størrelsesorden av T. I alle fall, jeg fant frem til hva som syntes å være den beste dempningsfaktor. Det medførte at det var ganske mye komplikasjoner i selve beregningen av disse integraler som svarte til de som Hardy og Littlewood hadde brukt, men med denne dempningsfaktor inne i. Det opptrådte en del kompliserte summer som måtte oppskattes. Og det tok en del tid, så mitt arbeide var atskilling lengre enn Hardy og Littlewoods arbeide, selvfølgelig. Men det oppnådde et resultat, som i en retning kan ansees for optimalt, man fikk den riktige størrelsesorden. Det viste at en positiv brøkdel av nullpunktene alltid ville ligge på linjen. Jeg prøvde ikke å oppskatte denne brøkdelen numerisk. Jeg tror om jeg hadde brukt mer energi på å prøve å få god numerisk verdi, så ville det ligget noe sted mellom 1/20 og 1/10, jeg skal ikke si presis hvor, for jeg utførte aldri disse regningene. Men jeg var fornøyd med dette resultatet uten å bevise noen konstant. Det var senere en kineser. En elev av Titchmarsh i England som prøvde å få en konstant, men den var... han kom opp med en veldig liten konstant. Han hadde ikke brukt den metode som jeg ville valgt. Jeg brukte ofte å si i spøk når jeg nevnte dette for noen at Titchmarsh hadde gjort et uheldig valg i denne elev han valgte. Hans kinesiske elev het Min. Og jeg sa at hadde han hatt en tysk elev som het Max, så ville han fått en større verdi. I alle fall, jeg fikk dette resultat, og det tok meg en del tid å skrive det opp og å gi det til, som vanlig, Størmer. Han fikk alle mine arbeider til å fremlegge. Jeg hadde holdt foredrag om dette faktisk i Norsk Matematisk Forening i Oslo, ved universitetet. Og jeg hadde inkludert i dette første arbeidet som jeg skrev, som oppnådde bare en liten forbedring, en fotnote at under trykklegging hadde jeg oppnådd dette resultat at antall nullpunkter opp til T var større enn

$$\text{konstant} \cdot T \log T.$$

Så selve resultatet var publisert noe tidligere, det kom i disse Trondheimsforhandlingene hvor publikasjonen var nokså kvikk på den tiden, jeg vet ikke hvordan det er nu.

Men du publiserte det meste av dine ting da i norske tidskrifter, ikke i utenlandske?

Vel, jeg hadde noe i kongressberetninger. Kongressberetningen av den Skandinaviske kongress i ′38, og også i København. Når var det? I ′49? Nuvel, kongressen i København var sommeren i ′46, tror jeg.

Men da du oppnådde dette resultatet med den korrekte størrelsesorden på nullpunktene langs den kritiske linje, det vakte vel en veldig oppsikt?

Vel, blant de som kjente til problemet selvfølgelig. Jeg vet ikke om det hadde så mye effekt på folk som ikke var interessert i dette bevis, de hadde jo ingen grunn til å bli særlig opphisset over det.

Men kan jeg bare følge opp litt. Jeg har hørt at Harald Bohr etter krigen, da det ble åpne linjer mellom USA og Europa, at han ble spurt om hva har skjedd i Europa i matematikk? Hvor han sier at Atle Selberg har skjedd.

Vel, han var ikke så spesifikk, tror jeg. Jeg har hørt historien, og den er mer detaljert på noen punkter. Det var da Siegel kom gjennom Europa først etter krigen, det var i '46. Han hadde kontakt med Harald Bohr og spurte hva som var skjedd, og Harald Bohr sa ikke Atle Selberg, han sa Selberg bare. Men det er vel trolig at han refererte til meg og ikke mine brødre, i denne forstand.

Men nå var det såld-metoden du begynte å undersøke?

Jeg må si jeg begynte med den i '46. I mellomtiden hadde jeg skrevet noen andre arbeider om zeta-funksjonen og om Dirichlets L-funksjoner. Også ganske store arbeider, for så vidt. På omtrent samme lengde som min doktoravhandling. Jeg tror att et av dem er kanskje litt lengre enn min doktoravhandling. Det ene dreide seg om zeta-funksjonen, og det behandlet en annen side av saken om nullpunktene, et såkalt tetthetsresultat som dreide seg egentlig om mulige nullpunkter utenfor linjen. Og hva jeg utnyttet der var at jeg kunne ... jeg hadde et tetthetsresultat allerede i min doktoravhandling, men der gjorde jeg noen skarpere som sa mer når man kom vekk fra linjen en del. Disse viste seg å være ganske brukbare til en del andre ting, og jeg kunne bruke dem til å undersøke verdifordelingen av forskjellige ting. Men der, i den avhandlingen, behandlet jeg mest argumentet til zeta-funksjonen på selve linjen og viste en del nye resultater i den retning. Den samme metode kunne også brukes til å betrakte logaritmen til absoluttverdien av zeta-funksjonen på linjen, og for begge deler kan man nå fram til en del nokså presise resultater om fordelingen, at hvis man normerer dem på en spesiell måte så har man i det vesentlige en gaussisk fordeling i begge tilfeller. Eller om man betrakter hele logaritmen som en ting, du vet man normerer på samme måte, så har man en gaussisk fordeling i planet, og da... Det andre arbeidet er litt vanskeligere å beskrive. Det dreier seg om hva man kaller K-analogs. Altså hvor man betrakter disse Dirichlets L-funksjoner som avhenger av denne modulen som L-funksjonene hører til. Og det viser seg at det er en hel det analogi hvis man betrakter til og med meget små intervaller på den kritiske linje, så kan man vise en hel del om fordelinger av disse L-funksjoner. De er fordelt avhengig av denne parameteren, K-modulen. Resultater som er nokså analoge med dem man har i en del andre tilfeller som også leder til gaussiske distribusjoner av forskjellige ting. Og det sier en del om antall nullpunkter hvis man betrakter alle L-funksjoner til en viss modul. Antall nullpunkter i et meget kort intervall på linjen. Hvis intervallet er av en viss størrelsesorden, $C \log K$, så vil en positiv del av nullpunktene ligge på linjen i ethvert intervall. Vel, jeg begynte sommeren '46 å anvende, jeg hadde sett noe tidligere at det fantes en del i dette jeg hadde gjort med zeta-funksjonen i min doktoravhandling ... det fantes noe der som kunne anvendes for å finne øvre oppskatninger av for eksempel antall primtall i ett intervall eller sånn. Og jeg fant da at det kunne også brukes på mer generelle problemer. Faktisk på

alle problemer som kunne angripes med Bruns såld-metode, kunne jeg finne øvre oppskatninger med min egen metode, og de ble konsekvent bedre. Ikke bare det, men også mye enklere å finne. Konstantene ble mer naturlige og enkle for jeg endte alltid opp med noe som var et heltallig multiplum av det som var den antagelige korrekte verdi. For eksempel hvis jeg hadde et irredusibelt polynom uten noen fast primfaktor, så ville jeg ende opp med noe som var ganske mye bedre enn de resultater som kunne oppnås med Bruns resultat. Hvis det var noe som dreide seg om flere irredusible polynomer så ble konstanten øket en del. Jeg mener, hvis man betraktet antall primtall, for å ta noe enkelt, hvis man da tok og betraktet antall primtall i et intervall så endte jeg opp med en konstant som var to ganger så stort som det vi mente var det korrekte resultat. Hvis jeg betraktet et binært problem, så endte jeg derimot opp med noe som hadde en faktor som var 4 ganger så stor. Og tilsvarende for flere. Altså Goldbachs problem, eller primtall tvilling problemet, førte til konstanter som var 4 ganger for store. Jeg prøvde så å adoptere dette så jeg også kunne finne nedre grenser. For det er alltid et vanskeligere problem, fordi at en nedre grense har ingen verdi unntagen når den kommer ut positivt. Øvre grenser kommer alltid ut positive. Nedre grense sier bare noe når den kommer ut positivt. Og jeg fant jo selvfølgelig at avhengig av hva problemet var, så kunne jeg få positive resultat bare så lenge jeg gjorde min såldning opp til en viss potens. Jeg kunne for mer kompliserte problemer bare bruke såld-metoden min over en seksjon av primtallene som var opp til en potens med lavere eksponent enn den jeg kunne gjøre for et enklere problem. Jeg fant en del resultater på denne måten, og publiserte efterhvert noen av dem da jeg holdt foredrag i Trondheim i ′49 på den Skandinaviske kongress. Og også på den internasjonale kongress ved Harvard i Cambridge, Massachusets i 1950. I begge steder påpekte jeg dette jeg kalte paritetsproblemet, ja jeg er forresten ikke sikker på om jeg innførte navnet paritet allerede, men dette at såld-metoden syntes ikke å kunne skille mellom tall som hadde et ulike og like antall primtall, så at du kunne ikke riktig nå ned til primtallene selv bare med såld-metoden.

Men det er slik at hva som blir fundamentalformelen som leder fram til det elementære bevis for primtallsatsen, den fulgte av såld-metoden?

Jeg så at jeg kunne gjøre en del ting. Det kom ut av noe som jeg hadde arbeidet med der og som jeg så jeg ikke kunne komme videre med, og det var da jeg innså at årsaken var presis dette som jeg nu nevnte, at jeg fikk bidrag fra de tall som hadde et like antall primtall som fra de som hadde ulike antall primfaktorer i seg. Det ledet da til at jeg prøvde å finne en formel som var så enkel som mulig av denne typen. Det viste seg at dette best kunne gjøres ved ikke å bruke den generelle såld-metode, men heller hva jeg skulle kalle en lokal såld-metode, en som fungerte som en såld-metode bare opp til ett visst punkt, og jeg kunne da finne en formel hvor jeg bare hadde to ting som gav bidrag. Det ene var ett ledd som inneholdt bare primtallene mindre enn x, og det andre var ett ledd som inneholdt bare de produkter av to primtall.

Kan du skrive opp den formelen her?

$$\sum_{p<x} \log^2 p + \sum_{pq<x} \log p \log q = 2x \log x + 0(x)$$

Vel, i det vesentlige er det følgende. Summasjon fra p mindre enn eller lik x det er slik den kommer ut vanligvis. Man kunne også sette en faktor $\log x$ utenfor og bare $\log p$ der, det blir det samme ting. Den skriver ikke så bra den her. Det skal stå $\log x$ pluss en rest av størrelsesorden $0(x)$. Jeg håper dere kan lese det. p og q er primtall i begge tilfeller. Og denne formelen syntes jo nokså lovende. Men det er ikke så lett å isolere primtallene. Så det tok en del arbeide å komme fram til primtallsatsen, og det tok en del tid. Det var på våren 48 at jeg begynte å arbeide med dette. Jeg fant denne formelen i den form i 48, om våren. Jeg hadde en mer komplisert formel noe tidligere. Det finns en uendelig rekke i virkeligheten av sånne formler, men dette synes å være den simpleste. Jeg arbeidet med, samtidig, med å forenkle et elementært bevis av det som kalles Dirichlets setning om primtall i aritmetiske rekker, som sier at i en aritmetisk progresjon så er der uendelig mange hvis første og annet ledd i denne progresjon er relativt primiske, altså ikke har noen felles faktor.

Kan du fortelle oss litt om de komplikasjonene som da oppstod i forbindelse med selve beviset for primtallsetningen?

Vi har jo snakket om dette på fredag, det er besværlig å gå gjennom det igjen. Jeg har en del dokumenter i denne retning, de er litt rotete, utvilsomt. De har vært sett av en del andre mennesker i årenes løp. Men jeg hadde tenkt jeg ville senere noen gang, i denne filen til Sarnak. Det meste av det som er i den er ting som ble gitt til meg av Hermann Weyl da han tok avskjed fra instituttet. Han gav meg disse papirer. Det viste seg at han kom tilbake til instituttet flere år etterpå. Han hadde giftet seg i Sveits. Han kom tilbake og holdt en del forelesninger senere, så han hadde ikke nødvendigvis behøvd å gi det til meg allerede da. Men da han tok avskjed så synes han at han ikke lenger ville ta vare på det han hadde av dokumenter om dette her, og han gav det til meg. Og jeg har beholdt dem. Det er bare, tror jeg, to andre personer som har fått se dem. Jeg har ikke publisert noe større, eller snakket noe om dette her til folk, fordi jeg syntes det er en ubehagelig affære å snakke om.

Ja, det kan vi forstå. Men i 1950 da fikk du Fieldsmedaljen, var vel en stor stimulans?

Vel, jeg har alltid sagt at Harald Bohr hadde alltid vært meget velvillig mot meg, og han var tilfeldigvis formann i komiteen. Nei, jeg har alltid ment at om formannen hadde vært en annen mann, så gudene vet hvem som ville fått denne medaljen.

Det var vel ikke tvil om at den var velfortjent?

Vel, jeg vet ikke jeg. Det var ikke alle som syntes det kanskje? Jeg må si det kom som en overraskelse på meg. Jeg hadde aldri tenkt på... Jeg visste jo på en måte

om disse medaljene fordi jeg hadde jo gått på denne kongressen som ble holdt i Oslo i 1936, da Fieldsmedaljene ble utdelt for første gang. Lars Ahlfors, og en amerikaner, Jesse Douglas, fikk dem. Jesse Douglas gikk det nokså tragisk med senere. Han var i en mentalinstitusjon for en hel del år siden. Da han kom ut, han prøvde å, jeg mener, han hadde ikke riktig den energi, eller så. I alle fall, han gjorde aldri noe riktig comeback efter det, og han døde i forholdsvis tidlig alder, faktisk. Så det var en litt tragisk historie. Ahlfors levde jo svært lenge, han ble 89 år gammel, og hadde jo en lang karriere ved Harvard senere. Men jeg må si, jeg hadde glemt om disse medaljene, jeg tenkte ikke på dem våren 1950 før kongressen. Men det hendte seg at det kom en engelskmann gjennom her, Hodge. Han var en ganske kjent matematiker, og han var også i denne komiteen. Og han, en dag han kunne ikke riktig holde seg, så han sa at jeg kom til å få en av medaljene. Vel, det var jo litt av en overraskelse får jeg si. Men den gangen fikk man medalje, og det var den gangen, tror jeg, tusen kanadiske dollar også som på den tid også var verdt mer enn medaljen får jeg si. Gullprisen var noe lavere den gang. Nå er medaljen antagelig verdt mer enn tusen kanadiske dollar.

Du har liggende diverse ting som du ikke har publisert?

Det er alltid sånn at man har noen ting man ikke egentlig bryr seg med å publisere. Jeg mener, efter at jeg sommeren ′37 hadde gjort dette med partisjonsfunksjonen, som jeg fortalte dere forrige gang, hvor jeg hadde også noe mer enn hva Rademacher hadde. Men Rademacher hadde fått hovedresultatet før, viste det seg da jeg så referatet i, det må ha vært i Zentralblatt. Mathematical reviews, det eksisterte ikke. Det var bare to referat journaler på den tiden, og det var Zentralblatt, og så fantes også det som kaltes for Jahrbuch, men de kom alltid en del senere. Jeg hadde altså noe mer der, at jeg hadde dette enklere utrykket for koeffisientene i denne utviklingen for partisjonsfunksjonen ved siden av den konvergente rekke. Men jeg syntes det var litt, jeg mener jeg brydde meg ikke om å publisere bare det, selv om det var i og for seg interessant. Jeg nevnte resultatet av og til en del andre folk i årenes løp. Jeg nevnte det for eksempel og gav formelen til en venn av meg som var en elev av Rademacher, faktisk. Navnet er ofte vanskelig å komme på nu, det kommer sent. Han var en fra Philadelphia, en student av Rademacher og hadde tatt sin doktorgrad under Rademacher og hans navn, det kan være det samme.

Det var, det vil komme til meg, men jeg kan ikke komme på det akkurat nu. Jeg skrev opp formelen for ham, men jeg indikerte ikke beviset. Han greide å lage et uhyre komplisert bevis, og mitt bevis var enkelt og kunne gjøres på en eller to sider, avhengende litt av hvor mye detalj man satte inn. Han publiserte det. Han hadde min tillatelse altså. Jeg syntes det var jo ett litt bakvendt bevis han laget, men jeg sa ikke det til ham. Han nevnte han fikk formelen fra meg og at jeg hadde et bevis for den.

Men da etter 1950 med sporformelen så skiftet du jo litt område?

Jo, det må jeg si, men jeg skiftet ikke helt. Jeg arbeidet fremdeles en del med disse

andre tingene, med zeta-funksjonen og L-funksjoner. Og jeg fortsatte å gjøre en del mer om disse generelle distribusjons-resultater. Men jeg publiserte ikke noe om det på den tid. Men vi går tilbake til årene omkring 1950. Ja, jeg så dette arbeidet av Hans Maass hvor han betraktet løsninger av en viss partiell differensialligning, Laplace ligning i den hyperbolske geometri av det øvre halvplan, kan man si, og funksjoner som var invariante under modulgruppen. Og han hadde betraktet dette på en måte. Jeg oppnådde en del resultater, ganske interessante. Men jeg så dette arbeidet, jeg må si, jeg leste igjen ikke detaljene. Men jeg så at det skulle være bedre enn å betrakte bare Laplaceligningen, eller Laplaceoperatoren. Det skulle være bedre å betrakte alle lineære operatorer som var invariante under bevegelser av det hyperbolske planet i seg selv. Og særlig da betraktet jeg integraloperatorer og betraktet da funksjoner som var egenfunksjoner og også samtidig hadde invarians under for eksempel modulgruppen, det var det jeg betraktet først. Siden betraktet jeg mer generelle grupper og øvre halvplan. Men jeg innskrenket meg til grupper hvor fundamentalområdet hadde endelig areal. Det gjør en hel del forskjell hvis man gir opp den restriksjonen, da får man en mye mer komplisert ting. Og jeg kunne vise en del ting som han ikke hadde. Så jeg betraktet disse integraloperatorer som jo er opprinnelig utstrakt over hele det øvre halvplan, hele det hyperbolske plan. Og hvis du har invarians under en viss gruppe, så kan du liksom folde hele integralet inn i et fundamentalområde, og du får en ny operator som er utstrakt bare over fundamentalområdet, hvor du har en kjerne som er en uendelig rekke, som har selve gruppen, den diskrete gruppe i seg. Og det lovende er å se om man ikke kunne beregne sporet på en enkel måte. På den ene side selvfølgelig som sum av egenverdiene, på en måte, av denne operator og på den annen side som sporet ved at man kombinerer visse ledd sammen. Og det viste seg at det gikk på en ganske elegant måte, og det ledet da til sporformelen for det hyperbolske plan. Av det kunne man dra en hel del konklusjoner som ikke er så lett ellers. Det var en komplikasjon for generelle grupper. Hvis fundamentalområdet hadde endelig område, men ikke var kompakt. Altså hvis det hadde det man kaller på engelsk cusps, eller på norsk, så sa man i sin tid, spisser. Ordet var tatt fra tysk. Hecke alltid skrev om "spitzenformen". Jeg må si i min hovedoppgave, refererte jeg til det som spissformelen. Og jeg mener, min ide var tildels influert av dette som jeg hadde gjort før krigen og som jeg nu hadde gjort en del forsøk å operere med integraloperatorer. Og noen ting som jeg ikke publiserte på noen måte, men som jeg da gjenopptok efterpå, det viste seg å være et ganske fruktbart synspunkt. Og særlig hvis man gikk til hva man kan kalle høyere dimensjonale metriske rom og betraktet lignende fenomener. Hvis man ser på invariante differential operatorer, så er de mer enn bare Laplaceligningen, Laplaceoperatoren. Jeg mener, det finnes også en del andre. Så der var det særlig viktig at man skulle betrakte alle operatorer som hadde den nødvendige invariansegenskap. Det ledet til mer generelle formler for sporformelen som man kunne bevise så lenge fundamentalområdet var kompakt. Men så snart man hadde endelig volum av fundamentalområdet, men ikke kompakthet. Altså noe som svarte til de såkalte spisser. I det hyperbolske

plan ser de faktisk ut som spisser, faktisk. Men i øvre dimensjoner kan de ha mer komplisert struktur. Og spissene vil generelt medføre at det blir også et kontinuerlig spektrum som må behandles. Og for å få den generelle sporformel så må du betrakte de kontinuerlige spektra og eliminere dem fra din integraloperator før du beregner sporene. Det kunne bli gjort i et tilfelle av det hyperbolske plan uten å gjøre så forferdelig... Jeg greide å gjøre det generelt for det hyperbolske plan i 1953, og denne metoden som jeg brukte der den gikk nokså lett å generalisere til generelle n-dimensjonale hyperbolske rom. Men en del av de andre tilfellene er mer kompliserte og ikke så lette å behandle. Jeg nevner en del om dette i den artikkelen som jeg skrev efter denne kongress i ′56, i India. Det var i januar ′56. Hvor jeg holdt en rekke av fire foredrag om disse undersøkelsene.

Når du ser på den veldige betydningen sporformelen har hatt regner du det som din største matematiske oppdagelse?

Vel, den er antagelig det, skulle jeg tro. Det er antagelig den som har mest anvendelse, skulle jeg også tro. Skjønt, disse anvendelsene kan jeg ikke si at jeg nødvendigvis begriper. Jeg mener, jeg har hørt at den har anvendelse i fysikk, og sånn, men jeg vet ikke presis hvordan det henger sammen. Og, jeg er egentlig ikke noe særlig interessert i hvordan det henger sammen heller.

Er du overrasket over at den har fått så stor betydning som den har gjort?

Vel, jeg er litt overrasket over at den har fått anvendelse i fysikk. Matematisk sett så synes jeg nok at den syntes betydningsfull for meg. Den inneholder en hel del informasjon, og selve problemet inneholder også en hel del åpent for fremtidig arbeider. Særlig i de høyere dimensjoner hvor man har kontinuerlige spektra av mer enn en dimensjon, så og si. Det kompliserer jo saken. Det er nok en hel del å gjøre der enda. Men det får heller bli gjort av andre, må jeg si.

Jeg har ikke tenkt å skrive noe mer om sporformelen. Jeg holdt noen foredrag i 80-årene, og også et par ganger senere om det jeg kalte "hybrid trace formula". Det enkleste er, kan man si, hvis du tar det hyperbolske plan og en vanlig algebraisk Riemannsk flate avbildet i det hyperbolske plan, som henger sammen med uniformeringsteoriene − hvordan skal jeg uttrykke dette? − så kan du utlede en del klassiske ting, som for eksempel Riemann-Roch formelen, som spesialtilfeller av sporformelen. Du bruker noen spesielle kjerner, får jeg si. Vel, det lignende kan gjøres i mange høyere dimensjoner også, der er det noe vanskeligere å finne de rette kjernefunksjonene. Det kan gjøres for alle de såkalte ”bounded symmetric domains” og for visse klasser av funksjoner. Det finnes tilsvarende ting der, særlig hvis du har et produkt av flere av disse, hvor du har tildels noen av dem som i seg selv gir hva som svarer til en Riemann-Roch formel. Men den andre komponenten i kjernen er mer generell, og det er det jeg refererte til som ”hybrid trace formula”. Og av noen av dem kunne man få ganske interessante resultater, et enkelt tilfelle er de såkalte Hilberts modulgrupper som knytter seg til et reelt algebraisk tallegeme. Hvis det er av graden n så har du et produkt av n hyperbolske plan. Du kan velge en kjerne der, som er hva man kunne kalle den singulære kjerne, som leder

til Riemann-Roch formelen, for, la oss si, $n-1$ av disse variable. For den siste kan du ta en generell kjerne, så får du formler som leder til disse Dirichlet-rekker som du kan danne fra denne Hilbertske modulgruppen. Og blant annet får du det interessante tilfelle at hvis n er et like tall, så får du der en rekke av noe som svarer til en zeta-funksjon og en rekke av L-funksjoner, kan du si, som er tilknyttet til gruppen, og denne zeta-funksjon har en pol i $s = 1$. Og i det klassiske tilfellet, hvis du har bare et hyperbolsk plan, eller hvis du har et ulike antall hyperbolske plan, så ville samme problem lede til noe som har ett nullpunkt i $s = 1$. For n like så er det noe som er mer analogt med zeta-funksjonen og Dirichlets L-rekker. Jeg holdt en del foredrag om det i 80-årene, og kanskje også noe senere, men har aldri publisert det, faktisk. Jeg vet ikke om noen andre har publisert det kanskje nu til denne tid. Jeg har ikke fulgt efter hva som har skjedd med dette. Det har blitt skrevet en hel del i litteraturen som jeg ikke har fulgt med i. Jeg leser ikke så mye som jeg gjorde før. Og som sagt, jeg har jo egentlig ikke noe særlig incentiv til å publisere så mye. Særlig etter jeg har gått over aldersgrensen, får jeg si. Dessuten, efter jeg kom til instituttet så har jeg egentlig ikke regnet med at jeg skulle få noen bedre stilling fra noe annet sted. Og vi har stort sett hatt et system her hvor alle hadde samme lønn. Så det var ikke egentlig noe økonomisk incentiv som skulle drive meg. Jeg har snakket om en hel del ting som jeg aldri har skrevet opp, og holdt en del foredrag om ting som jeg ikke har skrevet opp annet enn at jeg har noen notater for meg selv, her og der. Men, som regel er de slik at de kanskje ville være vanskelig å lese for noen annen. Ofte kan det være vanskelig for meg selv når jeg kommer tilbake til dem.

Vi har vært innom dine tre hovedområder av matematikken. Men har du noen tanker om hvordan du tror utviklingen vil skje innenfor disse områdene de neste 50 til 100 år? Har du gjort deg noen slike refleksjoner?

Vel, jeg tror det var Storm P. som sa at "At spå er svært, især om fremtiden."

Du slutter deg til det?

Ja.

Da du fikk Abels ærespris i 2002 så sendte du et takkebrev der du omtalte Abels addisjonsteorem. "Det står for meg som den rene magi. Verken hos Gauss eller Riemann eller noen annen har jeg funnet noe som kan riktig måle seg med dette." Kan du kommentere dette ytterligere?

Jeg vil presisere om det at når jeg brukte dette utrykket så... jeg leste i min ungdom aldri, og heller ikke i dag lest i detalj hans store arbeide, som jo for en lang tid gikk tapt. Men det var denne lille tingen han skrev som jo er så uhyre elementær, jeg mener det finnes i grunnen ikke noe sidestykke til det i matematikken. En så betydningsfull og langtrekkende setning, bevist med så enkle midler. Det står fremdeles for meg som den rene magi. Jeg kan ikke tenke meg noe sidestykke til det i matematikken.

Har du en kommentar til Abels plass i matematikkhistorien.

Hvis man sammenligner han med hans samtid, så må jeg si at han i dette med addisjonsteoremet, har han noe som går utover hva noen annen presterte. Selvfølgelig, hans hovedkonkurrent var Jacobi. Jacobi hadde ikke noe lignende. Det er riktig at Jacobi var den som bygget på dette først og begynte å innføre det man kaller abelske funksjoner. Gauss hadde jo en veldig rik periode i sin ungdom. Senere ble han jo mer opptatt av dette astronomiske. Så svært mye av hans arbeide senere hadde jo ikke så mye med matematikk å gjøre, i den forstand. Ikke mer enn, la oss si, Størmers beregninger av nordlysbaner. Det hadde jo selvfølgelig sin interesse, men jeg tror også kanskje Størmer hadde gjort bedre om han hadde fortsatt med matematikken. Han hadde en god begavelse, Størmer. I sine unge år gjorde han en hel del. Men så kom han inn i en periode hvor han syntes ikke å komme noen vei med sin matematikk. Så slo han inn på dette andre, inspirert selvfølgelig av Kristian Birkelands arbeide med den magnetiske kule og katodestråler. Kristian Birkeland var jo en svært begavet mann, skjønt han selvfølgelig gjorde en del feilberegninger av og til, som for eksempel hans elektriske kanon. Jeg vet ikke om folk fremdeles kjenner til historien om hans elektriske kanon?

Det var da det skjedde en eksplosjon?

Han hadde gjort noen eksperiment i mindre skala. Så skulle han demonstrere dem i full skala. Han sa til audiensen at dere kommer ikke til å høre noen smell eller eksplosjoner, og ikke se noen flamme, men prosjektilet kommer til å gå. Men istedenfor, det viste seg at man kan ikke slutte fra et eksperiment i liten skala til større skala. Det gikk helt annerledes enn hva han tenkte. Det blev en stor smell, og en stor flamme slo ut.

Var det i universitetets aula dette skjedde?

Jeg tror det var der noe sted. Det var noe sted hvor det var en hel del tilhørere og tilskuere. Jeg vet ikke, det kan vel ikke ha vært i aulaen for prosjektilet var jo som en kanonkule. Du kan ikke skyte en kanonkule i aulaen, må jeg si. Jeg mener, du måtte ha noen veldige ting for å ta imot den i så fall. En stor sandkasse eller noe sånn.

Hva er det, vil du si, som karakteriserer god matematisk forskning? Er det fantasi, ideer, sans for relasjoner, eller hva?

Vel, jeg må si alle disse tingene kommer inn. En sans for sammenheng og en sans for mønstre, på en måte, er viktige. Og fantasi er også en viktig komponent. Det er også bra om man har en hel del tålmodighet og energi. Jeg tror at også rett og slett det som kalles for hell spiller en viss rolle. Ja, noen er heldige mange ganger, og andre er heldige bare en gang, og noen er kanskje ikke heldige egentlig noen gang. Jeg mener, jeg har sett mange gode ideer, hva som syntes å være gode ideer, som ikke har ført til noen ting. Og, jeg har også sett eksempler på ideer som ikke syntes noe særlig da jeg så dem først, men det viste seg at de merkelig nok ledet til noen ting. Ja, det er en hel del det er vanskelig å definere egentlig hva som ligger bak. Det er utvilsomt noe der som er veldig vanskelig å sette sin finger på, og som

er... Jeg har kjent en del folk som syntes å ha ideer og kunne en hel del og sånn, men de kom liksom aldri ut med noen resultater som det egentlig var noe særlig ved. Og jeg har også sett eksempler på folk som jeg i grunnen hadde inntrykk av, når jeg snakket med dem, at de var ikke så særlig intelligente, men de kom opp med ting, ofte på en klossete måte, som allikevel førte til nye resultater av stor interesse. Nei, jeg vil ikke påta meg å definere hva som er egentlig essensen av matematisk begavelse. Jeg tror det kan være av mange slag.

Kan vi komme tilbake til Norge. Mener du at Abel og Lie er de to største nordiske matematikere?

Ja, det finnes nok ingen i de skandinaviske land som riktig kommer opp mot disse, synes jeg. Finland har jo hatt noen bra folk. Den største begavelsen der er jo kanskje på en måte Ahlfors, mer enn Rolf Nevanlinna. Jeg tror Rolf Nevanlinna var noe snevrere, men han var kanskje mer energisk på en måte. Danmark har ikke hatt... Harald Bohr var for så vidt nokså kjent, men han var ikke egentlig en matematiker av så veldig høy klasse. Sverige har jo hatt en del, både i forrige århundre og også i dette. Torsten Carleman var en betydningsfull matematiker. Arne Beurling, selvfølgelig. Det finnes en del navn, jeg har alltid ansett at Fritz Carlson, som var i Stockholm, var en veldig fin begavelse. Han var en noe... han kom aldri på noen skandinaviske kongresser eller sånn og synes å ha vært en litt merkverdig person. I sine yngre år hadde han noen... han var en mye større matematiker enn for eksempel Cramér og gjorde i virkeligheten en større innsats i analytisk tallteori enn hva Cramér gjorde. Han gjorde en hel del meget fine arbeider i sin ungdom. Siden ble han på en måte en misantrop. Det finnes en del interessante historier om han. Han gjorde veldig vanskelige oppgaver til eksamen. Arne Beurling fortalte meg en gang, sammen fra de tre universiteter i Lund og Uppsala og Stockholm, for å nevne dem efter alder, så skulle de gjøre opp noen eksamensoppgaver for noen studenter ved universitetene, og Fritz Carlson hadde sendt inn sine forslag. Og efter en tid fikk Arne Beurling en noe desperat telefonsamtale fra Lund. Det var Marcel Riesz som spurte om Beurling kunne gi ham løsningene på disse oppgavene, for Marcel Riesz kunne ikke løse dem! Beurling sa at de var ganske ... jeg tror han brukte utrykket finurlige, og det var nok ikke lett å komme igjennom det. Det skulle være meget begavede studenter som skulle greie dem, må jeg si.

Har du gjort deg noen refleksjoner over hvorfor Norge har produsert så mange fremragende matematikere.

Det har jeg ingen idé om. Det er rene tilfelle tror jeg. Man kunne jo også spørre hvorfor disse andre land har produsert mer fremragende fysikere enn Norge? Jeg mener, jeg tror ikke det nytter å spekulere på disse ting. Det er jo til dels ren tilfeldighet som bestemmer hva som blir genkombinasjonen til barn som blir født i de forskjellige land. Jeg mener, i sin familie var Abel det eneste store lys. Ingen av hans brødre synes å ha vært noe særlig fremragende på noen kant. Jeg får heller si at noen av dem hadde heller et noe dårligere... for eksempel denne hans bror

som ble prest, som het Peder til fornavn, og fikk et ganske uvanlig tilnavn av folk i bygden, som dere vel nok kjenner til. ("Peder Prestepikk".)

Jo da.

Det var ikke ubegrunnet.

Abel og Lie de var jo veldig forskjellige matematiske begavelser. Ditt hjerte står vel nærmere Abel enn Lie, ville jeg anta?

Du skjønner, jeg har aldri riktig hatt noe mot til å lese Lies verker. Min far studerte jo hans samlede verker, så vi hadde dem hjemme. Efter hva jeg har hørt, han hadde jo fått en samarbeider som skulle gjøre hans arbeider mer forståelig. En Engels som arbeidet med ham. Men, jeg tror jeg nevnte det forrige gang, jeg snakket med Carl Loewner om dette da jeg var i Syracuse, og også noen ganger senere da jeg traff ham. Og han kunne en hel del om Lie-grupper og hadde lest Lies originalverker, og også en del av det som Engels hadde skrevet. Han sa at i virkeligheten var Lies egen framstilling mye bedre enn Friedrich Engels. Da fikk man først lært seg å forstå Lies måte å fremstille tingene på, og så gav det en mye klarere innsikt i hva som foregikk. Og jeg har all grunn til å tro på ham. Altså at han var korrekt når det gjaldt det. Men som sagt, jeg åpnet aldri disse bøkene i min fars bibliotek. Men jeg så på Abel, jeg så på Jacobi, jeg så på Riemann, jeg så på Gauss, men aldri på Sophus Lie.

Når det gjelder balansegangen mellom intuisjon og stringens i matematikk, så husker jeg en gang vi snakket om Hilberts aksiomatiske program. Har du noen kommentar til det?

Jeg tror ikke i grunnen at man skal prøve å... Jeg mener, Hilberts forsøk var nok vel ment, men det var vel i grunnen nokså mislykket. Han innførte jo en del, såvidt jeg forstår det av hva jeg har lest og hva andre har skrevet om hans program, for så å si redde seg, prøvde han å innføre aksiomer som vel var helt unaturlige. Og man må vel efter Gödels arbeider regne med at Hilberts metode å systematisere matematikken på ikke riktig kunne føre frem. Jeg må si at intuisjonen er en viktig ting. Og jeg kan tenke meg at man fra tid til annen kanskje kan addere et par aksiomer, men bygget på intuisjon. Det er ikke alt som kan aksiomatiseres og formuleres, den egentlige matematikk er ikke fullstendig inneholdt i det man kan se på papir, og skrive ned. Fordi disse tegn, i og for seg, og disse symboler det avhenger av hva de stimulerer hjernen til å se. Gödels arbeider gjelder alt dette som kom på papiret. Men det gjelder i grunnen ikke nødvendigvis alt det som kan forekomme i hjernen, skulle jeg tro.

Men gode og enkle begreper er jo veldig viktig i matematikken?

Jojo. Det er så, det er ikke uten verdi å tenke på aksiomer og sånne ting. Men man skal ikke tro det er hele historien om matematikken.

I dag for eksempel, både i gruppeteori og i kombinatorikk, for eksempel i 4-farge

problemet, så finnes det jo en del såkalte bevis som bygger på computerhjelp. Hva synes du om det, og er det noe som man i fremtiden bør akseptere, eller hva?

Vel, jeg kan si en ting. Jeg vet at Siegel ville aldri akseptert det. Siegel trodde ikke en gang på logaritmetabeller. Hvis han trengte en logaritme noen gang i sitt arbeid, så regnet han den alltid ut for hand. Fordi han ressonerte som så at det er velkjent at alle logaritmetabeller inneholder feil noe sted. Han brukte noen ganger i sitt arbeide logaritmer, men han regnet dem alltid ut til den nøyaktighet han trengte. For å overbevise han om at han hadde det riktig. Så Siegel ville aldri ha akseptert et bevis som berodde på computers. Jeg tror at man kan gjøre beviser som er så kompliserte at det er en nødvendighet. Spørsmålet er om det er nødvendig at de skal være så kompliserte eller kan de forenkles så at de kan... jeg kan ikke anse at... selvfølgelig, det kan være ting som er avhengig av så enorme tallregninger, for eksempel, at de ikke kunne utføres innen en vanlig menneskealder om du skulle gjøre det med hånden. Da får man stole på regnemaskinen. Men da er det best å la flere regnemaskiner gå gjennom det før man er riktig sikker på det. Det er noe utilfredsstillende ved det, selvfølgelig. Man skal alltid prøve å søke å finne en enklere tilgang til et resultat.

Her om dagen så snakket vi om Andrew Wiles' bevis for Fermats siste teorem. Det er jo et stort maskineri som ligger bak det. Men du nevnte at du ville ikke utelukke at det kanskje godt kan dukke opp et enklere elementært bevis.

Det kan godt hende at en helt ny måte å angripe det på kan komme frem som leder til et atskillig kortere og lettere bevis å forstå, det kan man ikke utelukke.

Hva synes du om at tallteori som disiplin er nesten død i Norge i dag? Vi som har frembrakt så mange fremragende matematikere innen tallteori.

Det er jo at forholdsvis lite land. Det er ikke så mange matematikere der, og man må kanskje si at tallteorien har, hvis du ser tilbake, har tatt en uforholdsmessig stor plass for en tid. Særlig da diofantiske ting som jo var noe som en tid, kan man si, de fleste norske matematikere betraktet, diofantiske problemer. Det hadde nok noe å gjøre med det at tallteoretiske problemer er noe som er ofte nokså lett å oppfatte. Det trengs ikke så mye bakgrunn for å begripe seg på hva det dreier seg om. Så det er rimelig at folk som prøvde å begynne på egenhånd med matematikk ofte ble trukket til å betrakte sånne problemer som var lettere å komme til på en måte. Selv om de kunne være vanskelige, i og for seg. Det er jo så at det var jo ikke så mye av en systematisk undervisning ved universitetet, for eksempel, før i tiden. Man brukte også tildels nokså dårlige lærebøker. Jeg mener, jeg husker i min tid, vi brukte i analyse Goursats forelesninger. De er uhyre dårlige, og det finnes en hel del feil i dem. Framstillingen er slettes ikke så klar alle steder. Jeg husker det var et bevis der som jeg prøvde å lære meg. Jeg leste gjennom det flere ganger, men jeg greide aldri å få det fast. Jeg kunne ikke reprodusere det. Så etter hvert så gav jeg det opp, det fikk være som det var. Jeg kunne ikke huske hvordan dette gikk. Det var åpenbart det skulle være mulig å kunne gjøre det bedre. Jeg

snakket en gang om Goursat med André Weil. Han var også enig i at det var en veldig dårlig bok. Men den var av noen grunn blitt læreboken. Jeg tror at det kanskje må ha vært Carl Størmer som har valgt den. Jeg skulle tro det, ja. Han hadde studert en del i Paris og kanskje vært utsatt for denne boken. Og kanskje ikke lagt merke til at den var i virkeligheten en dårlig bok.

Hvordan tror du man i fremtiden best kan ta vare på og fremelske framtidige matematiske talenter i skolen og på universitetet?

Vel, det viktigste er at de skal ha tilgang til å lese om dette hvis de er interesserte i det i en tidlig alder. Jeg må si det var jo det som hjalp meg på en måte. Jeg lærte jo stort sett min matematikk utenom skolen, får jeg si. Og ellers må jeg si, jeg tror jeg uttaler meg noe om dette i den artikkelen om Ramanujan, at man skal ha en hel del tålmodighet med begavelser som er litt utenfor det vanlige og som kan være besværlige i et skolesystem. Det kan være farlig å undertrykke dem. Man vet aldri hva man kan ødelegge med dette. Det har vært en hel del av de som nådde svært langt som hadde store vanskeligheter på flere punkter i sin utvikling. Og hva vi ikke vet om, er de som man aldri fikk høre om, jeg mener som kanskje kunne ha nådd like langt, men som blev på en måte helt undertrykt og ødelagt gjennom skolegangen.

Et spørsmål som filosofene ofte er opptatte av, er dette om matematikk, oppdages det eller oppfinnes matematikk? Finnes det en platonisk himmel?

Matematikken består jo av to ting. Jeg mener, det er matematikkens form og det er dens egentlige innhold. Det egentlige innhold oppdages. Det kan ikke oppfinnes. Jeg mener, du kan ikke oppfinne sannheten. Den rett og slett er der. Men formen til matematikken er selvfølgelig noe som oppfinnes. Vi oppfinner våre symboler og betegnelser og alt. Og formen endrer seg. Fra en tidsperiode til en annen utrykker man samme grunnsannheter med helt forskjellige symboler, ofte. Det er noe av begge deler altså. Det viktigste i matematikken, den innebærende evige sannhet som man finner den, den er selvfølgelig en oppdagelse. Den kan ikke være oppfunnet. Men man kan oppfinne nye betegnelser og symboler og alt mulig sånt.

Det er jo slik at matematisk sannhet blir jo aldri foreldet. Men hva tror du vil overleve, som vil bli husket?

Jeg tror at det i grunnen er de enkleste tingene i matematikken som er de viktigste, synes jeg. Hvis du sammenligner Hermann Weyl og Siegel. Det Siegel gjorde var uhyre vanskelig å gjøre. Men det var også veldig vanskelig å begripe selv efter det var gjort. Det Hermann Weyl gjorde var stort sett også svært nytt, men efter at Hermann Weyl var ferdig med det så var det i grunnen mye enklere å forstå. Så jeg tror at det er de enkle ting som er de mest fundamentale i matematikken, må jeg si.

Hva med estetikk og eleganse i matematikk?

Vel, jeg synes det er verdt å legge en hel del vekt på å forenkle og gjøre en ting så elegant som mulig i forhold til den tidsperiode da det ble gjort. Det kan være

at den senere tid vil finne noe annet der som svarer mer til deres oppfatning. Jeg synes eleganse er viktig, men hvis man ikke kan gjøre det elegant, så i Herrens navn må en akseptere at det blir gjort på en uelegant måte.

Du har jo vært det meste av ditt yrkesaktive liv her ved Instituttet i Princeton.

Jo, det har jeg bortsett fra noen små avbrytelser her og der. Og efter at jeg tok avskjed så har jeg jo reist en del mer enn jeg brukte å gjøre mens jeg var i full stilling. Jeg var ofte vekk hele sommeren, så å si. En del ganger i Norge med hele familien, men også i senere år, mens mine barn vokste opp, så dro vi opp til Maine og var et par måneder der ved en av disse større innsjøene. Det er ikke noen god ide å være ved kysten. Sjøen er ganske kald på Mainekysten. Det er bra for hummeren, men ikke så bra for mennesker. Vi var på en sjø som var en del av de såkalte Belgrade Lakes. Det var en der som kaltes for The Great Pond. Det var i virkeligheten en ganske stor "lake", eller innsjø som man kaller det. Slettes ikke hva man egentlig tenker seg som et "pond", men de brukte gjerne dette utrykket. Den var nokså grunn for det meste, slik at den ble ganske god og varm om sommeren, nok for å svømme i for eksempel. Det var jo veldig bra for barna. De brukte en del tid på å bade og svømme omkring. Begge mine barn lærte seg til å svømme der. Og jeg tok dem også for å fiske. For det meste fikk vi fisk som jeg ikke brydde meg noe særlig om å spise. Jeg drev mest og dorget, som det heter i Norge, "trawling" heter det her. Vanligvis fikk vi dette som kalles for "bass", en slags aborr. Men den lever på et annet sett enn aborren i Norge, den er ikke en bunnfisk i samme grad. Den taes mye på sluk, for eksempel.

Men her ved Instituttet, har du i disse årene savnet studenter og forelesninger?

Jeg har alltid hatt noen studenter her som var mer eller mindre viderekommende. En tid hadde jeg en som kom her for et par år en dag om uken. Han var allerede en associate professor ved Columbia. Ellers hadde jeg forskjellige. Noen var mine assistenter for en tid, som for eksempel, jeg tror jeg nevnte han forrige gang, en som het Gerd Hofmeister. En tysker som hadde studert noe i Norge før han kom hit. Og, senere en kineser fra Hong Kong, som kom som graduate student til Princeton University. Han var interessert i tallteori, men han kunne liksom ikke finne noen ved Princeton fakultetet som egentlig var interessert i de ting som han helst ville studere. Jeg holdt noen forelesninger den terminen her ved Instituttet. Han kom til disse, og så kom han etter en forelesning til meg og spurte om han kunne snakke til meg privat, og om jeg ville være enig i å være hans veileder til doktorgraden hvis han kunne få universitetet til å godta dette arrangementet. Jeg snakket med ham en del, og jeg var litt i tvil, for jeg visste ingenting om ham, men han virket veldig sympatisk. Så jeg tenkte at det skulle jeg gjøre. Jeg har siden beholdt forbindelsen med ham. Han var først graduate student, så fikk han sin doktorgrad, og så var han min assistent for et år etter det. Siden fikk han en jobb i Hong Kong. Jeg har besøkt Hong Kong et par ganger siden det, og han har kommet hit ofte. Han var her tidligere på høsten for å se meg igjen. Ja, det som står på tavlen der er skrevet av ham, og jeg beholder det fordi det er et problem

der som jeg gjerne vil se litt på, så jeg stryker det ikke ut. Ellers måtte jeg skrive det av noe sted. Det har jeg heller ikke lyst til å gjøre.

Her ved Instituttet så har det jo også vært en rekke andre svært kjente vitenskapsmenn som du har kjent, og jeg lurte på om vi kunne snakke litt om dem og kanskje vi da skulle begynne med et av Instituttets første medlemmer, Albert Einstein. I hvilken grad hadde du kontakt med ham?

Jeg hadde noe kontakt med ham, ikke mye. For jeg regnet med at han ble besværet av ganske mange mennesker som søkte kontakt med ham. Og jeg hadde i grunnen ingen grunn til å søke kontakt med ham, for jeg var ikke interessert i fysikk i grunnen, annet enn sånn rent generelt, i litt popularisert forstand. Men de kontakter vi hadde var i grunnen innledet av Einstein. Einstein fikk fra tid til annen forespørsler fra folk om forskjellige ting. Og blant annet hendte det at folk skrev til ham om tallteoretiske spørsmål. Så han konsulterte meg ved et par anledninger om dette. Jeg kan huske det var en gang noen som skrev til ham om Fermats problem. De trodde de hadde noe nytt der. Og jeg så da på dette en del, men det var... Jeg gav ham mitt svar, og Einstein, antar jeg, kommuniserte det videre til denne personen. Så all kontakt var i grunnen innledet av Einstein. Som sagt, jeg lot ham i fred. Han var jo ganske nære meg her. Særlig etter jeg hadde... nei, jeg hadde egentlig ikke... jeg flyttet inn her først etterpå. Von Neumann døde først etter at Einstein var død. Jeg hadde mitt kontor i "building C", som det het den gang. Den eksisterer ikke nu lenger som egen enhet. Den har inngått i denne såkalte Bloomberg Hall. Det er fysikere der nu. Jeg hadde mitt kontor der i flere år, til etter von Neumann var død. Da flyttet jeg hit.

Von Neumann, hadde du noe kontakt med ham?

Of course. Mest må jeg si sosialt. De hadde en hel del selskapelighet i sitt hus. Og på den tid hadde vi også en del i vårt hus. Så vi hadde kontakt sammen på denne måten. Og Mrs. von Neumann var også en god venn av Hedi, selvfølgelig. Hedi snakket ungarsk med disse to. Det kunne ikke jeg gjøre.

Jeg husker Hedi fortalte en gang at det tok lang tid før den første regnemaskinen her kunne slå von Neumann i hoderegning. Testet du noen gang hans ferdigheter der?

Han var uhyre kvikk med alt mulig. Han var veldig kvikk med å oppskatte. For eksempel, han kunne se på et perlekjede som hang rundt en hals, og si hvor mange perler det var på et øyeblikk. Det er bare et eksempel med ham. Han var veldig kvikk. Jeg har aldri møtt noen person som var riktig så kvikk som ham. Nei, jeg tror nok at det var en del av de andre folk som kunne være dypere enn von Neumann når det gjaldt ting. Det er ikke alltid at farten er det viktigste.

Etter hva jeg har forstått, så sto Hermann Weyl deg ganske nær på mange måter?

Jo, jeg hadde mye til overs for ham. Jeg beundret Hermann Weyl mer enn noen av de andre matematikerne, i grunnen, etter at jeg begynte å se på hans ting. Jeg

mener det var nettopp dette at de ting han gjorde syntes alltid å være enkle etter at han hadde gjort dem. Det tror jeg i grunnen karakteriserer de viktigste ting i matematikken, det er de som blir enkle. Som jeg sa, Siegel hadde jeg en hel del beundring for. Men mye av det han gjorde var så at det syntes praktisk talt umulig, også etter han hadde gjort det.

Diskuterte du noen gang matematikk eller logiske problemer med Kurt Gödel?

Bare en gang husker jeg vi diskuterte noe i matematikk. Han spurte meg en gang om det var noen som hadde forsøkt å finne en formel for klassetallet av reell-kvadratiske tallkropper. Han tenkte seg at det kunne eksistere en empirisk formel som kanskje ikke kunne bevises. Det klassetallet opptrer alltid blandet inn med den såkalte regulatoren som i det tilfellet er logaritmen til den minste løsning av Pells ligning for ... det syntes for meg en kuriøs idé selvfølgelig. Jeg må si jeg kan jo ikke ekskludere at det eksisterer en formel for den. Det finnes jo enkle formler, på en måte, for klassetallet av imaginærkvadratiske tallkropper. Men der finnes det ingen regulator, selvfølgelig. Men han tenkte seg muligheten av at det eksisterte allikevel en formel der som... men saken er at denne formelen ville være helt forskjellig fra den man har i det andre tilfellet. Faktum er at klassetallet kan fluktuere veldig mye efter hvor stor regulatoren er, selvfølgelig. Klassetallet ganger regulatoren er det som man vet den omtrentlige størrelsesorden av. Så det måtte være en formel som tillot disse store oscillasjoner. Jeg sa til ham at jeg hadde egentlig ikke noe større tro på at det var noen sånn formel, og jeg la også til at i tilfelle det skulle eksistere så ville det være svært usannsynlig at man skulle komme over det. Hvis den ikke kunne bevises så måtte den jo finnes empirisk. Og jeg mener, det å lete etter en empirisk formel for noe sånt, det er verre enn å lete efter en nål i en høystakk.

Som person så var vel også Gödel ganske spesiell?

Vel, han var utvilsomt en uhyre stor logiker. Men når det gjaldt ting utenfor matematikken så var de premisser han arbeidet ut fra ganske forskrudde til dels. Så derfor var hans konklusjoner heller ikke så gode når det gjaldt sånne ting. Jeg vet at en del av hans arbeider gjorde han i relativitetsteori var motivert ved at han ville forklare muligheten av spøkelser, av "ghosts" som det heter på engelsk. Øyensynlig trodde han på ghosts. Han hadde en del merkverdige ideer. For eksempel hans ide om at enhver autoritet kom fra Gud. Det syntes meg å være noe som man vanskelig kan underskrive om man ser på hva som har hendt ned igjennom tidene i verdenshistorien, også inntil de nyere dager, og hva som fremdeles hender. Det er åpenbart at om det eksisterer noen Gud så har han ingenting å gjøre med det.

Av andre personligheter på 50-tallet så vet jeg at også John Nash arbeidet med Riemann hypotesen. Konsulterte han deg en del i den tiden?

Han sendte noe stoff til meg. Han brukte en del av disse idéer som Cramér hadde hatt, og ved å bygge på å betrakte primtallene som et element i et rom hvor du betrakter følger av tall hvor sannsynligheten for at et tall n hørte til følgen var

$1/\log n$. Han kom opp med en del ting som han mente skulle holde med sannsynlighet 1, og som derfor skulle holde generelt. Ikke alle av hans konklusjoner... en del av hans ting ... jeg husker en gang han sendte et brev hvor han hadde to sånne ting, og jeg skrev til ham at de kunne begge ikke være riktige fordi jeg kunne vise at for de riktige primtall så kunne ikke begge ting holde. Jeg kunne ikke si hvilken var gal, sannsynligvis var begge gale. Men jeg kunne si at de kunne ikke være begge sanne ved å bruke de eksplisitte formlene som innfører en viss nesten periodisk natur i noen restledd og sånn. Og dette stred mot disse. Nei, jeg må si han kom aldri til noen ting der som hadde noe verdi etter mitt synspunkt. Men jeg tror han allerede var noe forskruet på det tidspunkt. Det var omtrent på samme tid at han gav opp sin jobb på MIT og tilbrakte en del tid i Europa, hvor han liksom påberopte seg at han skulle "become a world citizen", som han utrykte seg. Han ville oppgi sitt amerikanske pass på den tiden og hadde en hel del andre ikke særlig rasjonelle ideer, må jeg si. Også utenfor matematikken.

Har du lest boken "A Beautiful Mind", eller sett filmen om ham?

Nei, jeg har ikke sett filmen og jeg har ikke lest boken heller. Faktum er at boken finnes hjemme fordi at Hedi kjøpte denne boken og ville se på den. Og jeg må si at jeg hadde nok av Nash i gamle dager. Jeg syntes ikke jeg ville lese noe om ham. Men han kom seg jo en del da i senere år. Men det er en nokså tragisk historie. Han har en sønn som også tok en doktorgrad i matematikk, men ikke en så god doktorgrad som Nash tok, selvfølgelig. Men denne sønnen har også schizofreni. Jeg vet ikke om han er hospitalisert nå, eller om han ikke er det. Men det er en noe bedrøvelig historie.

Robert Oppenheimer som direktør, du kom godt ut av det med ham administrativt?

Stort sett, ja. Jeg hadde en hel del med ham å gjøre i den senere tid. Og vi hadde et forholdsvis godt forhold. Vi snakket nokså fritt med hverandre. Han var på mange måter en god direktør. På andre måter ikke noe særlig god direktør. For eksempel, han prøvde aldri å reise mer penger for instituttet. Han kunne ha gjort det på den tid da han først kom hit. Som von Neumann utrykte det, kanskje på en mindre delikat måte, at da Oppenheimer kom til Instituttet og Einstein fremdeles var her, og Oppenheimer fremdeles hadde glorien av atombomben og forskjellig sånt. Det var i grunnen enda lenge før disse ting som kom senere som plaget ham. Og han kunne ha fått inn aldri så mange millioner mente von Neumann. Og han utrykte det på den, må jeg si, noe mindre delikate måte at på den tid "every Jewish millionaire would have come crawling on their knees to give him money".

For å ta en person utenom både matematikk og fysikk, historikeren og diplomaten George Kennan, han var jo her i mange år. Hadde du noen kontakt med ham?

Nei, jeg hadde ikke noen kontakt med ham. Jeg må si, jeg var egentlig imot at han skulle komme hit. For jeg syntes at på den tid da de foreslo ham som medlem så hadde han i grunnen ikke noe særlig til sin kreditt som historiker. Han var en politisk figur på den tid. Han skrev jo noen bøker senere. Jeg må si, jeg så

gjennom et manuskript de sendte rundt på hans første bok på den tiden. Og det gjorde ikke så veldig stort inntrykk på meg, må jeg si. Nei, jeg hadde ikke noe særlig sympati med ham. Jeg syntes de skulle ha holdt seg til historikere som virkelig hadde skrevet noenting før de kom hit av verdi som historisk dokumenter. Så det var ett punkt hvor Oppenheimer og jeg var i stor uenighet.

Det var jo også en annen situasjon hvor matematikerne kom i konflikt med direktøren. Og det var, jeg husker da jeg var her, det var vel i 73, da Carl Kaysen ville utbygge School of Social Science. Da kom det til en veldig sterk konflikt mellom direktøren og matematikerne.

Det var da han ville gjøre den andre ansettelsen i den skolen. De valgte en figur fra vestkysten. Jeg kan ikke huske hans første navn, men han het Bellah til etternavn. Og vi syntes ikke at han i grunnen passet, for det første trodde jeg alltid det var et feilgrep å foreslå sine venner som ansatte. Veblen hadde et godt prinsipp, i grunnen. Han sa at hvis du er i tvil mellom to kandidater "you should always appoint the son of a bitch". Sjansen er at han i virkeligheten er den beste der, fordi du ikke er så sympatisk stillet mot ham. Vel, men jeg tror det er veldig uheldig om en professor foreslår en venn. Det skulle man ikke gjøre egentlig. Saken er, denne første sosiolog som vi fikk, han blandet seg svært mye med religion, med Islam, som han hadde studert, får jeg si, på to ekstreme punkter. Nemlig i Marokko og i Indonesia. Jeg husker da vi behandlet Bellah, og jeg snakket med en av disse ekspertene i komiteen som hadde behandlet ham. Men vi var også enige om at da vi behandlet Geertz, den første. Det var en viss brillians i hva han skrev, og sånn. Vi kunne se at han var et talent. Litt arrogant i sine skrifter, ofte må jeg si. Det var en del der som jeg ikke likte. Måten som han behandlet, for eksempel, noen franske sosiologer på som anses som svært fremtredende. Men jeg snakket så med en mann fra Nederland som kjente en hel del til Islam fra forskjellige kanter, og spurte litt om hvordan det var med det, og han sa ”well, it’s a little bit if you want to study Christianity by looking at sects in California and in Ethiopia”. Så man skal være forsiktig med å trekke for generelle slutninger fra et sånt underlag, selvfølgelig. Men i alle fall, jeg stemte for Geertz. Men så foreslår han denne Bellah som er utenfor hans område. Han har arbeidet med en hel del forskjellige ting. Han skrev en del om Japan i den såkalte Tokugawa periode. Men han arbeidet også mye med religion. Noe som han kalte "The American Civil Religion". Disse to var øyensynlig gode venner. Jeg syntes ikke det var noe godt grunnlag for ansettelse, og det samme syntes en hel del av de andre. Men School of Historical Studies og School of Physics, som eksisterte allerede den gang, og de var alle forholdsvis unge folk, de fulgte Kaysen (Carl Kaysen). De fulgte direktøren. Og det var bare en av dem som stemte imot, det var denne fysikeren som nylig døde.

John Bahcall?

Ja, han stemte imot, eller jeg tror han "abstained". Han kunne ikke riktig svelge denne fyren heller. Og når det gjaldt Bellah, så de fleste i Historical School stemte imot ham også. Fakultetsstemmen var stort sett mot ham, han hadde minoritet

der. Men direktøren, Kaysen, har overtalt disse til å ansette ham, uten at han hadde noe flertall i fakultetet. Det var jo helt imot alle tradisjoner, selvfølgelig. Og det ledet etter hvert til at Kaysen måtte gå. Jeg mener, hans posisjon ble "untenable" etter det. Han var utvilsomt den verste direktør vi har hatt ved Princeton, Kaysen. Oppenheimer var på mange måter en god direktør. Oppenheimer var en svært allsidig begavet person. Han var veldig flink for eksempel når det gjaldt å formulere noe som skulle i en sak på en tilfredsstillende måte. Og mange folk har fortalt meg at han ofte kompletterte deres setninger, fullførte dem før de var riktig ferdig selv. Hvis de hadde vanskelig for å utrykke seg ja, han kunne gjøre det. Han hadde en hel del sider. Jeg fant ofte at han, når det gjaldt noen kompliserte ting, han fant ofte veldig gode formuleringer av fakultetsbeslutninger og sånn. Men det ble en del konflikter i hans tid. En gang efter den såkalte Milnor-affæren, det var jeg som var fakultetssekretær på den tid.

Unnskyld, hva var det? Milnor affæren?

Vel, vi prøvde å foreslå professor Milnor. Han var ved universitetet som professor her. Oppenheimer var imot det, før fakultetet hadde tatt sin posisjon. Jeg mener, Milnor fikk flertall i fakultetet selv om Oppenheimer hadde fysikerne med seg i å stemme imot ham. Men, det ble til at Oppenheimer, før saken var ferdig behandlet i fakultetet, før det var avgjort i fakultetet, Oppenheimer hadde tatt saken til "the trustees" på forhånd og liksom fått frem at det skulle eksistere en sånn implisitt "gentlemans agreement" mellom universitetet og Instituttet at vi ikke skulle ta folk fra hverandre. Det var det ingen som egentlig kjente noe til at det hadde vært noe sånt. Vi snakket med folk som hadde vært her praktisk talt fra begynnelsen. De kjente ikke til det. Men Oppenheimer påstod at den som da var Chairman of the Board, Leidesdorff, en mann som jeg aldri i grunnen hadde noen særlig tillit til, han hadde vært regnskapsfører for denne Bamburger som jo gav pengene for det meste til instituttet. Den første chairman of the board som jeg møtte var han som hadde vært advokaten til Bamburger, og han var en langt mer imponerende person, får jeg si, enn Leidesdorff. Det er jo i og for seg forståelig. For jeg synes jo at å føre regnskaper er ikke noe som utvikler ånden noe særlig, skulle jeg tro. Derimot, en advokat har atskillig mer, så det kan man forstå. I alle fall, denne Leidesdorff påstod at det hadde vært en "agreement" med en tidligere president av universitetet. Saken er den at allerede i tidlig tid så tok de en del ansatte fra universitetet. Oswald Veblen kom fra universitetet og han fikk også en annen med seg litt senere. Nemlig Alexander, som på den tid allerede hadde forlatt Instituttet. Han levde vel fremdeles Alexander. Han gjorde det, ja. Han ble nokså gammel. Men etter at Siegel og Hermann Weyl og Veblen hadde gått for aldersgrensen så fant Alexander at han ikke lenger hadde lyst til å være her. Så han sa at han ville gi opp sin professorstilling. Han kunne fortsette som et Member, men uten noen lønn. Han trengte den ikke. Han hadde arvet ganske mye penger. Instituttets lønn betydde ingenting for ham. Han sa at det hadde ikke vært noe sånt "agreement". Det er riktig, vi hadde ikke tatt noen i en hel del år

senere. Men det hadde fra tid til annen vært nevnt. Jeg mener, jeg kan huske selv at Hermann Weyl, for eksempel en gang vi snakket om mulige folk vi kunne foreslå til fakultetet, han nevnte for eksempel Bochner fra universitetet. Bochner var jo en meget god matematiker, på mange måter. Vel, i alle fall, dette var Milnor-affæren. Og enden på det ble at disse trustees avslo å utnevne Milnor. Faktum er at det hadde vært en del snakk mellom universitetets folk og Instituttets folk. The Mathematics Department ved universitetet var ikke villig til å la Milnor komme hit. Jeg snakket med den som var Chairman på den tiden. Men Presidenten var imot det. Det viste seg senere at kommunikasjonene mellom Chairman of the Mathematics Department og Presidenten, som var Bowen, tror jeg på den tiden, alltid gikk gjennom en som het Dean Brown. Det er tydelig at denne Dean Brown ikke var en særlig god kommunikasjonskanal, fordi at Oppenheimer som snakket med President Bowen fikk alltid den beskjed at the Mathematics Department var imot at det skulle bli gitt noen tilbud til Milnor. Og når jeg snakket med ham som var Chairman of the Mathematics Department, han sa alltid at de var i favør av dette. Det ble klart for meg først senere at kommunikasjonen alltid hadde gått gjennom denne noe defekte kanal av informasjon. Jeg fikk ut av denne Chairman at han aldri hadde snakket med Presidenten av universitetet personlig, men alltid bare med denne Dean Brown. Så all kommunikasjon hadde gått gjennom ham. Så det forklarte "the discrepancy".

André Weil var jo også din kollega i mange år. Diskuterte dere ofte matematikk sammen?

Av og til, ja. Det var forskjellige ting som vi hadde interesse i begge to, men han hadde jo mange interesser som jeg ikke hadde og jeg hadde også noen som han ikke hadde, selvfølgelig. Men han var en av de, på den tid, av mine kolleger så var André Weil og Arne Beurling de som jeg snakket matematikk med. Jeg mener, jeg hadde gode relasjoner med en del. For eksempel med Dean Montgomery hadde jeg svært god relasjon, men vi snakket praktisk talt aldri matematikk, fordi vi hadde ingen felles interesser i grunnen. Selvfølgelig, når vi skulle stemme på kandidater som skulle komme eller ikke komme hit, som vi gjorde tidlig på hver vår, så var det jo sånn at alle skulle se på alle ansøkninger og anbefalinger og sånn. Når det gjaldt noen som søkte i topologi, så var det sånn at jeg la stor vekt på hva Montgomery sa om dem. Og ellers på anbefalinger og sånn. Jeg regnet ikke med at jeg hadde noe særlig forstand på selve arbeidene. Etter hvert så lærte man også litt om hvilke folk man skulle stole på når det gjaldt anbefalinger. Det var noen som man ikke kunne stole på i det hele tatt. De skrev veldig bra om alle. Det er ikke så bra å være for snill.

Hvilke ikke-matematiske interesser, hobbyer, osv. har du?

Vel, jeg hadde jo en del hobbyer. Det er jo en del andre ting som interesserer meg, for eksempel. Jeg har tildels samlet mineraler og skjell, seashells, på forskjellige kyster. Mine interesser ble først vakt i Norge, selvfølgelig. Men jeg har ikke i grunnen så mange skjell fra Norge fordi at jeg tok ingen med meg da jeg reiste.

Jeg har samlet en del på amerikanske kyster, og også en del fra, særlig fra, det man kaller the Red Sea, og the Gulf of Akaba. Ikke så mye fra Middelhavet i grunnen. Jeg fant ikke så veldig mye der. Men i Florida, og også noe nede i Mexico har jeg samlet en del. Jeg har mest skjell som jeg har samlet selv. Man kan også kjøpe dem i forretninger. Men jeg har bare kjøpt et par som jeg ikke kunne finne pene eksemplarer av.

Hva med litteratur og dikt? Er du glad i det?

Jeg var jo tidlig svært interessert i, for eksempel, tysk litteratur, og sånt. Vi hadde bøker hjemme, samlede verk av Göthe og Schiller og Heine. Jeg må si jeg leste Goethe og Heine, men ikke mye Schiller. Av noen grunn appellerte ikke Schiller. Derimot så jeg litt inn i Wagners samlede verker som jo inneholdt, ved siden av librettoene til operaene, en del politiske skrifter og sånn. Han kunne tildels utrykke seg veldig skarpt om en del folk. Men så ille som han ofte har blitt malt var han jo ikke. Jeg mener, han ville, man kan ikke vite det, men han ville ikke nødvendigvis ha vært noen tilhenger av Hitler, selv om han blir tatt til inntekt for nazismen, selvfølgelig. Han hadde en hel del jødiske venner, for eksempel.

Og norske diktere? Hva med norske diktere? Har du noen favoritt der?

Jeg har jo selvfølgelig lest Bjørnson og Ibsen, og også deres dikt. Men, ja, det finnes jo andre som jeg har satt høyere. Av disse tidlige så må jeg si at jeg har alltid likt Wergeland. Det er jo ikke alltid så velslepent, får man si, men det har atskillig mer makt på enn for eksempel Welhaven, som ikke hadde riktig den samme kraft, kanskje heller ikke dybden som Wergeland, hadde. Men jeg må si, jeg har hatt mer utbytte av senere dikt. For eksempel Olav Bull er en, og Arnulf Øverland er en annen, og Olav Aukrust. Jeg nevnte ikke Vinje, han satte jeg svært høyt. Og Olav Aukrust satte jeg også svært høyt. Det finnes en del andre også som jeg har lest en del av og som jeg til og med kan huske en del av. Det er nok de jeg har nevnt som mest sitter i minnet. Jeg leste selvfølgelig også Kielland og Lie, selvfølgelig, men de skrev i grunnen ikke noe poesi noen av dem. Men jeg satte jo pris på en hel del av deres historier.

Part 2

15. november 2005.

Kan vi spørre deg om når det gjelder forskjellige matematiske begavelser. Kan du sammenligne Riemann og Weierstrass som jo er to helt forskjellige typer?

Jeg må si jeg oppskatter jo Riemann mye høyere. Weierstrass har jeg i grunnen aldri hatt noe særlig føling for. Jeg må til og med si at de fotografier jeg har sett av ham, så ser han alltid ganske, jeg kan ikke riktig huske nu hva er det beste norske ord for det, men jeg skal si det på engelsk, "disagreable". Ja, jeg hadde på mitt kontor i Oslo mens jeg ennå var der, på Blindern, så var det en del fotografier av matematikere der inne. Det var blant annet av Abel. Vel, det var selvfølgelig et bilde som var tatt av dette portrettet som var gjort. Men jeg hadde også et fotografi som var tatt av et portrett av Euler. Det var også et av Weierstrass, og der var Gauss også. Det kunne muligens ha vært riktige fotografier. Weierstrass var sikkert et riktig fotografi. Han var nokså gammel, og han satt i en stol med en bok i hånden. Han leste den ikke. Han liksom holdt den opp, et ganske stort tungt volum, får man si, eller bind. Utrykket i hans ansikt var slik at jeg alltid hadde inntrykk av at han holdt på å ville løfte denne boken og kaste den etter meg. Mens alle de andre hadde jeg et mer sympatisk inntrykk av. Hans syntes jeg var et mer ubehagelig bilde å se på. Men bildene de tilhører universitetet på noen måte, så jeg tok dem aldri vekk. Jeg lot de henge der. Jeg vet ikke hva som er blitt av dem senere.

Et lite tilleggspørsmål før vi går videre. Når var det første gangen at du leste Abels addisjonsteorem, denne korte noten?

Jeg ble oppmerksom på dette korte arbeidet i en nokså tidlig alder, men efter at jeg hadde selvfølgelig lært å regne med differensialer og sånt. Så jeg hadde allerede den bakgrunn at jeg kunne begripe det i den forstand at jeg forstod de enkelte ledd og så, men det var uforståelig for meg hvordan han kunne ha kommet til dette. Som sagt, den dag i dag synes det som den rene magi, dette korte bevis. Det lange arbeid har jeg aldri lest gjennom. Jeg har bladd gjennom det og så, men det er litt for langt. Det finnes jo i grunnen en del andre beviser som brukes i dag om Abels teorem, hvor du opererer på den Riemannske flate. De har jeg lest, og faktum er at da jeg tok min doktorgrad så skulle jeg gi to forelesninger, en på et oppgitt emne og en på et selvvalgt emne. Det emnet som ble oppgitt til meg var Abels addisjonsteorem. Da gav jeg selvfølgelig dette beviset som er kommet til senere med denne Riemannske flate, som vel er bedre nu i dag. Man forstår bedre strukturen av det hele på den måten. For den selvvalgte valgte jeg transcendens, dette med å vise transcendensen av α^β, hvor disse er algebraiske tall, beta ikke er et rasjonalt tall, og $\alpha \neq 0, 1$.

Det var det selvvalgte emnet det?

Det var det selvvalgte emnet. Det fantes to beviser på den tid. Ett av Alexander Gelfond, og ett av en tysker, Theodor Schneider. Jeg syntes alltid Gelfonds bevis

var noe enklere, og jeg fulgte egentlig ikke hans arbeid. Han publiserte to arbeider om det. Et ganske kort ett som var en skisse og så et noe lengre som hadde alle detaljer i. Og jeg må si, jeg greide aldri å lese gjennom det siste. Men det første syntes jeg var greit å forstå, og man kunne fylle inn de detaljer som manglet. Så det var det bevis jeg brukte i min forelesning. Jeg arbeidet litt med noen transcendensproblemer den gangen. Jeg skrev ikke noen ting, men jeg fant en del resultater, men de var ikke riktig hva jeg ville ha, får jeg si. Ett av dem ble publisert senere av Serge Lang. Men jeg fant ut senere da jeg traff Siegel, og også Gelfond, at de begge også var klar over at man kunne bevise den setningen. Den gir ikke transcendensen av noe bestemt tall, men den gir transcendensen av et av to forskjellige tall. De er i virkeligheten selvfølgelig begge transcendente, men man kan bare bevise at ett av dem er det uten å si hvilket. De kan ikke begge være algebraiske. Man får motsigelse av det. Så det er hva jeg synes er et utilfredsstillende resultat, og det hadde nok de to andre tenkt også. Men som sagt, det ble ganske mange år senere publisert av Serge Lang.

Du tok jo doktorgraden høsten 1943?

Det er riktig.

Hvem var det som var på din doktorgradskomite?

Fra Norge var det Skolem og Størmer. Fra Danmark var det Harald Bohr. Arbeidet var blitt sendt til ham mens han ennå var i Danmark, men på den tid da disputasen kom så var han i Sverige. Og selvfølgelig, ville han ikke komme til Norge på den tiden, men han sendte et ganske langt brev med sin vurdering. Og det ble lest opp av Størmer.

Kan du sitere noe av det han skrev?

Det må jeg tilstå at jeg ikke kan. Nei, jeg husker ikke presis noe om ordleggingen. Men han hadde en hel del rosende ord om disse presise oppskatninger som foregikk. Skolem derimot hadde en del kritikk av min engelsk, og den må jeg tilstå, den var nok noe berettiget, fordi jeg var nokså nylig begynt å skrive engelsk på den tid. Og den var ikke så god som min tysk, men jeg hadde bestemt meg til at jeg ikke ville publisere på tysk lenger, som jeg hadde gjort før.

Det var jo et sensasjonelt resultat du hadde, med Riemann-hypotesen.

Det vakte noe oppsikt, selvfølgelig.

Primtallene, de har jo stått ditt hjerte nær i lang tid, eller i hele din karriere. Kunne du fortelle oss litt om hva du betrakter som de viktigste strukturresultatene om primtallene? Finnes det noe hierarki? Primtallet 2 er ytterst spesielt, men er det andre som har en spesiell stjerne, eller hva?

Man kan ikke si at primtallet 2, og det møter man allerede nokså elementær tallteori, har en spesiell stilling, fordi at strukturen av mange ting er nokså forskjellige. Når man snakker om ting som i kongruensteorien og sånn så har 2 en spesiell

stilling. Derimot viser seg når man senere utvikler teorien for algebraiske tall, algebraisk tallteori på en algebraisk tallkropp, så er 2 i grunnen ikke så eksepsjonelt. Det viser seg at de primidealer som er divisorer av diskriminanten til kroppen spiller samme rolle i en algebraisk tallkropp som 2 i det klassiske tilfellet. Så det er alltid et endelig antall primidealer som inntar en spesiell stilling. Så, på denne måten er, kan man si, det noe unaturlige ved 2 blant heltallene forklart. Men, som jeg tror jeg nevnte forrige gang, Siegel brukte å si, når han snakket om Kroeneckers uttalelse om at de hele tall var skapt av Gud og alt annet var menneskeverk, så la han alltid til "Nür die zwei ist von der Teufel gemacht". Tallet 2 var laget av djevelen, og ikke av Gud. Ja, men det var hans spesielle type humor, selvfølgelig. Primtallene har jo en struktur i det store, og det finnes i deres fordeling både regulariteter og irregulariteter som kan undersøkes. Når det gjelder regularitet så kan man si at det er primtallsetningen som gir den generelle fordelingen, og gir den med ganske stor presisjon hvis Riemanns hypotese er riktig. Men bortsett fra dette, så finnes det også irregulariteter med primtallene. Hvis man ser på finfordelingen så finnes det jo, for eksempel, primtalltvillinger så langt ut som man har tabulert primtallene. Det vil si, det er to primtall med differanse to mellom seg. Det samme gjelder om man tar et annet like tall, så vil det utvilsomt finnes uendelig mange par som har den differansen, hvor langt ut man går. Det er enda ikke bevist, men det er høyst sannsynlig at det er riktig. Man har til og med har ganske gode argumenter, men ikke riktig beviser, for hva som er den generelle fordelingen av for eksempel primtalltvillingene. På den annen side finnes det også store gap mellom primtallene. Ingen vet i dag hvor store disse gapene kan bli mellom primtallene. Gjennomsnittsdifferansen mellom to suksessive primtall er, hvis du har et tall av størrelsesorden n, så er det omtrent $\log n$, det følger av primtallsatsen. Man har vist at de er av noe større størrelsesorden disse gap som kan forekomme. Men vi vet ennå ikke om det kan forekomme gap som er så store som en potens av n. Det er forholdsvis lite sannsynlig at det kan gjøre det, men vi kan ikke motbevise det. De beste resultater om maksimaldifferansen mellom primtallene gir en eksponent som er utvilsomt helt gal, og sannsynligvis kan ikke disse intervallene mellom suksessive primtall nå så høyt som noen potens av tallet, hvor liten eksponenten måtte så være. Et åpent spørsmål som er mer fundert over, får jeg si – vi har ingen resultater der – er om det kan være som en potens av $\log n$. Det har vært gjort en formodning først fremsatt av Cramér på grunnlag av en sannsynlighetsteoretisk modell som han laget, at de maksimale gap er av størrelsesorden $\log^2 n$. Men det finnes i grunnen ingen resultater i denne retningen. Man har bare kunnet vise at det finnes gap som er av litt større størrelsesorden enn $\log n$ ganger noen faktorer som har itererte logaritmer, som jo er uhyre langsomt voksende funksjoner.

Hvis man visste at Riemannhypotesen var sann, ville det gitt innsikt i de tingene du nå sier?

Det ville ikke hjelpe så mye på disse spørsmålene, nei. Det er så at de må henge sammen med hva man kunne kalle finfordelingen av nullpunktene på den kritiske

linje, og det vet vi ikke mye om. Det finnes visse formodninger som ikke er bevist, og det er mulig at man kan komme frem til noen nye skarpe formodninger som kan gi noe mer. Men jeg tror det vil, om det noen gang kommer, ta uhyre lang tid før sånne spørsmål kan bli oppklart.

Men er der eller forventer du at det er en direkte sammenheng mellom strukturen av fordelingen av nullpunktene på linjen $Re(s) = 1/2$ og primtallenes fordeling?

Det er i og for seg klart at det er en forbindelse, fordi at disse eksakte formler, for eksempel Riemanns formel for $\pi(x)$ så er antallet primtall under ett viss tall x gitt ved en formel som er nokså grei, men som inneholder en uendelig rekke hvor disse nullpunktene inngår. Så, det er en sammenheng. Det er klart, men om det er en sammenheng som man kan komme til bunns i, det er en annen sak, og noe som man kan ha stor tvil om. Jeg mener, det er mulig at man kan med tiden komme frem til resultater som gir mer detaljert informasjon om hvordan nullpunktene er fordelt på linjen. Men det er håpløst i dag å spekulere om hvordan det kan være. Hva vi har i dag er bare nokså primitive formodninger om fordeling av nullpunktene som man kan dra noen slutninger av, men ikke særlig presise slutninger.

Men du vil ikke forvente at et bevis av Riemann-hypotesen ville gi den type innsikt?

Det er mulig at et bevis av Riemanns formodning vil gi en hel del annet samtidig, fordi det er sannsynlig at det må bero på ganske nye ideer og sånn som kan bringe inn en hel del ny informasjon. Mer enn bare at de ligger på linjen. En hel del mer detaljert informasjon. Men igjen, det er sånn som man kan spekulere på.

Du har ingen spekulasjoner du vil komme med i den retning?

Nei, det har jeg ikke. Jeg vet ikke i hvilken retning man skal søke for å finne et bevis. Og derfor kan jeg heller ikke ha noen formodninger om hva andre resultater eller bevis vil medføre. Men man kan vente at nye ideer og nye metoder som gir et så avgjørende resultat vil også gi tilgang til en del mer.

Av de 23 problemene som Hilbert nevnte i 1900 holder du på Riemann-hypotesen som det absolutt viktigste?

Vel, for meg er det viktigst så klart. Men det behøver ikke å være det for andre matematikere. Det avhenger av hva slags interesser man har. Det er ganske mange ting som avhenger av Riemanns hypotese, særlig hvis man tenker på den i den mer generelle form. Jeg mener, Riemann snakket bare om zeta-funksjonen. I dag har man jo så mange funksjoner av lignende type hvor man regner med at samme ting holder. Og jeg tror det kanskje er lite sannsynlig at man bare finner et bevis for Riemanns opprinnelige hypotese uten at det også gir en hel del om disse andre rent generelt. Det ville jo ha uhyre store konsekvenser.

Så du tror fortsatt at det er mye trolldom å avdekke blant primtallene i framtiden?

Jaja. Det er utvilsomt ting som kan... det finnes kanskje også en del problemer som er faktisk uløselige i denne retning. Det er så at man kan gjøre spørsmål, for

eksempel, om disse ting man kaller for Fermat primtall. Det er primtall av formen $2^p - 1$, hvor p er et primtall. Det er ingen som vet om det finnes uendelig mange av disse, eller bare et endelig antall. Primitive sannsynlighetsteoretiske betraktninger skulle indikere at det antagelig finnes uendelig mange av dem. Derimot, denne type primtall som kom inn i forbindelse med sirkeldelingsligningen, altså hvor man kan dele sirkelen i et visst antall deler med passer og linjal som er de klassiske konstruksjonsmidler i geometrien, det er primtall av formen

$$2^{2^n} + 1.$$

Ingen vet om det finnes uendelig mange av disse heller. Men der sier sannsynlighetsteoretiske argumenter at det bare er et endelig antall. Det er en uhyre tynn følge. Jeg mener, de vokser veldig fort disse tallene. Det er kanskje spørsmål som aldri blir avgjort, og det er mulig at det ikke finnes... Det er utvilsomt så at det er en hel del spørsmål i matematikken som kan stilles, som er uløselige, så og si. Men det er jo så at vi ofte stiller spørsmål som det i grunnen ikke er noen særlig tvingende grunn til å stille. Jeg har alltid vært av den mening at hvis det gjelder et problem som man faktisk nesten er nødt til å betrakte, jeg mener som så og si tvinger seg på en, så skal det alltids finnes en matematisk løsning til det.

Vi har jo mange utvidelser av tallbegrepet. Mens i nyere tid så har en sett, for eksempel, når en prøver å utvide tallbegrepet også i en mer geometrisk retning hvor sfærene, på en måte, spiller rollen av naturlige tall. Har du noen tro på at den type utvidelse vil gi noe ny innsikt i tallteorien?

Den kan gi noe ny innsikt i andre retninger. Jeg tror ikke det har noen betydning for hva vi vet om disse mer vanlige tall som vi betrakter. Jeg mener for eksempel om man tar de aller første generalisasjoner av tallbegrepet utover de komplekse tall, kvaternionene. Det er det jo folk som har skrevet en del om tallteori basert på kvaternionene og sånn, og kommet fram til en del ting, men det har aldri gitt noen nye innsikter om de klassiske tall. Så jeg tror ikke det er mye å vente i så måte. Jeg må si, kvaternioner kan være nyttige for en del ting, men egentlig så forferdelig interessante er de ikke. Men det vesentlige nye er jo det at man må gi opp kommutativiteten i multiplikasjonen.

Hva med det som Deligne viste, den såkalte Riemannhypotesen for endelige kroppsutvidelser?

Vel, det er jo altså en videreutvikling av dette som begynte med det som først Hasse beviste for zeta-funksjonen for en kubisk kurve, og senere André Weil for generelle kurver. André Weil fremsatte en del formodninger, og det var dette som da Deligne gjorde. Jeg mener, etter André Weils resultat, så var det jo de som trodde at det skulle lede til at man skulle finne en måte å angripe det klassiske problemet på, ved å se på de metoder som hadde vært benyttet. Men det synes som det ikke er tilfellet. Jeg mener, det er tydelig at disse ting har en viss sammenheng, men de beviser som har vært funnet, de har ikke gitt noen som helst indikasjon på at de kan overføres til det klassiske tilfellet.

Vi snakket jo om dine store resultater om Riemanns zeta-funksjon og primtallsetningen og sporformelen. Men i løpet av de siste 40 årene, hvilke problemer er det da du har mest arbeidet med?

Vel.

La oss si fra 1960 og utover.

Efter 65, å ja. Jeg har jo gjort en del, og noe av det er blitt publisert. Jeg har arbeidet med forskjellige ting i mellomtiden. Men mest i relasjon til noe som jeg hadde gjort før. Både med såld-metoder og med zeta-funksjonen og lignende funksjoner, og med sporformelen også for så vidt. Jeg har holdt en del foredrag også, men ikke så særlig mye av det har blitt publisert. En del av det som finnes utgitt i disse såkalte Collected Works er jo arbeid som har vært gjort efterpå. Men jeg har alltid hatt en viss treghet med å skrive opp ting for publikasjon. Det er mye lettere å holde en forelesning. Da behøver man bare å gjøre notater som man selv kan forstå, for å kunne ha noe å holde seg til.

Sitter du inne med en del resultater som du ikke har formidlet til andre, og som er vesentlige?

Jo, jeg har noenting. Det er mulig jeg kommer til å... det er en del folk som har vært, får jeg si, på meg en del for å publisere en del ting. Men det er ikke sånn som egentlig ikke har vært formidlet. Jeg har gjerne snakket om det, og til og med holdt foredrag om det noen ganger.

Jeg husker du sa en gang at en god formodning kunne være like viktig som et godt teorem. Har du noen gode formodninger?

Vel, jeg har noen som jeg har publisert, selvfølgelig. Saken er det at det kommer litt an på. Det finnes en del formodninger som er veldig lette å gjøre. Fordi de beror på i grunnen litt sunn fornuft og litt sannsynlighetsregning, og sånn kan man være nokså sikre på at de nok er riktige, men man kan ikke ha noen ide om hvordan man skulle bevise dem. Det finnes andre formodninger som ikke ligger så oppe i dagen, men som man først kommer fram til ved å eksperimentere en hel del, og sånn. De er gjerne mer interessante, får jeg si. Og det er ofte mer sjanse for at man kan bevise dem.

Og i den eksperimenteringen, da synes du at det er helt greit at man bruker moderne computere.

Jeg har aldri brukt moderne computers.

Nei, men at du får informasjon om det.

Jeg har alltid eksperimentert på papiret og regnet for meg selv. Det betyr selvfølgelig at jeg ikke kan gjøre så veldig vidtgående eksperimenter. Men jeg har hatt noe hjelp av... jeg har aldri lært meg å bruke computers. Og jeg må si, jeg kan fremdeles ikke. Jeg lærte meg en gang hvordan man skulle sende email. Men jeg må si at det tok meg ikke så lenge før jeg hadde glemt hvordan det var.

Det er godt å høre.

Så, min email går alltid gjennom andre. Enten her på Instituttet eller hjemme gjennom min kone. Nei, det var en periode hvor hun var i California og jeg var her, at hun hadde lært meg hvordan vi kunne kommunisere med email. Jeg gjorde det et par ganger, men det ble til at jeg brukte telefonen heller. Det ble noe dyrere, men det var enklere syntes jeg.

Kan du fortelle oss litt om måten du arbeider på? Noen matematikere de sitter, noen ligger, noen går når de tenker. Noen skriver mye, noen skriver lite. Hvordan er din, eller har din arbeidsstil vært?

Vel, jeg kan ikke si at jeg ligger når jeg arbeider, i alle fall. Jeg ligger noen ganger når jeg leser avisen og sånn. Og leser bøker. Ikke matematiske bøker, men andre bøker. Men nei, som regel hvis jeg arbeider sitter jeg gjerne ved et skrivebord og har papir foran meg. Jeg arbeider ikke mye ved tavlen. Det er bare hvis det er noen annen som skal se på det også. Men for meg selv ville jeg aldri bruke tavlen. Det er lettere å ta en blokk med papir og skrive på. Ofte holder man det på fanget i stedet for å sitte ved bordet. Jeg bruker alltid penn, jeg må si jeg har en aversjon mot blyanter.

Arbeider du i lange eller korte økter av gangen?

Da jeg var yngre kunne de være veldig lange. Men nu er de ikke så lange. Og det er litt større intervaller mellom dem. Jeg mener det er en viss nedtrapping, antar jeg. Man har mindre energi som man blir eldre.

Har du hatt noen Poincaréopplevelse? Altså, at du har fått plutselig en idé når du har holdt på med noe helt annet?

Vel, det har hendt. Men, du kan si, det har i så fall alltid vært så at dette andre ikke var så helt uten forbindelse med.... Jeg mener, jeg fikk min ide til å begynne med såld-metoden ved å se på disse dempningsfaktorer som jeg hadde brukt i forbindelse med arbeidet med zeta-funksjonen. Og det har vært noen lignende fall. Jeg antar når du sier Poincaré-opplevelser, jeg tror, såvidt jeg husker jeg har lest det han skrev i en bok at han skulle stige på en, hva de vel kaller en sporvogn eller sånt, og så plutselig stod noenting klart for ham akkurat som han gjorde det. Det har aldri hendt meg. Jeg tok jo hva vi kaller en trikk i Norge fra tid til annen. Jeg brukte også Sognsvannsbanen en hel del i Oslo, men jeg kan ikke si at det gav meg noen ideer, egentlig. Så, nei.

I dag er det jo et veldig press på at matematisk forskning skal være nyttig, og at når man skal få forskningsmidler så skal dette kunne brukes til industrielle formål og den slags ting. Hvilke råd har du til bevilgende myndigheter i så henseende?

Jeg tror at dette med å se på nytten er nokså kortsiktig. Ingen kan vite hva som blir nyttig eller ikke nyttig. Jeg må si at hvis det gir noen vesentlig ny innsikt på noe område, så skulle man ikke se på om det har noen nytteverdi som man kan

se for øyeblikket. Den kan komme siden. Og hvis man bare tar sikte på det som er nyttig, så vil man antagelig gå glipp av en hel del som i virkeligheten er langt mer verdifullt. For eksempel, hvis man ser på Abel, det var jo en del folk som var på ham for å gjøre noe som hadde litt mer anvendelse og var nyttigere. Det kom dette forslaget ... jeg tror for hans del så var det vel om han skulle undersøke månens innflytelse på pendelsvingninger på Jorden. Som da Abel skrev om og fant en effekt som var ganske anselig i virkeligheten. Men det viste seg at han hadde ikke betraktet at månen også tiltrakk Jorden, ikke bare pendelen. Det var bare differansen av disse kreftene som spilte en rolle, og den var så minimal at den hadde ingen praktisk effekt. Ja, så det var i dette fall et mislykket forsøk på å få Abel til å gjøre noe som var betraktet som litt mer nyttig, eller litt mer anvendt. Det er ok at folk prøver å gjøre noe som er nyttig, de som er interesserte i å gjøre noe som er nyttig. Men en forsker som ikke har noen særlig interesse i nytteverdi, man skal la han gå i den retning han vil. Det er bedre at han prøver å gjøre noe som er unyttig. Det er mulig at det senere vil få anvendelser. I mange tilfeller har det vist seg, selvfølgelig, at sånne ting har fått stor anvendelse. Man kan aldri vite på forhånd hva som efterhvert vil bli anvendt. Svært mye av matematikken er jo blitt utviklet uten tanke på hvordan det kunne anvendes. Så jeg synes det ikke er særlig nyttig å legge an et sånt syn på forskning.

Her på Instituttet så har jo du og spesielt matematikerne lagt særlig vekt på at det er Faculty, de faste professorene, som skal bestemme i akademiske spørsmål og ikke, la oss si, Trustees og eksterne medlemmer. Synes du det bør gjelde generelt når det gjelder forskningsspørsmål og at politikerne bør bestemme rammen?

Jeg synes det er bedre at det blir overlatt til forskerne å velge hva som skal være målene og hvordan det skal gjøres til enhver tid. Det kan være farlig å la andre folk få for mye innflytelse på det.

Kan jeg gå litt tilbake. Hvis du hadde fått et professorat i Norge i '47, hadde du da blitt i Norge?

Da ville jeg nok ha blitt i Norge. Det var en ting som var litt av problemet. Jeg hadde giftet meg i 47, og jeg måtte tenke på å skaffe hus, en leilighet eller så, hvor jeg nå skulle være. Det var ikke så lett i, for eksempel, Oslo den gangen. Det ville jo være veldig mye lettere her til lands. Så det var altså litt av et problem den gangen. Det ville vært på et sett lettere å ta en stilling i Sverige på den tid, for Sverige hadde ikke vært truffet av krigen på samme måte. Så det var noe lettere forhold der. Jeg vet ikke presis hvordan det var i Danmark med hus på den tiden. I Norge var det litt knapt. Og jeg ville antagelig ha måttet vente en tid for å få en leilighet som vi skulle være tilfreds med. Jeg mener, jeg hadde nok blitt i Norge om jeg ikke hadde reist ut. Jeg søkte jo professoratet efter Størmer. Han gikk av i '46. Viggo Brun søkte også. Og komiteen satte ham jo foran meg den gang. Jeg må si at jeg var nokså forundret over at han søkte seg til Oslo, fordi at jeg kunne ikke se at han var noe særlig god. Han var god som lærer for ingeniørene, men at han skulle være noe særlig god i Oslo. For han kunne jo i grunnen veldig lite

matematikk. Han var nokså original og sånn, men han hadde lest veldig lite av moderne matematikk. Han hadde veldig vage ideer om hva en analytisk funksjon var, for eksempel. Men det var jo dette, jeg tror det var nok mest dette at han ville ned til dette huset i Drøbak på det sted hvor han hadde vokset opp. Men hvis jeg hadde fått stillingen efter Størmer så ville jeg nok ikke ha gått til Instituttet. Jeg ville ha blitt i Norge, antar jeg. Jeg vet ikke presis om det ville ha influert noe av det jeg hadde kommet til å gjøre i årene fremover. Jeg fikk jo en del nye ideer ved å komme hit. Jeg mener, jeg kom i kontakt med en del folk som var her, som snakket om ting som jeg ikke hadde noe rede på, og som jeg begynte å tenke litt på. Men jeg ville selvfølgelig fortsatt å arbeide om jeg hadde vært i Oslo.

Kan du si noe om hvilke nye ideer du ble mest eksponert for da du kom hit?

Jeg må si, det var jo et helt annet miljø. Du skjønner, i Oslo hadde vi ikke mye av et matematisk miljø på den tiden. Jeg mener, vi som var ved universitetet, universitetslærerne, vi snakket stort sett ikke så mye med hverandre for vi hadde forskjellige interesser. Hvis man snakket om noe sammen så var det mer om praktiske ting, ikke om hva man arbeidet med. Her var det en hel del yngre folk jeg møtte, og de hadde seminarer flere ganger i uken. Jeg gikk på noen av dem. Ikke så forferdelig mange forresten. Men jeg lærte litt om forskjellige ting som jeg ikke hadde hatt noe kontakt med før. Det meste av det hadde jeg heller ikke noe kontakt med senere forresten. Jeg mener, det hadde ikke så mye innflytelse, stort sett. Men ved å snakke med en del folk gjennom de neste årene så snappet jeg opp en del ting. Littegranne om Lie-grupper for eksempel, og andre ting. Ikke særlig mye i detalj, men nok til at jeg begynte å tenke litt på det selv. Jeg leste ikke så mye om sånne ting, men jeg greide å få visse elementære begreper om en del matematiske områder som jeg ikke hadde vært i befatning med.

Det var jo et stort tap for norsk matematikk at du ikke ble i Oslo.

Vel, på den annen side, det var så få stillinger den gang at det gav andre folk mulighet til å komme frem. Jeg vet ikke. Jeg må si det var jo uheldig for Oslo at Tambs Lyche kom dit, og det var bra for høyskolen (NTH) at han kom vekk derfra. Jeg tror han ikke var noen god lærer på noen måte. Han trodde utvilsomt at han var en svært god lærer i analyse.

Men selv under alle disse årene i USA så har du jo holdt god kontakt med Norge, og du føler en sterk tilknytning til Norge, gjør du ikke det?

Det er så. Jeg føler meg jo fremdeles som norsk og jeg brukte å komme over og besøke nokså ofte, og spandere en del tid. Det har vært i de siste årene at det har vært mer komplikasjoner. Dels på grunn av helse, og dels fordi det i grunnen er vanskeligere og mer besværlig å reise nå.

Men du har fulgt utviklingen godt. Du har hatt sterke syn, for eksempel, på Norges tilknytning til EU.

Som det er nå, så har dette byråkrati i Brussel alt for mye makt, synes jeg. Jeg kan huske for eksempel da jeg var sist i Sverige for noen tid. Så var det litt ståhei

der fordi de plutselig hadde fått et direktiv på at de måtte lagre en hel del av sitt, jeg tror det var fårekjøtt, eller sauekjøtt eller hva man nå... fordi de solgte det for billigere priser enn hva det var ellers i Europa. Det er jo så at der hvor man holder sauer i Skandinavien, altså på vestlandet og øyensynlig de har en del i Sverige også, så slakter man jo en del på høsten. Og prisene går gjerne ned der og folk spiser mye fårikål og annet der på høsten, og jeg må si det er ikke noe galt i det. Men bøndene fikk plutselig beskjed om at de kunne ikke selge det. Nei, de måtte lagre det og ha høyere priser på det de solgte. Jeg mener, det synes jo meningsløst. Og det er mange lignende ting, idiotiske bestemmelser. Jeg husker også siste gang jeg kom gjennom København og ville over til Lund og besøke Gårdings. Da ville jeg kjøpe noe, en flaske champagne for å ta med til ham. Det viste seg at jeg kunne ikke bringe den inn tollfritt fordi den var regnet som en ting med mer alkohol. Derimot, en rødvin som hadde større alkoholgehalt enn den champagnen, den kunne jeg ta inn uten å betale toll. Det var også noe som EU hadde bestemt. Jeg mener, en helt idiotisk ting. Det er åpenbart at dette byråkratiet der burde elimineres. Og jeg må si at Norge kan i alle fall om enn så lenge greie seg meget bra uten å være medlem. Og da synes jeg de kan fortsette med det.

Under din tid her i USA har du hatt kontakt med en del andre nordmenn i utlendighet. Jeg kom til å tenke på for eksempel Lars Onsager, traff du ham?

Jojo, jeg traff ham en hel del. Vi var begge medlemmer av en komite, en såkalt "advisory committee". For Yeshiva University i New York hadde i sin tid noe som kaltes for Belfer graduate school of science, men denne eksisterer ikke nå lenger. Det var en mann som het Belfer som hadde gitt penger for dette. De hadde denne rådgivende komité, og vi møttes så av og til i forbindelse med dette, Onsager var også på denne komiteen. Men det ble slutt på denne graduate school, fordi denne Yeshiva fikk en ny president, og han syntes at denne graduate school ikke riktig kunne betale for seg selv. Jeg mener, saken er at Belfer hadde gitt en hel del penger, de hadde fått nye bygninger og alt annet sånt, Det hadde ikke kostet Yeshiva noen ting. Vi hadde en hel del kontakter og fikk penger fra forskjellige kilder, som National Science Foundation og sånn. Men det var et lite underskudd som ikke var dekket av penger som kom utenfra. Det var et trivielt beløp. Men denne nye presidenten som de hadde ... han var en bokholder egentlig. Han var ortodoks jødisk selvfølgelig, som alle presidenter har vært. Han mente at det som ikke hadde med religion å gjøre, det måtte ikke ta noen ekstra penger fra noe annet. Så det ble til at denne graduate school ble nedlagt. Jeg synes det var en stor ulykke. For det var en hel del folk som så... de fikk stillinger annet steds forholdsvis lett, de fleste av dem. Men jeg synes det var så uriktig at Yeshiva skulle arve bygningene som var betalt for et helt annet formål. Jeg vet ikke hva Yeshiva gjorde med det efterpå, de kanskje rett og slett solgte dem, hvilket selvfølgelig ville glede bokholderens hjerte.

Men du hadde ingen vitenskapelig kontakt med Onsager?

Nei, vi snakket ikke om fysikk eller matematikk sammen, stort sett. Men vi snakket

jo litt norsk sammen, i alle fall, når vi møttes på disse møtene. Vel, vi snakket jo sammen om disse saker som vi ble forespurt om, hvor vi skulle gi vårt, det het "advisory council", så vi skulle gi vårt "advice" om forskjellige spørsmål. Og vi gjorde da dette. Vanligvis hadde vi et godt måltid i forbindelse med disse møtene.

Du har vært så utrolig velvillig og åpen ovenfor oss i disse intervjuene. Har du tidligere hatt noen som har forsøkt å intervjue deg som ikke du har vært villig til å snakke med?

Vel, jeg har ikke vært så ofte intervjuet. Når jeg har vært i Norge et par ganger, så har det vært intervjuer fra avisene og greier. Det har en gang vært fra en, kan man si, lokalavis, the Princeton Packet, som har intervjuet meg. Det utgis av samme person som utgir the Wall Street Journal. Begge trykkes på samme sted, the Princeton Packet og the Wall Street Journal. I Oslo var det en gang et, om man skal kalle det et intervju, det var Aubert som intervjuet meg, det ble recorded. Men det dirigerte han litt for mye, får jeg si. Det var en hel del som jeg skulle heller ville ha sagt, men han hadde liksom bestemt sine spørsmål uten å konsultere meg på forhånd, og jeg hadde ikke sett dem på forhånd.

Vi har vært innom Abelprisen. Men sånn til slutt, synes du den er et positivt bidrag fra Norge til å stimulere internasjonal matematikk?

Vel, jeg tror ikke at egentlig sånne priser stimulerer forskning. Det er ingen som gjør sitt arbeide med tanke på... vel, jeg skulle tro at de gjør det ikke med tanke på at de skal kanskje få en pris eller noe sånn. Men selvfølgelig, den som får en pris blir antagelig glad, får jeg si. Og gladere jo mer penger det er, skulle jeg tro. Men på den annen side, man er også klar over at det skaper utvilsomt også en del misnøye blant mange. Det finnes alltid noen som synes at de kanskje heller burde ha hatt prisen, og som er misfornøyde ved at den ble utdelt sånn som den blir. Så den skaper nok flere skuffede. Det er bare en som blir glad, får jeg si. Antagelig er det hver gang flere som blir skuffet. Så i det henseende er det et spørsmål om det har en positiv virkning når det gjelder folks personlige tilfredshet, eller sånn. Jeg synes også det er galt å bestemme at man skal gi til for eksempel anvendt matematikk eller statistikk eller noe sånt. Jeg mener hva man skulle legge til grunn var rett og slett hvor mye nye matematiske ideer personen hadde. Ja, jeg tror at Abel heller ikke ville ha vært så riktig fornøyd om han hadde visst om at det ble spredt. Jeg tror han ville ha satset på at man skulle gå inn for rett og slett å se hvor betydningsfulle matematiske ideer som var bidratt med.

Hvis du nå hadde diktatorisk makt i komiteen, hvem ville du ha gitt den til neste år? Kan jeg friste deg på det?

Det har jeg ikke tenkt på, faktisk. Men det finnes en hel del folk som for eksempel en person som jeg synes har gjort svært imponerende arbeider. Det er Wolfgang Schmidt i Colorado. Jeg synes hans innsats, som i grunn aldri er blitt riktig anerkjent ved noen slags prisbelønning, han kunne jo ha vært andre steder, han ville

være i Colorado for han trives ved å være nær fjellene der. Ellers kunne han utvilsomt ha vært ved Harvard hvis han hadde villet. Han fikk ingen Fields medalje, for hans beste arbeider kom litt efter han var 40 år, da han gjorde disse fundamentale arbeidene om approksimasjon av algebraiske tall, simultane approksimasjoner av flere algebraiske tall, og løste det hele. Han gjorde også en hel del andre fundamentale ting. Det finnes også såklart andre folk jeg kunne tenke på. Jeg hadde ikke egentlig tenkt over hvem som skulle ha det for dette kommende år. Og jeg må si at det spiller ingen rolle hva jeg tenker, for de vil nok ikke følge mitt råd i alle fall. Så jeg har ikke foreslått noen, annet enn første gang. Da tok de en av de jeg foreslo. Det var antagelig ikke mitt råd alene, men antagelig var det en hel del andre som hadde gitt det samme råd, skulle jeg tro. Men altså, saken er at jeg følger ikke så mye med i matematikken i dag at jeg kan si at jeg har så godt omdømme. Wolfgang Schmidts beste arbeider ligger jo litt tilbake i tid. Han er jo for lengst gått for aldersgrensen for en hel del år siden, skulle jeg tro. Han er fremdeles i Colorado, men ...

Det ligger vel, det lå vel i kortene da du fikk Abels ærespris at komiteen ikke ville gi Abelprisen til deg fordi du er norsk, at man var redd.

Vel, jeg vet ikke om det. Jeg mener, det syntes klart for meg at jeg kunne ikke konkurrere med for eksempel Serre eller sånn. Jeg har i grunn skrevet ganske lite i sammenligning med mange andre folk.

Men din betydning har vært enorm innenfor analytisk tallteori og i forbindelse med sporformelen, som jo av mange regnes som en av de viktigste resultatene i det 20nde århundre.

Vel, det kan være forskjellige vurderinger om det, selvfølgelig.

Nå har vi snakket stort sett om ditt forhold til matematikk. Hva slags forhold har du for eksempel til religion?

Jeg må si at jeg nokså tidlig i min tidlige ungdom, eller kanskje... vel jeg skal ikke riktig si i barndommen, men jeg gav opp religion. Jeg ble ateist nokså tidlig. Alt mens jeg gikk i folkeskolen. Det stod klart for meg at det var ingenting der. Jeg har vært tilfreds med dette siden. Det er vanskelig for meg å forstå at noen kan ha noen tro på, for eksempel, et liv etter døden eller ting som det. Jeg mener, jeg tror altså menneskene overvurderer sin egen betydning og sin stilling i universet. Det er ingen tvil om det.

Men du har vel møtt en del meget intelligente mennesker som tror på det motsatte, holdt jeg på å si.

Vel, det finnes. Men det er ikke så merkverdig, i og for seg. Folk tror ofte det som de helst vil tro. Og folk kan kompartementalisere. Så folk kan arbeide med vitenskap og samtidig ha et annet kompartment i sin hjerne, eller i sin bevissthet som holder på noen religion. Det er nok så at de fleste mennesker har vondt for å komme til rette med dette at det er en total slutt med døden. Jeg synes i grunnen

ikke det er noe særlig galt med det. Faktum er når folk blir eldre, gamle, så er det i grunnen en tanke som man ikke har noe besvær med. Jeg mener, det eneste er at man helst vil at døden ikke skal komme på en alt for ubehagelig måte. Den skal ikke være for plagsom og langvarig og sånn. Jeg husker jeg snakket med Viggo Bruns enke om dette da hun var vel, var litt opp i 90-årene. Jeg vet ikke, lever hun enda?

Nei.

Nei, hun må være død. Hun ble over 100 år. Ja, hun ble over 100 år gammel. Det er nu til dags ikke så sjelden at folk blir over 100 år. Det hender oftere enn før. Men hun sa hun trodde ikke på noe liv efter døden. Hun sa hun var ikke redd for å dø, men hun var litt redd for hva som ville komme før. Og håpet at det... hun var ellers i ganske god form. Jeg tror siste gang jeg så henne, hun var 99. Eneste hun klaget seg over var hennes knær. Det var en ganske bratt trapp i dette huset hvor hun bodde alene på den tiden, og hun sa det var besværlig for henne å gå opp og ned denne trappen.

Utenom Norge og USA, så er vel Israel et land du har hatt ett nært forhold til?

Vel, det kom jo av min første kone som hadde en hel del slektninger der. Men jeg må si at etter hun døde så har jeg ikke vært tilbake til Israel. Det ville være litt pinefult for meg å gå dit igjen uten henne. Og jeg har møtt noen av hennes slektninger utenfor Israel. Siste gang i et besøk i Ungarn. Jeg reiste en del til Ungarn for Hedi hadde en søster som levde der, og jeg synes det var viktig å holde en viss kontakt med henne, også efterpå. Så jeg reiste dit, også min datter Ingrid kom dit fra London til dels. Ingrid lærte seg en del Ungarsk i den forbindelse. Jeg kommuniserte med min svigerinne, som jeg får kalle henne, denne søsteren til Hedi, på tysk, for hun kunne en del tysk, ikke riktig så mye som jeg kunne. Så vi kommunikerte sammen på tysk. Ingrid og, hennes navn var Leah, Ingrid og Leah snakket noe ungarsk sammen. Ingrid til dels ved hjelp av en ordbok.

Når var du siste gang i Norge?

År 2000.

Og har du planer om å komme til Norge igjen, eller hva?

Vel, jeg har planer. Jeg tenker å bli begravet i Norge. Ja, jeg har gitt min sønn i oppdrag at han skal ta urnen til Norge.

Men i levende live?

Men jeg vet ikke om jeg komme i levende live. Nei, det måtte være om sommeren. Om vinteren skulle jeg ikke ville våget meg på det. Det måtte være om sommeren. Og jeg er nå litt redd for å ta lengre flyreiser, fordi de siste gangene jeg har gjort lengre turer med fly så har jeg alltid endt opp med å få noen infeksjon under flyreisen. Det er ingen tvil om at dette som sirkulerer luft i flyene sirkulerer en hel del bakterier. Så jeg har vært utsatt for det flere ganger nå, at jeg har kommet

fram og det viste seg jeg hadde fått en infeksjon som hang ved meg og som tok en hel del tid å komme over.

Vel, da tror jeg vi bare vil si at vi håper å se deg igjen i Norge. Så vil Christian og jeg få lov til å takke deg for disse samtalene vi har hatt. De har vært veldig interessante, og for all den velvillighet vi har møtt hos deg.

Tusen takk.

V

THE LORD OF THE NUMBERS

ATLE SELBERG ON HIS LIFE AND MATHEMATICS

By

Nils A. Baas and Christian F. Skau.

The renowned Norwegian mathematician Atle Selberg died on August 6, 2007 in his home in Princeton. He was one of the giants of the twentieth century mathematics. His contributions to mathematics are so deep and original that his name will always be an important part of the history of mathematics. His special field was number theory in a broad sense.

Atle Selberg was born on June 14, 1917 in Langesund, Norway. He grew up near Bergen and went to high-school at Gjøvik. His father was a high-school teacher with a doctoral degree in mathematics, and two of his older brothers – Henrik and Sigmund – became professors of mathematics in Norway. He was studying mathematics at the university level at the age of 12, and when he was 15 he published a little note in Norsk Matematisk Tidsskrift.

He studied at the University of Oslo where he obtained the cand.real. degree in 1939, and in the autumn of 1943 he defended his doctoral thesis which was about the Riemann Hypothesis. At that time there was little numerical evidence supporting the Riemann Hypothesis. He got the idea of studying the zeros of the Riemann zeta-function as a kind of moment problem, and this led to his famous estimate of the number of zeros. From this it followed that a positive fraction of the zeros must lie on the critical line. This result led to great international recognition.

When Carl Ludwig Siegel, who had stayed in the USA, asked Harald Bohr what had happened in mathematics in Europe during the Second World War. Bohr answered with one word: Selberg.

During the summer of 1946 Selberg realized that his work on the Riemann zeta function could be applied to estimate the number of primes in an interval. This was the beginning of the development leading to the famous Selberg sieve method.

In 1947 Selberg went to the Institute for Advanced Study in Princeton in USA where he continued the work on his sieve method. In the spring of 1948 he proved the Selberg Fundamental Formula which later in 1948 led to an elementary proof of the Prime Number Theorem. This was a sensation since even the possibility of an elementary proof had been questioned by G. H. Hardy and other mathematicians.

For these results he was awarded the Fields Medal in 1950 – at the time the highest award in mathematics.

He became a permanent member of the Institute for Advanced Study in 1949 and a professor in 1951 – a position he held until he retired in 1987.

In the early 1950's Selberg again produced a new and very deep result, namely what is now called the Selberg Trace Formula. Selberg was inspired by a paper by H. Maass on differential operators, and he realized that in this connection he could use some ideas from his Master Thesis. The Selberg Trace Formula has had many important applications in mathematics and has also been applied in theoretical physics, but Selberg was never interested in the wide range of applications. In the Trace Formula Selberg combines many mathematical areas like automorphic forms, group representations, spectral theory and harmonic analysis in an intricate and profound manner. Selbergs Trace Formula is by many mathematicians considered as one of the most important mathematical results in the 20th century. His later works on automorphic forms led to the rigidity results of lattices in higher rank Lie groups.

In his later years he continued to work on his favorite subjects: sieve methods, zeta-functions and the Trace Formula. In 2003 Selberg was asked whether he thought the Riemann Hypothesis was correct. His response was: "If anything at all in our universe is correct, it has to be the Riemann Hypothesis, if for no other reasons, so for purely aesthetic reasons." He always emphasized the importance of simplicity in mathematics and that "the simple ideas are the ones that will survive". His style was to work alone at his own pace without interference from others.

In addition to the Fields Medal in 1950, Selberg received the Wolf Prize in 1986 and then in 2002 an honorary Abel Prize prior to the regular awards. He was also a member of numerous academies.

Atle Selberg was highly respected in the international mathematical community. He possessed a natural and impressive authority that made every one listen to him with the greatest attention.

He loved his home country Norway and always spoke affectionately of Norwegian nature, language and literature. In 1987 he was named Commander with Star of the Norwegian St. Olav Order.

In November 2005 we – Nils A. Baas and Christian F. Skau – visited Selberg at the Institute for Advanved Study in Princeton and interviewed him at length about his life and mathematics. The interview took place on November 11, 14 and 15 in Selberg's office in Fuld Hall at the Institute for Advanced Study. One part is an audio tape, but most of it is a videotape. The interview took place in Norwegian, and it has all been transcribed in Norwegian. The video tape is more than six hours long. A short 20 minute version with English subtitles was shown at the Selberg Memorial at The Institute for Advanced Study on January 11, 2008. A longer version at about an hour was shown on Norwegian Television on October 13, 2007. An edited version of the interview have appeared in Norwegian in 4 parts

in *Normat* in 2008.

We have been asked to provide a translation of some of the most interesting parts of the interview. Here we have made a selection. Some editing and reorganizing have been necessary but without changing anything essential.

Of special interest is Selberg's account of the events around the proof of the Prime Number Theorem. When Hermann Weyl took his leave from the Institute for Advanced Study in Princeton, he gave Selberg some relevant documents. Selberg allowed us to make copies of some of these documents, giving us permission to use them as we saw fit. Two of these are letters from Hermann Weyl to Nathan Jacobson – one of them being the referee report on Erdős' submitted paper – and we attach both of them, since they are important historical documents. (Appendix 1). Michael Weyl, Hermann Weyl's son, has granted permission to publish these letters. Selberg refers to these letters in the interview. Various accounts of this controversy, including bits from the Weyl letters, have appeared in the literature.* In our opinion this justifies publishing these letters in full.

In appendix 2 we include Selberg's hand-written letter to his brother Sigmund in Norway where he gives his first written version of the proof of the Prime Number Theorem, which later was published in the Annals. It is written in Norwegian, but in spite of that one should be able to follow the argument.

Acknowledgements

We would like to thank the Abel Foundation for financial support, and the Institute for Advanced Study, Princeton, for their kind hospitality during our visit when the interview took place.

*D. Goldfeld in "Number Theory", New York Seminar 2003, edited by Chudnovsky, Chudnovsky and Nathanson, Springer Verlag Yellow Series.
B. Schechter, "My brain is open", Simon & Schuster (1998)
M. de Sautoy, "The music of the primes", HarperCollins Publishers (2003)

THE INTERVIEW*†

When did you realize that you had a special talent for mathematics?

Well, I will tell you that the first time I remember – we lived then at Nesttun near Bergen – I must have been 7 or 8 years of age, and we were engaged in playing some sort of ball game, some boys in the neighbourhood and I. I think it was what we called "langball", which is a kind of softball game. During such a game one often has time to stand and wait and not do anything. Then I often made mental calculations. I looked at the differences between consecutive squares and saw that one got odd numbers. I managed to find a proof of that. I did not use letters or symbols at that time, but by thinking about the squares of the number and the number plus one I inserted the product of the number and the number plus one. Then I could easily find the differences on both sides. So I discovered that by adding consecutive odd numbers I got squares all the time, and I thought that was somewhat interesting. A little later I found by the same reasoning that, as we would express it, $A^2 - B^2$ equals $(A + B) \cdot (A - B)$. This can be shown of course by inserting AB between the two squares; then one can see the differences on both sides. The latter helped me quite a lot in doing mental calculations. One can simplify a lot of things in this way, especially because squares are easy to remember a long way upwards.

How would you compare that with Gauss, who as a child was asked by his teacher to find the sum $1 + 2 + 3 + \cdots$ *etc. up to* 100*?*

Yes, yes, that I think was better done. I am not so sure that I would have thought of something like that. But nobody asked me to add the numbers from 1 to 100.

Did you tell anyone, or did you discuss this discovery of yours with your father?

No, I did not do that. The discovery I had made was an interesting experience that I can remember even today. The regularity I had managed to establish made a deep impression on me – that it was true in general, and not only in concrete examples. It was some years later that I began to read a little. My father had in his relatively large collection of mathematical books also some textbooks from Denmark. The Danish books were of a higher quality than the Norwegian ones, and they were clearly written by better mathematicians. I took a look at the Danish

*© 2008 Nils A. Baas and Christian F. Skau

†This has appeared in the October 2008 issue of the *Bulletin of the AMS* (BAMS), except that pages 34–35, where Selberg refers to Hermann Weyl and his involvement in the controversy over the elementary proof of the prime number theorem (including the relevant Weyl letters), have been omitted in the BAMS article.

textbooks, and I learned how to solve quadratic equations with one unknown, and linear equations with several unknowns – by elimination, not with determinants. Determinants I encountered much later, and I must confess that I did not like determinants that well, but later I found out that they could be quite useful. Then I started to read more advanced mathematics. I discovered *Störmer's lecture notes in mathematics. My father had a fairly old edition which was hand-written. I often leafed through the book, and I found the formula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

which I thought was very strange, because I knew already what π was in connection with the circle. So I made up my mind to find out how this could be, and I began to read the book carefully from the start. It was a wonder that I did not give up because the book started with introducing the real numbers by using Dedekind cuts. I read through it and I could not comprehend what this should be good for. I thought I had a pretty clear concept of real numbers, which I thought of as decimal numbers, perhaps infinite decimals. I must say that Euler undoubtedly had a clear concept of what a real number was, so there is no reason to think that it originated with Dedekind. I could not understand the purpose or usefulness of this introduction of real numbers in Störmer's lecture notes, but I did read through it. After I had finished that section of the book the material began to be interesting to me. Even today I think Störmer's lecture notes are very good, and it was very unfortunate, I think, that they were substituted with†Tambs Lyche's textbooks. In a certain sense, of all the mathematical literature I have read, Störmer's book is perhaps the book that has meant most for my mathematical development!

In Störmer's lecture notes you became acquainted with continued fractions for the first time.

Continued fractions I thought were interesting. Among other things I found out that they had some connection with what, for one reason or another, is called Pell's equation. In reality it has nothing to do with Pell. André Weil once said that if something in mathematics gets attached to the name of a person, then the person in question usually has very little to do with it.

How old where you when you began to read Störmer's book?

I believe this was the summer before I started in 7th grade, so this must have been around the time I turned 12 years of age.

You had no benefit of the mathematics education you were exposed to in school, did you?

*Carl Störmer (1874-1957), Norwegian mathematician, professor in mathematics at the University of Oslo, 1903-1946.

†Ralph Tambs Lyche (1890-1991) Norwegian mathematician, professor in mathematics at NTH, Trondheim, 1937-1949, and at the University of Oslo, 1950-1961.

I read no geometry. I first encountered the trigonometric functions as power series, and also through Euler's formulas for sine and cosine in terms of e^{ix} and e^{-ix}.

But did you later became interested in geometry?

Only if I could have some use for it, so to say. In what I have done later, I have sometimes needed to use some geometric considerations. I thought it was easier, however, to deal with symbols, and to use analysis and the like, even when I was more interested in applications to discrete problems. I was never particularly interested in general function theory. I liked the special functions – elliptic and automorphic functions, for example – and especially modular functions and modular forms and the like. The general analytic function I thought as interesting as the general real number. One is basically not so interested in that. The proletariat of real numbers is not so interesting in a way, even though it can be difficult to decide their nature, whether they are irrational or algebraic, or whatever it can be. For example, Euler's constant – nobody yet knows its nature.

What about Riemann surfaces?

Of course, when I read about function theory I encountered Riemann surfaces. But I was more interested in algebraic Riemann surfaces than the general concept, and also in uniformization theory and automorphic functions.

Did your interest in automorphic forms coincide with your discovery of Ramanujan's works?

Yes, yes, this started with Ramanujan, and that was my first contact with it. It started not with general automorphic functions or general groups, but with the modular group and the classical modular function which is associated to it, and also with subgroups of finite index – these were the objects I studied.

But let me backtrack a little: Originally it was mostly analysis that interested me, but my brother Sigmund got my interests shifted towards number theory. Not towards diophantine equations, which had interested my brother in high school and his early student days. That never appealed to my imagination, but Sigmund made me aware of a book in my father's mathematical library which contained a section on Tchebycheff's work on the distribution of prime numbers. I read that, and from that moment I was completely dedicated to this area of mathematics. It was also Sigmund who brought home Ramanujan's Collected Works from the university library in Oslo during one summer vacation. This was some time after Störmer's article about Ramanujan appeared in Norsk Matematisk Tidsskrift – a Norwegian mathematics journal – which I read. All this caught my interest and gave me the impetus to study and work with discontinuous groups, modular functions and modular forms, and more general automorphic functions and forms. These things have always been my main interest later in life.

My brother Sigmund, in fact, was the only one I discussed mathematics with while I was in Norway. There were others that were helpful in their way, my brother Henrik and Professor Störmer, in particular. Henrik typed my first article

when I came to Oslo in 1935 to study. He wrote in the formulas – he thought that my hand-writing was not good enough – and introduced me to Störmer, who then subsequently presented my article for Videnskapsakademiet in Oslo (The Norwegian Academy of Science and Letters) the same autumn.

Let us return to the school: did you follow the usual teaching there?

I read some foreign languages on my own. I had already started to learn English when I was in elementary school. I had found a copy in my father's library – not the mathematical part of it! – of "Alice in Wonderland", so I got interested in the illustrations, and I wanted to translate the text word for word. It was very cumbersome, of course, but I got an older sister of mine to read and translate the text for me. It was my oldest sister, Anna, who did this, and it was very kind of her. I do not know if she was particularly interested in the book herself.

Can you tell us about your first discovery in mathematics that resulted in a paper?

My first discovery was the thing I mentioned about differences of square numbers! I read a great deal in various mathematical books, but I did not make any discoveries that are worth talking about. There were some particular things, like finding a connection between the integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x}$$

and the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

It is a relatively simple proof if one knows about the gamma function and Euler's integral for the gamma function. Then it is an easy formula to show.

How old were you then?

That was some years later. I was 15 years old, perhaps.

The solution to that problem was published in Norsk Matematisk Tidsskrift in 1932, so you were 15 years old.

In 1932? What time of the year? I do not know precisely how long it took before it appeared. It was not me that sent it to the journal, it must have been my father. The formula in question can also be generalized.

Can you tell us about the discovery you made when you read about Ramanujan and Hardy's work on the partition function?

That was what led to my first article: "Uber einige arithmetische Identitäten". I spent quite some time studying Ramanujan's so-called mock theta functions. There was an English mathematics professor, G. N. Watson, who had written about such functions of the 3rd and 5th order – as Ramanujan had called them – and shown relations between these. Ramanujan had also introduced something that he called mock theta functions of 7th order. By utilizing some of the things

I had shown that led to my first article, I managed to prove that these functions had the property that Ramanujan had defined, namely that they could be approximated by irrational points – as one may express it – on the unit circle, that is, they could be approximated as well as a modular form. So I started to take a look at Hardy's and Ramanujan's article on "partitions", and I found the exact formula. But that turned out to be a disappointment! You see, I had finished my investigation of the partition function in the summer of 1937, and when I came to Oslo and looked in Zentralblatt, I found the review of my first article. On the same page was the review of Rademacher's article on the partition function. I had something that Rademacher did not have, and that was a much simpler expression for the coefficients that appear in the relevant series. This was undoubtedly something Ramanujan would have done if he had been at his full power when this work was under way. In fact, the inverse of the function that generates the partitions is in reality a theta function, and the root of unity that occurs in the transformation formula in front of the theta function can always be expressed as a kind of Gaussian sum. If one does that, it is clear that the series for the partition function is transformed by the inverse root of unity and conjugation. Doing this and inserting it into the definition of these coefficients, which are denoted by $A_q(n)$ for term number q in the series for the partition function $P(n)$, one gets a rather simple series that exhibits the order of magnitude for these coefficients. The convergence of the series is obvious. But this is something that in a way should have been done by Hardy and Ramanujan; but I think that it was Hardy that prevented them from reaching the final result because Ramanujan had already been on to the right formula earlier in the letters he wrote from India to Hardy, before he came to England. But at the time their joint article was written, there is no doubt that Ramanujan was not well. He probably suffered from vitamin deficiency; he only ate food that was sent to him from India. He had no fruit or vegetables or other fresh things, only what could be dried. He obviously suffered from quite serious nutrition deficiency.

Can you tell us about the disappointment you had when you discovered that Rademacher had got at this result before you?

I made up my mind not to publish this result about the coefficients that I mentioned. I thought it was too little to write about. But I decided to do something else, and what I decided to do was the thing I talked about at the Scandinavian Mathematical Congress in Helsingfors in 1938 (we said "Helsingfors" at that time, not "Helsinki"). I gave a short talk lasting 20 minutes. It was the first talk I had ever given. I met quite a few mathematicians at that congress. For example, I met Lindelöf there, and Carleman was there. Carleman chaired the session when I gave my talk and he was very friendly towards me, I must say, and so was Harald Bohr. What otherwise made a strong impression on me at that congress was a talk that Arne Beurling gave. It contained quite a few things; for one thing he talked about his generalized prime numbers and the generalization of the Prime

Number Theorem in that connection. As I told you, it made a deep impression on me. In 1939 I had obtained a stipend – a travel grant – which I intended to use for a travel to Hamburg in Germany to see Erich Hecke. A talk by Hecke at the ICM congress in Oslo in 1936 had made a great impression on me. I did not go to listen to his talk – I did not have enough sense to do that – but I read it later when the Proceedings from the congress was published. That was the article that made the greatest impression on me of all the articles contained in the Proceedings. So I wanted to travel to Hamburg to see Hecke. I had already finished my Master Degree (cand.real.) at the University of Oslo during the spring term of 1939, and I had finished the first part of my mandatory military service by the summer of 1939. As I had already finished my university studies it made sense to travel to some place to get new impulses. However, the Second World War started at exactly the time I had finished my military service that summer, and I decided not to travel to Hamburg. So instead I travelled to Uppsala in Sweden. I had heard that they had a very good mathematical library located at the Department of Mathematics.

In Oslo at that time it was very cumbersome. They did not have many monographs at Blindern, where the Department of Mathematics was located. Mathematical journals and the like were scarce, and one had to go to the University Library which was located at Drammensveien. We were not allowed to go and look for things ourselves, but we had to look in the catalogue and then order. The University Library was located very inconveniently for us – it was cumbersome to get there from Blindern. Things were very much better in Sweden. So I travelled to Uppsala instead of Hamburg, and thought that Beurling would be there. But it turned out that he was drafted into military service to work at the cryptography unit, or "the cipher unit", as they called it, and where he made some impressive piece of work during the Second World War. He was very talented in this direction. I met Beurling only once while I was there. It was on a Sunday when I was sitting and working alone at the library of the Mathematics Institute, that Beurling came. I recognized him from the Scandinavian Congress in Helsingfors the year before. I talked with him, but apart from this encounter he was of no use for me, simply because he was not there. Nagell was there. He gave some lectures that I attended. But most of the time I sat at the library, which was very good. They had a lot of journals there, so I had much better access to the literature than I would have had in Oslo – I mean *easy* access to the literature. In Oslo it was, as I said, more complicated to get hold of these things.

When did you start to get interested in the Riemann hypothesis – was that at this time?

No, that came later. That was after the military campaign in Norway in 1940. I also had another disappointment, I must say. When I came to Uppsala I saw an article where I learned something that I did not know before. I had no knowledge about hyperbolic geometry, and, in particular, I had never before heard about the

measure

$$\frac{dx\,dy}{y^2}$$

which is the invariant measure with respect to the hyperbolic geometry in the upper half plane. I learned that by looking at one of the German journals that arrived while I was there. Then it dawned on me that I could do something that I had already done in not such a good way for the modular group in my Master Thesis, and I sat down and wrote an article about what today is called the Rankin-Selberg convolution. If you have two modular forms you can form a Dirichlet series, where the coefficients are the products of the corresponding coefficients of the two modular forms, and which then has a certain functional equation. I gave the proof for the functional equation and deduced some consequences which I did not give complete proofs of, but only sketched the proofs. I waited until I had returned to Oslo before I submitted this manuscript – that was in the spring of 1940. I had come back to Oslo at the end of December 1939, and I made up my mind not to go back to Uppsala since the weather there was rather nasty in winter. It had been quite pleasant earlier that year, but awfully windy. In the winter when snow falls it very quickly turns into slush, so it was difficult to keep one's feet dry. I did not like the wind either. Oslo was much better – it had a much better winter climate. Oslo was colder, but much more pleasant. In Oslo there was more sunshine in the winter, and it was not so windy. So I made up my mind not to return to Uppsala, but stay in Oslo in the spring.

It was in March that I saw in Zentralblatt a review of a paper by Rankin. He had not really defined a convolution of two functions. He only operated with one function and the squares of the coefficients associated to it, so that was more special than what I had. He had drawn some consequences of all this. What he had done had only applications to modular forms of the same weight or automorphy factor, while the thing I had defined could be used for two forms of different weights. My idea was somewhat more general than his, but he was unquestionably first. Even if I had submitted my article to Störmer by sending it from Uppsala, the priority would nevertheless belong to Rankin. He had, as I could see from his manuscript, finished his work during spring 1939, while I finished mine in the autumn.

So that was another disappointment?

That was a disappointment, I must say. At this time Siegel came passing through Oslo on his way to the US.* He gave a talk that I went to, and it made an impression on me. I had not gone to his talk at the IMU congress in Oslo in 1936. I did not have enough knowledge to make the right choices about which talks to go to. I did hear the talks of others, among them Mordell and Polya, who gave the talks I liked the best of those I heard. I have to say that my brother Henrik sometimes got me to help fill up the auditorium, when it seemed that there would be few listeners.

*Siegel left Norway by ship for the United States just days before the German invasion of Norway on April 9, 1940.

So I listened to certain things that I had absolutely no interest in listening to. On the other hand, Henrik had been so helpful to me in other ways, so I shall not complain.

Then the war came to Norway at the beginning of April, 1940, and that caused an interruption of my mathematical research. I did not think about mathematics while I fought with the Norwegian forces against the German invaders in Gudbrandsdalen*, and also not while I was a prisoner of war at the prison camp at Trandum. When I finally was released, I travelled to the west coast of Norway, and later with my family to Hardanger. I wanted to start with something entirely new. I came across a paper by Polya, "Über ganze ganzwertige Funktionen", where Polya had strengthened a result by Hardy a little.
I looked at that paper, and saw that I could sharpen it considerably. So I wrote a paper that was about entire analytic functions which take integer values when the argument is a positive integer. Polya had also another work about entire functions taking integer values when the argument is an integer, that is, either positive or negative. I could make the same improvement on his result also in this case. I also wrote a third paper on entire functions that took integer values, but where in addition the derivatives up to a certain order took integer values.

My focus then shifted towards the Riemann zeta function $\zeta(s)$. For s real-valued and greater than 1, Euler had shown the product formula

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p\epsilon\mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

where $\mathcal{P}$ denotes the prime numbers. Riemann showed that $\zeta(s), s = \sigma + it$, could be extended to a meromorphic function on $\mathbf{C}$, with a simple pole at $s = 1$, and with the so-called trivial zeros at $-2, -4, -6, \cdots$. The non-trivial zeros lie in the critical strip $0 < \text{Res} < 1$, and Riemann's conjecture – also called the Riemann hypothesis – is that all the non trivial zeros lie on the critical line $\text{Res} = \frac{1}{2}$. I began to think about an idea I had of trying to show the existence of zeros of the Riemann zeta function $\zeta(s)$ on the critical line – by considering certain moments. These were not moments of the zeta function, but by considering integrals of the real-valued function that one can get if one uses the symmetric form of the functional equation

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s)$$

where Γ denotes the gamma function, then one gets a function that is real-valued on the critical line. By considering that function and its various moments, and then look at the sign changes of these moments, one can say something about the zeros on the critical line. I could do something with this, but it did not give as sharp results as the ones obtained by Hardy and Littlewood. I took a closer look

*We were also in the upper part of Østerdalen, and ended ut near Åndalsnes. I was a soldier in Major Hegstad's artillery batallion, and I held him in very high esteem.

at their paper, and I understood the reason why they could not get better results than they got. I discovered, so to say, what was the basic flaw in their approach, and what they had misunderstood. They made some comments at the end of their article, where they showed that

$$N_0(T) > \text{ constant } \cdot T$$

Here $N_0(T)$ denotes the number of zeros on the critical line between 0 and T. Their comments had to do with the variations of the argument, but it became clear to me that this could not be right. I looked at it, and then I saw what one should do: one should try to reduce the oscillation, because the real function that one gets on the critical line is a strongly oscillating function. It has amplitudes that vary highly – some places the fluctuations are small and some places they are very large. When they, that is Hardy and Littlewood, considered the integrals of squares, which they took over short intervals and then computed the average over a long interval, it will be these regions, where the interval is too short and where the amplitudes are very large, that will dominate. By doing this one will not get information about the average behaviour of the function, but simply what happens when the amplitude is very large. So I came up with the idea to try to mollify and normalize, such that the contributions would be somewhat larger where the amplitudes were small and less where they were large. The first thing I tried to do was to take a section of the Euler product and then take the square root of the absolute value. That gave a result which I wrote up as an article, which I sent to Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Then I started to experiment by taking instead an approximation to the series that one gets by looking at a section of the Dirichlet series for $(\zeta(s))^{-1/2}$, reducing the coefficients so they become zero for $n \geq z$, and then use the square of the absolute value of this as the mollifying factor on the line $s = \frac{1}{2} + it$. It turned out that I got better and better results, until I discovered that the best way to reduce the coefficients was to multiply them with the factor $(1 - (\log n)/(\log z))$ for $n < z$. Then we get

$$\sum_{n \leq z} \frac{\mu(n)}{n^s} \cdot \frac{\log z/n}{\log z}$$

where μ denotes the Möbius function. I then found the correct order of magnitude for $N_0(T)$ relatively quickly.

It required some work to estimate the sums that occurred in the integrals, but with some patience I managed to obtain the result that$N_0(T)$ was greater than a positive constant multiplied with $T \log T$, which is of the right order of magnitude. I did not try to compute the constant, but if I had been interested in doing that I would have modified the proof to get a better constant. By modifying in the right way, I think one can get a constant that will lie somewhere between 1/10 and 1/20. I have never gone through the computations.

The article you sent to Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, did it have the right term

$$constant \cdot T \log T?$$

In the course of the proof-reading I added this as a footnote. I sent a short note announcing this result to the Royal Norwegian Society of Sciences and Letters in Trondheim, which was published in their Proceedings in 1942.

This became your doctoral dissertation?

That was what I chose for my doctoral dissertation. I had already published quite a few papers at that time, but I had the idea that a doctoral thesis should be something weighty, not too short, but something that consisted of many pages, and my thesis was 70 pages long. So I wrote the result up and handed it in as my doctoral thesis.

This took place during the war when Norway was occupied by the Germans. Was the result contained in your thesis communicated to Harald Bohr in Denmark? It was a sensational result, was it not?

It was Störmer that presented it to the Norwegian Academy of Science and Letters in Oslo, of course. As opponent Harald Bohr was the obvious choice because there was nobody in Norway that had any real competence in this field. The second opponent was Skolem, who had struggled with this material, of course. It was not really his field, it is safe to say. Harald Bohr could not come to Norway at that time, since Norway was occupied, and Bohr had already fled from Denmark, which also was occupied by the Germans.

Did he stay in Sweden?

He was in Sweden. His brother, Niels Bohr, was already in the US at that time.

How did the defense go?

Störmer read Harald Bohr's report. Skolem had improved on my English writing, and he was right. In fact, I had just recently changed to writing in English. I had decided not to continue writing in German, even though German was the language I mastered best. But I had already started to read more articles in English, especially Hardy and Littlewood.

Later Norman Levinson got a better result with respect to the zeros on the critical line. Did he essentially use your methods and techniques?

He did use the mollifying factor that I had introduced, but he used it on another function. His proof gives a rather good constant, but the problem is that his method works only for the zeta function and for the so-called L-functions that have functional equations that are very simple. If one looks at quadratic number fields, or L-functions that one gets from modular forms that have Euler products, then one can prove results by my method which one can not obtain by Levinson's

method. The reason is that by Levinson's method one gets the result in terms of a difference between two things, and the question becomes whether the thing you subtract is sufficiently small so that something remains. You need a very good estimate for that, and this you can only get when the functional equation is very simple.

It does not work for the quadratic number fields, for instance. For higher number fields one can not prove anything because the functional equation is too complicated for one to be able to do something about the relevant integrals that one needs to compute.

You defended your doctoral dissertation in the autumn of 1943?

Yes, that is correct, the defense was in the autumn of 1943*

You, as well as other university students in Oslo, were arrested by the Germans in the autumn of 1943, just after your doctoral defense took place. But then you were released from prison. Did your working conditions become more difficult then?

Yes, especially after the university was closed. I was released after I had been arrested, and the security police told me that I should not go back to Oslo but to my hometown, Gjøvik, where my parents lived. So I spent the rest of the war years there and worked there, except on a few occasions when I went away during vacation time, but then I did not go to Oslo. A couple of times I did travel down to Oslo to consult the literature at the university library, which was kept open, but then I needed special police permission to travel.

During that time you continued to work on the Riemann hypothesis – or did you change subject?

I did extensive work on the zeta function, but I also worked on certain other problems. I wrote two long papers of about the same size as my doctoral thesis. One was about the zeta function, and it dealt with possible zeros off the critical line. The other treated the corresponding problems for Dirichlet's L-functions, but not precisely the same problem – because that I thought was too trivial – but one could make analogies. There was an English mathematician, Paley, who had started to consider something that he called "k-analogues". If one considers all L-functions that belong to the module k, then there is a certain analogy with what one has for a single function if one looks at its behaviour when the imaginary part varies on the critical line. So I wrote up some of these analogies, and I improved some of Paley's results and I made use of these improvements. They were sufficiently sharp so I could make analogies to other results – to those that I had obtained in my doctoral thesis. If

$$h = \varphi(k)/(\log k)$$

*The defense took place October 22, 1943. The University of Oslo was closed by the Germans on November 30, 1943.

where $\varphi(k)$ is a function of k that tends to ∞ when k tends to ∞, and $|T| < k^a$, where a is a certain positive constant, then "almost all" L-functions belonging to the module k have a zero on the line $s = \frac{1}{2} + it$ in the interval $T < t < T + h$. This in turn leads to quite a number of results which I obtained later about the value distributions of the L-functions, and also about the value distribution of the zeta function both on and in the neighbourhood of the critical line.

Did you have a new and original way to look at the zeta function, and that by this you succeeded in proving your remarkable results?

Is it true that nobody else had thought about introducing a mollifying factor in this way. Something like that had been used in connection with the study of zeros outside the critical line – this had been done by Bohr and Landau – but it really was not that interesting. It gave weaker results. There was a Swede, Fritz Carlson, who proved the really first "density" results about zeros of the zeta function outside the critical line. He used a section, that is, a finite partial sum, of the Dirichlet series for $(\zeta(s))^{-1}$, where one had the Möbius function $\mu(n)$ as coefficients up to a certain cut-off bound, and then multiplied this with the zeta function. This forces it to lie fairly close to 1 on average when the real part of the variable is greater than 1/2. So Carlson was able to prove some important results about this, and they were the first so-called "density" results.

There was nobody who had tried to do anything on the critical line itself, that is when the real part equals 1/2. Firstly, it is considerably more difficult, and secondly, I guess that nobody thought that it would be particularly useful. I have to say that I understood fairly soon after I started to look into this that a mollifying factor could be very effective. It turned out that it could be even more effective than I initially thought, because I really had not thought that I would be able to obtain the sharp result that I actually got when I obtained the right order of magnitude for the zeros on the critical line. I had not believed that the method would lead so far. It turned out that I did not need to experiment very long before I found the right mollifying factor, and it did not take me a very long time to complete this work. However, it became quite complicated to carry out the computations of all the estimates that were needed. It can be made somewhat simpler if one uses Fourier analysis, something Titchmarsh did later – after the war – but his proof was also complicated. He sent it to me, and I made him aware of some simplifications that he could do. As a consequence the proof became considerably shorter when he published it. However, I think that in order to find a good numerical estimate, the Fourier integral is not the best method. Then one should rather make a modification of the method I used.

Is it correct to say that your method, perhaps also other people's methods, are of an averaging and statistical character, so to say, such that none of these can lead to a proof of the Riemann hypothesis?

By considering a statistical method one can get quite far, but it will never lead to a proof of the Riemann hypothesis. I mentioned to you that I could use this method

to investigate the value distribution of the zeta function on the critical line, and also in the neighbourhood of the line. I obtained quite a few results in this area just before and just after I came to Princeton in 1947, but I did not publish these results at that time. The reason was that I was then more occupied with what I could do with elementary methods in number theory, which was something that grew out of my version of the sieve method.

We talked with you earlier about the talk you gave at the 10th Scandinavian Mathematical Congress in Copenhagen in 1946, where you seemed to cast doubt on Riemann's conjecture, but you emphatically repudiated that.

What I wanted to emphasize in my talk in Copenhagen was that there did not exist at that time what one could call numerical evidence for the truth of the Riemann hypothesis. The computations that had been done did not go very far, so if there existed zeros outside the critical line one would not expect them to show up so early. In fact, at that time the computation of the Riemann-Siegel formula for the function on the critical line had only been done for the imaginary part a little more than 1000. There are very few terms that come into play by this, and the function behaves extremely regularly. One also had the matter of the so-called Gram's law, proposed by the Danish mathematician Gram, and as far as the computations went at that time there were only two exceptions to Gram's law. Gram's law would have implied that Riemann's hypothesis was true, but it would also have implied too much regularity for the distribution of the zeros. I knew from the results that I had obtained earlier that Gram's law became more and more wrong. Instead of a few exceptions it would rather be an exception when it was true. As I said, it was to be expected that the first zeros, if there were some that were not on the critical line, would occur a long time after the first exceptions to Gram's law. So the numerical material at the time did not point to what would be the case and other results were only of statistical nature. But I must say that if one believes that there is something in this world that is as it should be, then I think that must be the truth of the Riemann hypothesis. It gives the best possible distribution of the prime numbers, and also what one would expect from a statistical point of view, namely that the deviation from

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

is not greater than the square root of x. It would entail an elegance that is striking. Besides, I must say that I trust Riemann's intuition very much.

Do you expect that there is some kind of regularity in the distribution of zeros on the critical line?

There is undoubtedly some kind of orderliness, but how far that goes is hard to guess. For example, one may ask the question whether the imaginary parts of the zeros are in any way connected with other mathematical constants that we

are familiar with. Nobody knows anything about this, of course, but it is not impossible that there is such a connection. In fact, I do not rule out the possibility that there could be a whole lot of regularity that would be quite unexpected, and which remains to be discovered. That could very well be the case. I mean, there is no reason to think that we have come very far towards what can be done some time in the future. It is certainly possible that there may be novel ways to look at this, and which would lead to totally unexpected connections to other parts of mathematics.

Were you the first that made use of spectral theoretic methods?

I really do not know. For that matter, many people – and this goes way back – have surmised that perhaps the zeros are connected in some way with a spectral problem, but nobody had been able to point to something specific. But I think it is of little use to speculate on how soon someone comes up with a positive idea on how to attack this problem and obtain new results. It will happen one day, I believe, but how long we have to wait – or you have to wait! – is hard to guess, of course.

But if you should guess, would you then think that a core of ideas centered around a spectral problem on some type of space, which yet is unknown, will eventually lead to a solution of the Riemann hypothesis?

That is certainly a thought that several people have had. In fact, there have been some people that have been able to construct such a space, if they assume that the Riemann hypothesis is correct, and where they can define an operator that is relevant. Well and good, but it gives us basically nothing, of course. It does not help much if one has to postulate the results beforehand – there is not much worth in that.

Have you yourself worked seriously with the Riemann hypothesis for the last 30 years?

Well, I have thought about it from time to time. Once I had an idea that I thought perhaps could lead to a proof. I followed it part of the way, but I thought it unlikely that it would lead all the way to the goal. It would only have given the proof of the Riemann hypothesis for the zeta function $\zeta(s)$ and for some of the Dirichlet L-functions, but not for all. I have never tried to complete the proof. The idea depended on the fact that I had found a method to approximate $\varphi(s)\zeta(s)L(s)$ by polynomials, where $L(s)$ is an L-function with quadratic character χ such that $\chi(-1) = -1$, and $\varphi(s)$ is an entire analytic function that makes the product real on the line $s = \frac{1}{2} + it$. The fact that the polynomials had the symmetry built into them gave some hope that something could be achieved following this path. The question was what one could say about the zeros of these polynomials. After a while I became more and more convinced that it would not work as I had thought initially. It just seemed unlikely to me. However, I have now and then seen that people have attacked a problem in a way that seemed "hare-brained", to use an

English term, but then it turned out that they could make it work. They have proven something that would not be easy to prove in another way. On the other hand, I have seen people have ideas that seemed absolutely brilliant, but the only problem is that if one follows these to the end one is not able to get anything out of it after all. So it works both ways: sometimes a good idea does not work, and what seems like a bad, even idiotic idea, may actually work.

Have you communicated some of these ideas that you have had to others?

Yes, I have mentioned what I have told you. I told people that I did not particularly believe that my approach would have led to something if I had followed it further. It did appeal to me in the beginning, and I tried to follow it for a long time, but I became more and more convinced that it was unlikely that I could achieve anything in this way. However, I have not verified that it could not be done.

Do you have many ideas, or other thoughts, that you would like to leave for posterity?

No, I can not say that about the Riemann hypothesis. I have some results of statistical nature. There have been some people that for the last few years have talked to me, and have wanted me to publish the details of what I have lectured about several times, namely about linear combinations of certain Dirichlet series. These linear combinations have the property that – like the zeta function – they have functional equations that lead to a real-valued function on the critical line such that typically a positive portion of the zeros lie on the critical line. I must say that it is interesting that this can be done, but one can not use it for anything substantial. It is not really so many new ideas that enter into this, only old ideas that are combined in a new way. So I thought it was interesting to work it out and lecture about it, but I do not know yet if I ought to publish it. It would become considerably longer than I actually feel like writing up. As I told you earlier, I am by nature somewhat lazy, and that is my excuse for not having published so much. Many of these things have been published little by little by others. So even if I should never publish this myself, then eventually there will be others that will do that, I would think.

You mentioned that other attempts at proving the Riemann hypothesis – like Alain Connes' – essentially, as you see it, only give reformulations?

Yes, that is a new way to arrive at the explicit formulas – a new access, so to say – but it basically does not give more than what one already had. Connes undoubtedly believed to begin with that what he was doing should lead towards a proof, but it turned out that it does not lead further than other attempts. When I last talked with him he had realized this. This often happens with types of work that are rather formal. There was, for example, a Japanese mathematician, Matsumoto, who gave several lectures that made quite a few people believe that he had the proof.

To put the Riemann hypothesis in some perspective; if we, as non-experts, asked you the following question, and you should give a short answer: What does the Riemann hypothesis tell us about the prime numbers?

It tells us that they are very nicely distributed, about as evenly and as good as altogether possible. One can not expect a completely even distribution, of course. But it tells us that at least in mathematics – certainly in number theory – we live in Leibniz' "best possible of all worlds", just as the good Candide in Voltaire's "Candide" is told by his teacher Pangloss that he lives in the best of all possible worlds. Well, in number theory at least, one has the best relation possible among primes, even though we can not prove it yet. It would give me great satisfaction to see a proof, because it would demonstrate that there are some things that are right in this world. There are so many other things that do not work as they should, but at least for the prime numbers, and of course also for the zeros of the zeta function, they are distributed as well as they could be.

Does there exist some geometric analogue to the prime numbers as far as fundamentality is concerned?

If you take a compact Riemann surface with the hyperbolic metric, and consider the closed geodesic curves, then you can say that their lengths correspond to the logarithms of the primes. In the compact case one has that the Riemann hypothesis is essentially correct, except from a few cases where there are some zeros lying between real parts 1/2 and 1, which I do not believe can occur for those functions that we usually consider in number theory. However, I know there are some people that believe that perhaps some of the L-functions belonging to quadratic extensions have zeros lying between real parts 1/2 and 1.

Is there anything else you want to say about the Riemann hypothesis before we leave this subject?

I think it is a good possibility that it will take a long time before it is decided. From time to time people have been optimistic. Hilbert, when he presented his problems in 1900, thought that the Riemann hypothesis was one of the problems that one would see the solution of before too long a time had elapsed. Today it is a little more than one hundred years since he gave his famous lecture on these problems. So one must say that his opinion was wrong. Many of the problems that he considered to be more difficult turned out to be considerably simpler to solve. There were, for example, some problems about the transcendence of certain numbers that were decided earlier. There has been great progress in the area of transcendence results since Lindemann's original work from 1882. Incidentally, I have to tell you a story about Lindemann. When I was in Uppsala, Sweden, in the autumn of 1939, I found in the library two papers by Lindemann which he had published when he was quite old – certainly more than seventy years of age – where he claimed to have proven Fermat's conjecture. In the second paper he said a whole lot of nasty things about those that had pointed out mistakes in

his first paper. This can happen to the very best. Lindemann was really a great mathematician. His transcendence results were extremely far-reaching and of very general nature – he had built on some earlier results by Hermite. It happens that people, also great mathematicians, become a little senile in their old age. You have to bear with me, if –

(Laughter) We have not noticed any sign of that yet!

Were there any discoveries that you made during the war years that led to the discovery of the trace formula?

The trace formula came a bit later, and it really had little to do with my work on the zeta function. It came about after I had seen a paper by Hans Maass, where he considered the solution of a certain partial differential equation that was invariant under the modular group, for example. He had left quite a few problems unresolved. I saw that one could use some ideas that I had pondered on before the war in the wake of my Master Thesis. At that time I had looked at integral operators,which I felt much more familiar and comfortable with than differential operators. I preferred to look at Fredholm type equations instead of differential equations, and I thought that if one considered the class of all invariants, that is, all the integral operators that were invariant under the modular group, for example, then that would be a more natural thing to do than just look at the hyperbolic Laplace operator. So I started to look into this. Of course, these were integral operators extending over the upper half-plane, if one uses that representation, but one could use the invariance under the group to consider integral operators defined only over the fundamental domain. After I had done this it felt natural to investigate if one could compute the trace of an integral operator that acted within the fundamental domain. It turned out that by combining the terms in a suitable way, one could give this an attractive form.

It was fairly easy to do this if I considered instead of the modular group a group that had a compact fundamental domain in the hyperbolic plane. In 1952 I gave some lectures on this in the Mid-West at four universities: Ann Arbor, Purdue, Chicago and Urbana. It gave me some trouble to carry through the proof for the modular group which, of course, does not have a compact fundamental domain, and it gave me even more trouble to do it for groups in the hyperbolic plane whose fundamental domain have finite area, but have what one calls "cusps". I succeeded in completing these proofs. The most difficult part was to get a grip on the continuous spectrum, involving so-called Eisenstein series. It turned out that these could be extended analytically even for a general group, not merely a modular group, but a general group that had fundamental domain with finite area, but which was not compact. I completed this during the summer of 1953, and I communicated this result to Siegel. I thought that he would be somewhat interested, and he was. He asked me if I would come to Göttingen in 1954 and lecture on this, and I did that. I gave a series of lectures which ended by treating the non-compact case in general, not only for modular groups, but generally. There

was an assistant present at these lectures that took notes. I was going to write up the treatment of the non-compact case – the compact case was fairly routine to do – so I started to write up the last part. Some time later the assistant sent me what he had written up, but I thought that that was so badly done that I did not send back what he had sent me. So the so-called Göttingen notes started with Chapter 6.

At that time I was busy preparing a series of lectures that I would give at a congress, or symposium, that took place in Bombay in January and February of 1956. I was glad it did not last longer, since it got very hot there rather early in the year. I wrote up these lecture notes, and I held four lectures, each of 1 hour duration, about this. This was so published in their Proceedings. It treated not only the hyperbolic plane, but also the general hyperbolic space and other higher dimensional cases, and I pointed out where the difficulties lie. I treated the compact case completely, and there really are no new difficulties entering in that case. In higher dimensions new complications enter when one considers continuous spectra that occur for types of non-compactness that can be compatible with finite volume of the fundamental domain, and one encounters continuous spectra of different dimensions. I thought that this was one of the better results I had obtained in this direction.

I gave the trace formula in general for the compact case, and I also did more in the hyperbolic case, so I found it unnecessary to include the things this assistant had sent me from Göttingen. Consequently, I never sent the first 5 chapters to Göttingen. Any intelligent person would be able to complete the Göttingen notes from what was published, partly in the Proceedings from the meeting in Bombay, and also what later appeared in an Indian journal.

Was Poisson's summation formula a motivation – maybe of a philosophical nature – for you when you worked on the trace formula?

It was really not a motivation, but it can be viewed as an analogy if one considers Euclidean spaces and commutative groups and their actions. Then Poisson's formula, if one looks at it from this point of view, becomes a special case of the trace formula.

Could you write down the trace formula for us?

Well, it looks quite complicated in general, but in the simplest case where the group Γ has a compact fundamental domain, say $\mathcal{D}$, in the hyperbolic plane, then it becomes considerably simpler. So let $\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2, \quad n = 1, 2, \cdots$ be the eigenvalues of the associated Laplace operator, and let $h(r)$ be an even function which is analytic for $|\mathrm{Im}(r)| < \frac{1}{2} + \epsilon$ for some $\epsilon > 0$, and with growth condition $h(r) = O(1/(1 + r^2)^{1+\epsilon})$. Let

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{iur} dr$$

be the Fourier transform of $h(r)$. Then the trace formula can be written as

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(r_n) = \frac{A(\mathcal{D})}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} rh(r) \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}}\, dr + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\log N(P)}{N(P)^{k/2} - N(P)^{-k/2}} g(k \log N(P))$$

Here $A(\mathcal{D})$ is the area of $\mathcal{D}$ measured with respect to the invariant hyperbolic measure, $\{P\}_\Gamma$ denotes a primitive class of hyperbolic transformations, $N(P)$ is the norm of P. The P's correspond to geodesics on the associated Riemann surface, with $\log N(P)$ the length of P.*

When you look at the enormous importance and widespread applications that the trace formula has had, do you consider that to be your greatest discovery?

Well, yes, it probably is. It presumably is the one that has most applications, I would think, even though I do not necessarily understand some of these applications. What I mean is, I have heard that the trace formula has been put to use in physics, but I do not know precisely in what way. And, to be honest, I am really not that interested in knowing how it is applied there.

Are you surprised at the importance and role the trace formula has attained?

Well, as I said, I am surprised that it has got applications in physics. Mathematically speaking, I have always thought that the trace formula was a significant result. It contains a whole lot of information, and the problem itself encompasses and raises many questions to be explored in future research. This is especially true in higher dimensions where one encounters continuous spectra of more than one dimension, so to say. That complicates things. So there is a whole lot more to be done there, but that must be done by others since I have no intention of writing anything more about the trace formula. I gave some lectures in the 1980's, and also a few times later, about what I decided to call the "hybrid trace formula". The simplest example of that is, one may say, if you take the hyperbolic plane and an algebraic Riemann surface mapped into the hyperbolic plane (all this is intimately tied up with the uniformization theories) then – how shall I express it? – you can deduce quite a few classical results as special cases of the trace formula, for example the Riemann-Roch formula. You have to use some special kernels. Well, analogous things can be done in higher dimensions, too, but there it is somewhat more difficult to find the right kernel functions. It can be done, for instance, for all so-called "bounded symmetric domains", and for certain classes of functions. There you find similar things, especially if you have a product of several of these, where some of these functions give by themselves what corresponds to a Riemann-Roch formula. But the other component of the kernel is of a more general nature and that is what I referred to as a "hybrid trace formula". From some

*The above question and answer are taken from another context, but we feel it was natural to include it here.

of these one can obtain quite interesting results. One simple case is the so-called Hilbert modular group that is associated to a real algebraic number field. If it is of degree n, then you have a product of n hyperbolic planes. You can choose a kernel there, which is what one could call the singular kernel, and which leads to the Riemann-Roch formula for, let us say, $n-1$ of these variables. For the last variable you can take a general kernel and then you get formulas that lead to the Dirichlet series that you can construct from the Hilbert modular group. For one thing you get the interesting case that when n is even you get a series of something that corresponds to a zeta function and a series of L-functions – that is one way to express it – that are associated to the group, and the zeta function has a pole at $s = 1$. In the classical situation, if you only have one hyperbolic plane, or if you have an odd number of hyperbolic planes, then the same problem would lead to something that has a zero at $s = 1$. For n an even number you therefore have something that is more analogous with the zeta function and Dirichlet L-series. As I told you, I gave some talks on this in the 1980's, but I have never published this. I do not know for sure if somebody else have published some of this by now. I have not really followed what has happened in this area over the last decade or so. I know that a whole lot of stuff has appeared in the literature, but I do not read as much as I did before.

Do you think that anything essentially new was added in the later extensions and generalizations of the trace formula?

Well, the viewpoint was changed somewhat, of course, after one started to look at group representations. At the time this started I was not thinking so much about it – in fact, I have never really read much about these things. It was only much later that I began to take a closer look at it. In the hyperbolic plane it is not necessary to consider group representations, everything can be achieved by looking at automorphic functions and automorphic forms – they are all scalars, so to say, just one component. In the higher dimensional symmetric spaces the situation is more complex. If you have a discrete group whose fundamental domain has finite volume, then you can look at automorphic functions, of course. But in most of the cases there is nothing that corresponds to the scalar automorphic forms. Even for bounded complex symmetric domains, where the scalar forms always exist, they do not tell the whole story. In the higher dimensional case one also has to consider vectors of functions that are transformed under the group action, as a matrix. It is only in the hyperbolic plane that we get everything by looking at automorphic functions and scalar forms. It leads to more generality by considering all group representations, but I have to admit that I have really not studied this field in any detail. I have never read much mathematical literature. I operated mostly by looking at certain papers to see what various people were up to, and see what I could understand, and then build on this in my way. I have read very few books in mathematics, but those that I have read have meant a lot to me. But I have mostly looked at papers, more than at textbooks. However, one textbook that has

meant very much for me was Erich Hecke's "Algebraische Zahlentheorie". From that book I learned a lot – that book is a gem.

Are there other books than the one by Hecke that have been important for you?.

As far as algebraic number theory is concerned, there were many other books that I tried to read, but none of them had my way of looking at things. I found Hecke's book very understandable, for instance the way he introduced and treated the ideal concept. Hermann Weyl had written a book on algebraic number theory, a fairly short one, and Landau had also written a book on the same topic. I never felt comfortable with their books. I preferred Hecke's way of looking at things. It worked very well for him, and he was the first that could make any significant progress with respect to the zeta functions and L-functions associated to algebraic fields of higher degrees, and he was able to prove the functional equation.

Aside from algebraic number theory, were there other books – for instance Titchmarsh's book on Riemann's zeta function – that have been important for you?

Titchmarsh's book contained quite a few nice things. But it also had things that were not so good. As for the latter, there is no good reason to include something about almost periodic functions and regard the zeta function as an almost periodic function. That point of view is not very useful. It may be of some interest per se, but one has never been able to deduce anything that is of any value about the zeta function, or some of the other number theoretic series that one studies, using this approach. So that chapter in the book could be deleted. But Titchmarsh's book contained a lot of good things. I must admit I did not read all his proofs. By and large I must say, concerning many of the proofs that one find in these books treating analytic number theory, things are done unnecessarily complicated. In fact, when one considers the explicit formulas, it really is one particular formula that one is primarily interested in, and where the series does not converge absolutely. In all these cases it is much simpler to use the integrated formulas. One can always obtain convergence by integrating a couple of times, then the series becomes absolutely convergent. The fact of the matter is that one can obtain equally good results by working with these absolutely convergent series, and then taking derivatives. It is totally unnecessary to consider something that does not converge absolutely.

We have now talked about several of your discoveries – we have talked about the Riemann hypothesis and the trace formula. However, sieve methods are also something that you have an affinity for, and where you have made fundamental contributions.

Well, that is so. That came as a by-product of my work on the zeta function.

After your doctoral defense?

Yes, after I finished my doctoral defense. I realized that I could utilize some of the things I had used in connection with working on the Riemann zeta function. I could use it to find upper bounds, and it worked in a more general context than I had earlier. It was only then that I really understood what the sieve method was all

about. I had looked at Viggo Brun's papers, but I never really understood them. He extensively applied some kind of geometric presentation. He depended upon seeing things in a geometric way with figures and diagrams, etcetera. I looked at all this, but it just did not make much sense to me, so I never got anything out of it. There existed other presentations that avoided this. For instance, Rademacher's presentation was more accessible for other mathematicians. Rademacher had, so to say, translated Brun's work into another language. So it became more and more Rademacher's presentation of Brun's sieve method that was used, and which made the theory accessible to a larger group of mathematicians. I also took a look at Landau's three-volume lecture series on number theory, which did contain a section on Brun's work, but he followed to a large extent Rademacher's presentation. I did not think that was so good, either. In order to find upper bounds, I discovered that I could use squares of $\sum_{d|n,d<z} \lambda_d$, and that worked very well. In fact, for all the problems that could be attacked by Brun's sieve method, I could find better upper estimates using my method. Not only that, but the estimates were much easier to find. Also, the constants involved became simpler and more natural, because I ended up with something that was an integer multiple of what presumably was the correct value. So then the only question that remained was to find something which gave lower bounds. One can achieve that by putting in front of these squares a factor that takes a negative value as soon as n has more than one prime factor, provided it lies under a certain bound.

The so-called Selberg's sieve method, that was your first main result in this area?

I published a note in the summer of 1946, and I continued to work on it further. When I came to Princeton in 1947 I made a discovery that put me on a path to what I call parity, and which is quite important for what one can do – and can not do – with sieve methods. I tried to show the existence of prime numbers in intervals – relatively small intervals – by considering a quotient of two quadratic forms. I considered

$$\frac{\sum_{x<n<x(1+\epsilon)} d(n) \left(\sum_{d|n} \lambda_d\right)^2}{\sum_{x<n<x(1+\epsilon)} \left(\sum_{d|n} \lambda_d\right)^2}; \qquad d \le z, \lambda_1 = 1 \tag{1}$$

where $d(n)$ denotes the number of divisors of n. One usually chooses $z \le \sqrt{x}$. I looked at the quotient in (1). It is obvious that if you can make this quotient – one may restrict to square-free numbers, that will yield the same – if you can make the quotient less than 4, you will essentially have shown that there exist prime numbers in the interval between x and $x(1+\epsilon)$, where ϵ is a small positive constant. One has the quotient of two quadratic forms in the λ's, and we want to minimize this, of course. You can not really diagonalize the whole quadratic form by introducing new variables. I found that if I only tried to make the dominating part of the

numerator as small as it could be if the λ's are free, except $\lambda_1 = 1$, then I could make the quotient as close to 4 as I wanted, namely as $4 + O(1/\log x)$. It seemed to me that there was no reason to believe that I had found the right minimum by only taking the minimum of the dominating part of the numerator, and then inserting the λ-values I had thus found. In fact, the remaining part of what I had found above is of the same order of magnitude, and it seemed clear to me that since I was not at the right minimum, then I should be able to make it a little less than 4 by adjusting it a little. But it turned out that that was not the case. I also tried with other expressions, and after a while it became clear to me that the numbers that have an even number of prime factors and those that have an odd number of prime factors will contribute about the same, so that the quotient can indeed not be made less than 4. The fact that it can be made as close to 4 as one may wish shows in reality that numbers with exactly two prime factors will contribute vastly more than all the others that have an even number of prime factors. In other words, those numbers with an even number of prime factors higher than two will give a contribution of smaller order of magnitude. This phenomenon showed up in quite a number of other situations as well, so I realized that apparently whatever I did with these methods I would get the same asymptotic contribution from numbers with an even and an odd number, respectively, of prime factors. It then dawned upon me that it should be possible to construct an expression where I would get approximately the same contribution from the primes and products of two primes, and that was what led me to this formula that forms the basis for the elementary proof of the prime number theorem. I refer to this problem as parity: that in these various formulas the contributions from the numbers with an odd number of prime factors and those with an even member of prime factors are asymptotically the same. The sieve method can not distinguish between these two contributions. I mentioned this already in Trondheim in 1949, where I gave a talk, and I elaborated in more detail on the fact that one has this limitation in my talk at the IMU Congress in Cambridge, Massachusetts, at Harvard in 1950. This limitation also gives you an idea of what one can do, and the fact is that one can find an infinite number of formulas where the only contribution comes from primes and products of two primes. These two parts have the same weight and there are some different functions of the two that appear in these formulas. The formula that I presented in my published paper on the elementary proof of the prime number theorem is actually the simplest. That formula emerges if one first considers the formula

$$\sum_{n<x} \sum_{d|n} \mu(d) \log^2 \frac{x}{d} = x \sum_{d<x} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 \frac{x}{d} + O\left(\sum_{d<x} \log^2 \frac{x}{d} \right) \tag{2}$$

(μ is the Möbius-function.)

Here one easily sees that the inner sum on the left hand side always is zero if n has more than two different prime factors. By looking at the values for $n = 1$ and

$n = p^a$, where $a > 0$, and $n = p^a q^b$, with $p \neq q$ and $a > 0,\ b > 0$, the left hand side of (2) becomes

$$(3) \qquad \begin{cases} \log^2 x + \sum_{p^a < x} \left(\log^2 p + 2 \log p \log \frac{x}{p} \right) + \sum_{\substack{p^a q^b < x \\ p \neq q}} 2 \log p \log q \\ = \sum_{p<x} \log^2 p + \sum_{pq<x} \log p \log q + O(x) \end{cases}$$

At the right hand side of (2) one can estimate the two sums, and one gets that the right hand side is

$$2x \log x + O(x)$$

Taken together this yields

$$(4) \qquad \sum_{p<x} \log^2 p + \sum_{pq<x} \log p \log q = 2x \log x + O(x)$$

So is it formula (4) that is the key to the elementary proof of the prime number theorem?

Yes, that is so.

It is very important for us to establish this: It was in fact the sieve method, and in a certain sense the simplest application of the sieve method, that led to the asymptotic formula (4)?

Well, yes. It is some kind of sieve, it is a local sieve. You see, when one uses these methods in general one always finds that the λ's that one ends up with, depending upon what type of coefficients that appear, always are of the form

$$(5) \qquad \lambda_d = \mu(d) \frac{\log^k \frac{z}{d}}{\log^k z}$$

where z is a bound for how large d can be, and the exponent k depends upon the problem one considers.

Is it some sort of Lagrange multiplicator method that you use to minimize these expressions?

Well, I have a method of introducing new variables that diagonalize the expressions, so that it is very easy to find the minimum of such a formula after you have done that, at least for the dominating part of the formula. Actually, it is a little more complicated. The optimal λ_d's , when we are able to determine them

exactly, appear as $\mu(d)$ multiplied with a quotient of two sums. If one estimates these sums one gets an asymptotic formula of the form (5). Usually, one must be satisfied with obtaining an approximation.

So this was a great major discovery, in fact?

Well, it takes some time before you are able to draw further inferences from it. It took me some time to get it in the way I wanted it, and it went through several phases. One of these I had not planned for. To put it this way: there came an "interloper in the way". Before we get to that, I have to tell you that I used something similar in connection with something I had already finished, and which was ready for publication. It was an elementary proof of Dirichlet's theorem about the existence of prime numbers in arithmetic progressions. I did not use (4) then, but something that may be deduced from the analogue of (4) for an arithmetic progression $kn + l$, where $(k, l) = 1$, namely

$$\sum_{\substack{p<x \\ p\equiv l(mod k)}} \frac{\log^2 p}{p} + \sum_{\substack{pq<x \\ pq\equiv l(mod k)}} \frac{\log p \, \log q}{pq} = \frac{1}{\varphi(k)} \log^2 x + O(\log x) \tag{6}$$

where $\varphi(k)$ is Euler's number theoretic function.

It is then not so difficult to get a contradiction if you assume that there are not infinitely many prime numbers in progressions. I went through this proof with Turán who was here in Princeton then, the summer of 1948. He had asked some questions in connection with this, and I had come to mention the formula (4) – in the proof itself only the formula (6) entered. I believe what caused me to mention the formula (4) was that he, Turán, had asked how sharp one could make certain estimates. He had been here for the spring term and he was about to travel back to Hungary, and he would probably have left before I returned from Canada. I was about to travel up to Montreal to get a permanent visa, because I wanted to take a job at Syracuse, New York, for a year. I had been offered another year at the Institute here in Princeton, but I thought it would be interesting to see what it would be like to be at a different American university.

Did you have to travel to Canada to get a visa?

You could not do this inside the US, you had to travel to another country, and Canada was the closest place. So I went up to Montreal, and I returned to Princeton nine days later. In Montreal I did not talk with the consul himself, but with the vice-consul. I had been advised to go to Montreal by Hua, a Chinese mathematician who had been here in Princeton and who I got to know. He had travelled to Canada to change his visa in order to take a position at Urbana, Illinois. So I mentioned to the vice-consul the Hua case to encourage him to do the same for me. He told me after having looked at the files related to Hua that it seemed obvious to him that Hua should not have received a visa. After some days had elapsed he did make the visas ready for us. However, before we got them he had second

thoughts and withdrew them. So it took a few days more, and we had to have some documents translated. It was particularly complicated with some documents that my wife Hedi had in Rumanian, but we found a translator who was able to give an official attestation that the documents had been correctly translated. We finally got our visas, and we travelled back by train, entering the US at St. Albans in Vermont. When I came to the Institute next day, this was on Thursday, July 15, it turned out that Turán, to my surprise, was still there – he left and went back to Hungary the next day, I believe. He had gone through my proof for arithmetic progressions, which I had told him about, and he had also mentioned in passing the formula (4). In the meantime, while I was in Montreal, Erdős had also arrived in Princeton, and he had been one of the listeners to Turán's presentation. Erdős told me on that same Thursday that he was interested in this formula (4) , which he called an inequality. I always called it an equality – it was an asymptotic formula. Well, one can say it is an inequality since it is greater than an expression if you multiply x with a negative constant, and smaller if you multiply with a positive constant. But I have always called such a formula an asymptotic equation, not an inequality. But he called it an inequality. He wanted to try to see if he could use it to show that there existed prime numbers between x and $x(1+\epsilon)$, where ϵ is arbitrarily small, if x was sufficiently large. Well, I told him that I had nothing against that. I was not working on something like that at that time. In fact, I had left this problem after I discovered what I called parity, and had realized that what I had tried to do with the quotient in (1) would not succeed, that is, I could not make it less than 4.

So you did not have the prime number theorem in your thoughts then?

Oh yes, I had the prime number theorem in my thoughts, that was my goal based upon formula (4) that I had obtained. I told him that I did not mind that he try to do what he said he wanted to do, but I made some remarks that would discourage him. I told him that he should not be too confident that it would be possible to deduce so much from my formula. But then, a couple of days later – I believe it was on Friday evening, or it may have been on Saturday morning – Erdős told me that he had found a proof for the existence of primes between x and $x(1+\epsilon)$, and he gave me some of the details of how his proof went. I had much earlier obtained a few other results. For example, if one takes the function $\psi(x)$, which is the sum of the logarithms of the prime numbers less than x, that is

$$\psi(x) = \sum_{p<x} \log p \tag{7}$$

and considers lim sup and lim inf of $\psi(x)/x$ – call this A and a, respectively – then I had deduced that $A + a = 2$. This fits very nicely, of course, with the supposition that both of them should be 1, and that would give a proof of the prime number theorem. One easily observes that it is highly unlikely that they

are different from each other, since this would imply a very peculiar distribution of the numbers that have an even number of prime factors and those that have an odd number of prime factors, as well as a very peculiar distribution of the primes themselves. Well, I discovered that I could incorporate his result, which actually said more than the existence of prime numbers between x and $x(a+\epsilon)$ – that result in itself would not have been sufficient for me – in what I had been working on, and this led me to a proof that A and a are equal. Then they have to be equal to 1, of course, and that is equivalent to the prime number theorem, namely that $\psi(x)/x$ tends to 1 as x goes to infinity. So I told Erdős the next day that I could use his result to complete the proof – an elementary proof – of the prime number theorem. We talked somewhat more about this, and it turned out that one could avoid using his result, but use some of the ideas he had used, to get a more direct and shorter proof. I really did not have in mind starting a collaboration with him. He asked me if we should go through this proof, and I thought he meant that we should go through the proof with a few other people here at the Institute that were interested in number theory. Among these were Chowla from India and Ernst Straus, who was Einstein's assistant and who was somewhat interested in number theory. Turán had already left – I believe he left on Friday, while this was taking place on the following Monday. I said okay, and I came over to the Institute in the evening to go through the proof. It turned out that Erdős had announced this at the university so instead of the small informal gathering that I thought this was supposed to be, the auditorium was packed with people. I went through the first parts that I had done earlier. Then Erdős went through what he had done. Finally, I completed the proof of the prime number theorem by combining his result with mine.

After a few days I travelled up to Syracuse to look for an apartment. Besides, I had promised them that I would teach at the summer school and take care of engineering students in what they called "advanced calculus". In Syracuse they would pay me somewhat more. They also promised to provide a job for Hedi, something she would appreciate. So we went there. It took some time before I found an apartment, so we lived with a colleague of mine in the meantime. I started to hear from different sources that they only mentioned Erdős name in connection with the elementary proof of the prime number theorem, so I wrote a letter to Erdős and told him how I would proceed. He had in the meantime given several talks about this in the US, but I must admit that I did not give a talk on this since the one time in Princeton. I had to take care of teaching, and then it was the matter of finding an apartment, which took a lot of time After some time had elapsed I began to type my proof of the arithmetic progression result, and I tried to simplify the proof of the prime number theorem simultaneously. I found fairly soon a proof that I liked which did not use upper and lower limits, and which was more direct. The proof was constructive, and it was this proof I wrote up at

the same time as I typed the one for the arithmetic progression.* I wrote to Erdős that we could publish each separately, and that I would let his paper appear first, if he would publish the result that I had used originally to prove the prime number theorem. Then I would publish a paper where I first sketched the proof that used his result, and afterward I would give the proof that I was more satisfied with and which did not use any of his things. But he insisted upon being involved more directly in this.

What else did Erdős say in his reply to your letter?

He answered that he reckoned we should do as Hardy and Littlewood. But we had never made any agreement. In fact, we had really not had any collaboration. It was entirely by chance that he became involved in this – it was not my intention that he should have access to these things. It is clear that Hardy and Littlewood had an agreement that when they worked together on something they should both get equal credit for the results they obtained. It is all well and good that they had an agreement, and they worked together. Erdős and I had really not collaborated on anything. The only thing was the discussion we had after I had found the first proof of the prime number theorem by using his result. That was perhaps the only thing that could be called some kind of collaboration, but we did not have any agreement that we would "share alike everything". I must say that I never had any thought of collaborating with anybody. I have one joint paper, and that was with Chowla, but I must say that it was Chowla that first came to me with a question. He was interested in computing the L-function that belongs to the largest discriminant of an imaginary quadratic number field – the largest discriminant that has class number 1. That discriminant equals 163, and he would like to find a way to evaluate the L-function that belongs to the quadratic character for this module at the point $1/2$, and to see if this gave a positive or negative value. If it came out negative it would imply that there was a zero which was not on the line $1/2$, but somewhere between $1/2$ and 1. It so happened that I had, incidentally, a formula which should make it fairly simple to make a numerical computation, and which could be used for any zeta function associated to a positive quadratic form in two variables. I gave that formula to Chowla, and he came back a short time later and said he had found that it gave a negative value at the point $1/2$. This implied that there must be a zero that was not on the line $1/2$. I pondered a little over this and looked into the details. As a matter of fact, there existed two theories of quadratic forms – that is, binary forms – long time back. One of these have a mid-coefficient with a 2 in front – that is, of the form $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ – while the other is of the form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$. What one calls the discriminant gets a different expression, depending upon which of these forms one considers. In the one case it equals $AC - B^2$, and in the other it equals $4AC - B^2$. My formula had

*Selberg sent a hand-written eight-page letter in Norwegian, dated September 26, 1948, from Syracuse to his brother Sigmund in Norway, outlining the elementary proof of the prime number theorem.

been developed with respect to the smaller discriminant, while Chowla had put into the formula a discriminant that was too big. It turned out that when he made the change to the smaller, the formula yielded a very small, but positive value. So there was no zero after all. By looking closer at this we came across a whole lot of other things. In particular, by not considering the point 1/2, but rather the point 1, and looking at the residue there after one has removed the associated Epstein zeta function we got some interesting results. The Epstein zeta function is in reality the zeta function of the quadratic field when the class number is 1. Then it has an Euler product that has a zeta function and an L-function with a quadratic character. If you remove the zeta function you are left with the value of the L-function at the point 1. We had an expression for this from the formula I had, and it turned out that it actually gave access to a rather interesting result about the periods of elliptic functions that have complex multiplication, in the classical form, that is. One considers the periods. If you use the old Jacobi form – which was also used by Abel – then you get that the periods can always be expressed as an algebraic number multiplied with a product of gamma functions. This was only known in two special cases before, namely if you take elliptic integrals of the form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

which correspond to arcs of the lemniscate. The other known case, where complex multiplication also occurs, comes from considering the integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

Both of these cases were classically known. The integrals from 0 to 1, for example, could be expressed by gamma functions evaluated at certain rational values. But our result was more general. If the class number was 1 we got a rather simple expression. But I generalized the result somewhat so that it also encompassed the case when the class number was larger than 1. Then the formula became more complicated, but it still had the form of an algebraic number multiplied with a product of gamma functions evaluated at rational points. This was a rather interesting result. I wanted Chowla to put his name first, but he refused vehemently, so the paper was published under the names Selberg and Chowla, in that order. It is completely illogical, of course, instead of having it in alphabetical order. I got him to write it up; except that I wrote up the part that treated the case when the class number was greater than 1, since he was not that familiar with some of the things that was needed to treat this case. He computed some examples where the class number was 1, where he also determined the algebraic factor explicitly. One knows that it is in general an algebraic factor. One can express it in terms of a radical expression, but it can be quite complicated..

This is the only paper you have published with anyone else?

Yes, but the first impulse came from Chowla. If he had not come and told me what he tried to do, and if I had not remembered the formula that I had found on another occasion, then nothing would have come out of it. It could also very well have happened that if we had got a negative value at the start, then we would have been satisfied with that and not gone any further, just registered that we had disproved the Riemanns hypothesis for this particular L-function.

Let's get back to Erdős. Is it correct to say that it was an unintended accident that he saw your fundamental formula?

Well, yes. You have to understand that Turán had become a good friend of mine while he was in the US, and I knew that he would soon go back to Hungary. I thought that he would have left when I returned from Montreal, but it turned out that he was still here. Erdős had arrived in the meantime, and he got to know about this via Turán. As I told you, I had gone through my proof of the arithmetic progression with Turán and he had posed a question which caused me to mention formula (4) that I had obtained.

So you did not tell Turán not to mention this formula to others?

No, I did not do that. Firstly, Erdős was not there when I talked with Turán, and besides I thought Turán would have gone back to Hungary before I returned from Montreal. I had no inkling that Erdős would arrive in Princeton for a visit of several weeks duration. But these two, Turán and Erdős, knew each other from Hungary, mostly from before the Second World War. Erdős was not in Hungary during the war, but Turán was there.

Did Turán express some sort of regret for what happened later?

No, but you must understand that Erdős was his friend, and he would be unwilling to offend him. I kept good relations with Turán afterwards, but we avoided talking about these matters later. As I said, Erdős answered my letter and referred to Hardy and Littlewood, something I thought was irrelevant in this case – we were not anything like Hardy and Littlewood. I do not know whom of us he thought was Hardy and who was Littlewood!

You said earlier that when Erdős talked with you, you tried to "discourage" him. Can you specify that a little more?

I told him at that time that one could give a counterexample, namely that an analogous formula to (4) would imply something else. Let us look at the continuous analogue. Let's say that one has a formula like

$$\int_1^x \log t \, df(t) + \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) df(t) = 2x \log x + O(x) \tag{8}$$

If one has such a formula it is not necessarily so that $f(x)$ is asymptotical to x. I can construct a counterexample. However, the function $f(x)$ I used is not everywhere monotonely increasing. On the other hand, the function in (7), $\psi(x) = \sum_{p<x} \log p$,

is a monotone function, and it is monotone functions that are relevant for number-theoretic applications. I kind of tried to scare him away from the prime number theorem itself. It was, one may say, a little dishonest that I did not tell him that my counterexample was based on a non-monotonic function.

We understand the psychology very well. You know you are close to a proof of the prime number theorem, and you do not want any meddling.

I did not want any interference in this matter. Anyway, I suggested to Erdős that each of us could publish separately what we had done. He could have the priority to publish his result, so that would appear before my result – which actually did not need his – but I would give a full sketch of how I first had used his result to obtain my first proof of the prime number theorem. That was also what I did.* Hermann Weyl became some kind of intermediary. When Herman Weyl took his leave from the Institute here in Princeton, he gave me some relevant documents†. Weyl had heard from both Erdős and me, and he had formed his opinion on how things hanged together. By and large he sided with me, but he thought that I could be generous and let Erdős publish his work. I had really no objection to him doing that. But the case is that Erdős at that time had in a way already published. He had given some talks in Boston, at MIT, I believe, and later he had travelled to Europe and given some talks in the Netherlands, where van der Corput was. Subsequently, van der Corput wrote up an outline of Erdős' presentation. That was actually the first publication. It appeared already in the autumn of 1948, and my paper appeared in the spring of 1949. I sent my manuscript to the Annals of Mathematics. My original idea was that we both should publish in the Annals, but it ended up with that Erdős would publish his paper in the Bulletin of the American Mathematical Society, whose editor at the time was Nathan Jacobson at Yale University. Jacobson sent Erdős' manuscript to Hermann Weyl for him to referee. Weyl wrote a report to Jacobson where he started off by saying that he thought that Erdős was not altogether honest. He claimed credit for too much, according to Weyl. It is likely that this had something to do with what I later heard from Siegel. He had talked with Erdős and said that it must be possible to reach some sort of agreement on this. But Erdős had said: "What I want is immortality". This is just a completely idiotic thing to say. There does not exist in actual fact any immortality, not even in mathematics. What I mean to say is that if the names are preserved they are written, after a while, starting not with a capital letter, but with a small letter, like in "abelian". Well, there will not be that many that will know about these names as time passes.

Why would Erdős not send his paper to the Annals?

Well, he did not agree to the idea that I had put forward. I meant that we should present what each of us had done, but he wanted more involvement than

*The version published in BAMS does not contain the following text up to the footnote on page 35.

†See Appendix 1.

that. Hermann Weyl wrote to Nathan Jacobson later that it was wrong of Erdős to present so much of what had actually been done by me. It ended up with Jacobson not wanting to have this included in Erdős' publication. So he rejected the paper. Erdős then contacted someone he knew at Colombia University, who was a member of the National Academy of Science in Washington, and who had the right to present his manuscript there. So it was published in their Proceedings. This is actually not a good place to publish mathematics, since it is a place that contains all kinds of articles within science. It is not often that mathematicians read this journal. On the other hand, it was published rather quickly. I do not know which paper appeared first, his or mine. But the very first publication on this was the one that van der Corput was behind, and that came, as I told you, in the autumn of 1948. I have a copy of it in my drawer. I have lying here some kind of "file" containing much of the material that concerns all this, but I believe that the papers are all mixed up. Yes, here it is. I think that van der Corput has modified the proof somewhat – it was not exactly this way that Erdős presented it to him. He has given it his own form. Anyway this was the very first publication. There are perhaps not that many that know about this publication?

It was just circulated like this?

Yes, van der Corput sent me a copy of it. He mentions my name first, he does not take it in alphabetical order. Incidentally, I have never met van der Corput..

Selberg-Erdős, Selberg-Erdős. He, that is, van der Corput, mentions you first everywhere.

He understood; and besides, he has modified the form of presentation that Erdős gave. I must admit, I have never read the details – reading other people's work I find strenuous.*

Hardy believed that it was not possible to give an elementary proof of the prime number theorem?

Yes, but that is not so strange, actually. But there were some people that made a great fuss about this. Erdős created a whole lot of propaganda for himself. I was in Syracuse, and I did not lecture on this anywhere. In fact, I have never really given a talk about the elementary proof of the prime number theorem. I have given talks a couple of times about an elementary proof of the essential part of the results Beurling obtained for so-called generalized prime numbers. The elementary proof gives a somewhat weaker result than Beurling's. I do not know if it is possible, but I would think it should be, to give an elementary proof that would give a sharper form, like the one Beurling had.

Can you explain to us what a generalized prime number is?

Beurling lectured on this at the Scandinavian Congress in Helsingfors in 1938, and I later looked at his published paper. So you have a sequence of real numbers

*The version published in BAMS resumes here.

$1 < p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$, and you form all possible products $\{n_k\}_k$ of these and order them according to size, $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$. You denote the number of p's less or equal to x by $\pi(x)$, and the number of n_k's less or equal to x by $N(x)$. The question is, if you assume that $N(x)$ is asymptotic to a constant multiplied with x, plus a remainder term of the form $O(x/\log^\alpha x)$, that is

$$N(x) = Ax + O\Big(\frac{x}{\log^\alpha x}\Big) \tag{9}$$

what can you say about $\pi(x)$? Beurling proved that if $\alpha > 3/2$, then $\pi(x)$ is asymptotic to $x/\log x$, and so it corresponds to the prime number theorem. He proved more than that: if (9) holds for all α, then he could prove sharper estimates. In fact, then you get that $\pi(x)$ is equal to the logarithmic integral of x plus $o(x/\log^\beta x)$ for all β; that is

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + o\Big(\frac{x}{\log^\beta x}\Big) \tag{10}$$

The logarithmic integral can be defined in different ways, but let us say that $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$.

Does Beurling's proof use the prime number theorem?

No, the proof does not use the prime number theorem. Beurling's proof is an analytic proof. I was able to find an elementary proof, but I had to assume that the remainder term is $o(x/\log^2 x)$ – only then could I obtain a proof.

I have often wondered if it is possible to improve my proof so it is valid for $\alpha > 3/2$, but I have not had the patience to work it out. But I can not conceive that it should not be possible to do so.

You have received the Fields Medal – in 1950. You also have received the Wolf Prize – in 1986. Three years ago the Abel Prize in mathematics was established. What are your thoughts on these types of prizes in general – do you think they have a positive effect?

It does not advance science. No one does scientific work because there exist prizes – I can not imagine that. A prize will make one or more persons happy, but it also gives rise to disappointment among many people, I would imagine.

But do you believe it serves mathematics in the sense that it creates publicity and thus raises the awareness of the public?

Whether it serves mathematics to get publicity is an open question.

Coming back to the Abel Prize: what are your thoughts on the awards so far?

I proposed Serre and Grothendieck as candidates for the first award in 2003, as some people I would have preferred. I thought that Serre would get it, and that also happened. Since then I have not made any proposals. Concerning the Abel

Prize, I have a somewhat ambivalent attitude. Let us consider the Nobel Prize: I think it has caused some unintended harm by creating a strong distinction in prestige between those that get the prize and others, who certainly deserve it, but do not get it. There are, of course, some people that so clearly outshine others that the award is uncontroversial; in physics, for example, you have Einstein, Bohr, Heisenberg, Dirac, and a few others. However, since the prize is awarded yearly, it is inevitable that the distinction will not be so clear. The same problem is bound to happen with the Abel Prize. There are mathematicians that outshine others and so clearly deserve the prize – I mentioned Serre and Grothendieck above as two such people – but in the long run one can not expect that the recipients of the Abel Prize will be of the same calibre.

One of the reasons you did not get the Abel Prize is perhaps that you are Norwegian?

I am a little too old, I think. One should perhaps have an age limit.

You did receive a so-called honorary Abel Prize in 2002, at the Abel Bicentennial Meeting in Oslo. You were not able to be present to receive this prize. However, you sent a thank you letter where you referred to Abel's two-page short note in Crelle's journal in 1829, which appears as number XXVII in his Oevres Complètes, where he proves the most general from of the addition theorem for abelian differentials. You wrote: "It still stands for me as pure magic. Neither with Gauss nor Riemann, nor with anybody else, have I found anything that really measures up to this". Can you make some further comments on this?

I want to make it clear that I never have read in detail Abel's so-called Paris Memoir, which for a long time disappeared before it was recovered and published long after Abel's death. But it is that little note – upon which the results of the Paris Memoir rest – which is so extremely elementary. There really is no comparison in the mathematical literature, I think. Such a fundamental and far-reaching theorem proved by so simple and elementary methods – it is pure magic. I can not imagine anything that quite compares to this.

A famous problem that was solved a few years back was Fermat's last theorem. Many will hail this achievement as a victory for modern mathematics, that one needed a huge machinery of modern tools to accomplish this. We have a question for you in this connection. Do you think that there will appear, as time goes by, a simple proof, or do you think that this is the future, namely that one will need big machineries to solve apparently elementary problems à la Fermat?

It is certainly possible that one will find a simpler proof some time in the future. I am not able to say from what direction this will come. There are two issues here: one may be able to find a great simplification of the present proof, which relies on the connection to the cubic curve that must exist if there is a solution to Fermat's equation; but it could also happen that one may be able to find a proof that avoids

that connection. I do not think one will be able to rediscover Fermat's original proof.

If it existed?

One can not doubt Fermat, can one? He was a very intelligent man, Fermat. No doubt about that.

But you do not really believe he had the proof?

Either he had it, and he could not find sufficient space to write it down, or he discovered later that it was not entirely correct as he had thought. But it is not likely that he had a proof because one knew too little about algebraic numbers at that time. If every algebraic ring had a nice Euclidean algorithm, then it would have been possible for him to construct a proof, but Euclidean algorithms seldom exist, in fact.

We want to end our interview with you by asking the following question: What in your opinion is it that characterize mathematicians of high and exceptional quality?

Imagination, resourcefulness and a feeling for relations and patterns are important ingredients. It is also very important to have a whole lot of perseverance, combined with patience. Needless to say one needs a lot of energy as well. Finally, I think that quite simply some luck is part of it. Yes, some people are lucky many times, and others are lucky only one time, while some perhaps are not lucky any time. What I mean is that I have seen good ideas, even brilliant ideas, that some people have had, but which in the end did not lead anywhere. And I have also seen examples of people with ideas that did not seem good or exciting, but which strangely enough led to interesting results. I have known people that seemed to have lots of ideas and that knew a lot of mathematics, but that never obtained really exciting results. I have also met people, who I did not consider to be particularly intelligent when I talked to them, but who came up with things, often in a clumsy and inelegant way, which turned out to lead to results of great importance. No, I dare not define what is the essence of a mathematical talent. It is too multifaceted and of such great variety.

Reference

A. Selberg, *Collected Papers*, volume I and II, Springer Verlag, 1989 and 1991 (including a bibliography of all his works up to 1991).

VI

February 15, 1949

Dear Jake:

It is very unfortunate that Erdös insists on having his paper published in the present form. I had hoped that when he carried out his plan he would see for himself that it doesn't work and that what he wrote down sounds somewhat ridiculous. I had questioned whether he has the right to publish things which are admittedly Selberg's, but which the latter considers as intermediary and therefore not fit for publication. He argues that if that principle were upheld in all circumstances, one of two collaborators in a mathematical enterprise could prevent publication if he so wants. I would answer: So what of it? If you enter into collaboration with another, you ought to have enough respect for him to run that risk. But in the present case it is not Selberg's stubbornness that would prevent publication of those intermediate results, but his good sense for what is mature and what is not. I really think that Erdös's behavior is quite unreasonable, and if I were the responsible editor I think I would not be afraid of rejecting his paper in this form.

But there is another aspect of the matter. It is probably not as easy as Erdös imagines to have his paper published in time in this country if the Bulletin rejects it. And we should avoid even the appearance of trying to suppress the opinion of one side in the present issue. So it may be better to let Erdös have his way. No great harm can be done by that. Selberg may feel offended and may protest (and that would be his right), but I am quite sure that the two papers — Selberg's and Erdös's together — will speak in unmistakable language, and that the one who has really done harm to himself will be Erdös.

But even if you accept the paper you should insist on some changes, especially on a change of the title. I made some suggestions to that effect in my previous letter. The title in its present form is really unfair to Selberg. Moreover, the paper has been drawn up so carelessly that it needs a certain amount of editing.

I return Erdös's letter of February 6 herewith.

Sincerely,

Professor Nathan Jacobson
Amer.Math.Soc.Bulletin
Yale University
New Haven, Conn.

Hermann Weyl

HW:CB

Confidential.

P. Erdös, On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem.

Erdös's paper is based on a fundamental asymptotic formula F due to A.Selberg, and it leads up to an elementary proof of the prime number theorem P also first obtained by Selberg. Neither the formula F nor the proof of the prime number theorem based on it have as yet been published by Selberg. In the time between the establishment of F and the attainment of P a development took place during which Erdös and Selberg worked in what may be called close competition or collaboration. There is no doubt that, before Selberg reached P, Erdös proved the lemma L described in §2 of this paper. How much help Selberg derived from the ideas involved in this proof and Erdös' communications is not easy to make out, while Erdös depended admittedly very much on Selberg's contributions. I have corresponded with both, have seen copies of the notes which they exchanged and listended to their accounts; and, although I first was inclined to ascribe to Erdös a considerable share in the development, I have finally come to the conclusion that Selberg from beginning to finish followed his own head and was influenced by Erdös only to the extent that he was forced to work at a pace altogether unnatural to him. The two men are of such very different temperament as to make the ensuing misunderstandings almost inevitable. Selberg would have liked the whole matter to reach a certain stage of finality before making it public, and he was not inviting help or collaboration when, half reluctantly, he mentioned his asymptotic formula to his friend Turan. I have seen Selberg's MS of his elementary proof of P which he

recently submitted to the Annals of Mathematics for publication. From this it is evident that he considered the stage described in Erdös' paper as preliminary only; his proof has now taken on a much more direct and, to my taste, more satisfactory form.

Under these circumstances it would heve been reasonable for Erdös to accept Selberg's offer to have his lemma L and its proof published before Selberg. E. thought that this did not do full justice to his contribution. In the present paper §3 deals with "Selberg's deduction of the prime number theorem from (2)" and §4 with a "Sketch of Selberg's simplification of the proof of (2)". Erdös is scrupulously fair in giving Selberg his due credit. But has he a right to publish things which are admittedly Selberg's, but which the latter considers as intermediary and therefore not fit for publication? I am sure that everything in Erdös' paper will have "historical" interest only once Selberg's paper is out.

I honestly think, one would do a disservice to Erdös by printing his paper in its present form. After he rejected Selberg-s offer, I see two possibilities only. (1) He publishes ǵ his lemma L and its proof and mentions but briefly that it has played an essential role in the development of an elementary proof of the prime number theorem (for which he refers to Selberg's forthcoming paper). Or (2)Erdös writes the story as the participant and eye-witness of an important event would tell it, post festum, as it were, to an audience that already knows the net result (as given in Selberg's paper) and is interested in learning how it all came about. But then Erdös' paper should follow that of Selberg in time and should clearly point out that it describes stages of development that are now definitely superseded.

Before coming to such radical conclusions I tried to remedy the situation by alterations of the MS on a smaller scale. The title is certainly misleading and unfair to Selberg. "Report on the development of a new elementary method in number theory" seems to me a more appropriate title, as it would indicate that the paper reports on something which the author can only partially claim as his own product. For the entire paragraph after formula (3) to the end of page 1 I should substitute something like this: "Such simplifications of the proof of (2) and of the prime number theorem as resulted from discussions during the next days between Selberg and the author are included in this chronological report. Another paper will deal with the application of the method to prime numbers in an arithmetic progression."

I offer these suggestions in case the editors, out of consideration for Erdös and his undeniable merits in this matter, should decide to print his paper essentially in the form in which he has submitted it. In that case some editing seems desirable also on the following pages; the outward appearance of the MS is indicative of the carelessness of its composition. §6 seems to have no heading.

Hermann Weyl

VII

Syracuse 26/9 - 48

Kjære Sigmund,

Sender dig hermed en skisse av beviset, eller rettere et av beviset eftersom den siste del kan varieres svært meget.

Definisjoner: (1) $\vartheta_x = \sum_{p \le x} \log p$

(2) $\psi_x = x + R(x)$, p, q og n betyr alltid primtall. Ellers bruker jeg at

(3) $\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$, samt $\vartheta_x = O(x)$

---

1. Bevis av grunnleggende formelen: La x positive og d pos. helt tall og sett

$$\lambda_d = \lambda_{d,x} = \mu(d) \log^2 \frac{x}{d},$$

og hvis n er hel, positiv

$$\theta_n = \theta_{n,x} = \sum_{d \mid n} \lambda_d$$

Da er

$$(4)\quad \theta_n = \begin{cases} \log^2 x, & \text{for } n = 1 \\ \log p \log \frac{x^2}{p}, & \text{for } n \text{ potens av primtall } p. \\ 2 \log p \log q, & \text{for } n = p^\alpha q^\beta, \\ 0, & \text{for alle andre } n. \end{cases}$$

De 3 første deler av (4) følger umiddelbart av definisjonen, den siste del følger ved induksjon, idet vi for enhetlighets skyld anta n kvadrat-fri, hvis vi for $n = n'p$

$$\theta_{n,x} = \theta_{\frac{n}{p},x} - \theta_{\frac{n}{p},\frac{x}{p}}$$

Av dette følger siste del av (4) enkelt.

Nu behøver utregningen

$$(5)\quad \sum_{n\le x}\theta_n = \sum_{n\le x}\sum_{d\mid n}\lambda_d = \sum_{d\le x}\lambda_d\left[\frac{x}{d}\right] =$$

$$= x\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\log^2\frac{x}{d} + O\Big(\sum_{d\le x}\log^2 d\Big) =$$

$$= x\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\log^2\frac{x}{d} + O(x).$$

På den annen side fra (4)

$$\sum_{n\le x}\theta_n = \log^2 x + \sum_{p^\alpha\le x}\log p\log\frac{x^\alpha}{p^\alpha} +$$

$$+ \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta\le x\\ p\ne q}}\log p\log q \quad (*) \quad = \sum_{p\le x}\log^2 p +$$

$$+ \sum_{pq\le x}\log p\log q + O(x),$$

hvor en rest leddet funnet nesenlig ved hjelp av (3) og (3'). Følgelig fra (5)

$$(6)\quad \sum_{p\le x}\log^2 p + \sum_{pq\le x}\log p\log q =$$

$$= x\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\log^2\frac{x}{d} + O(x).$$

Det gjenstår nu å opskatte summen på høire side. Dette kan gjøres ved å innføre formelen: ($\tau(v)$ antall divisorer i v)

$$\log^2\frac{x}{d} = 2\sum_{v\le\frac{x}{d}}\frac{\tau(v)}{v} + C_1\sum_{v\le\frac{x}{d}}\frac{1}{v} + C_2 + O\Big(\Big(\frac{x}{d}\Big)^{-\frac{1}{4}}\Big)$$

---

*) Jeg skiller faktoren 2 foran dette ledd, idet jeg regner $p^\alpha q^\beta$ og $q^\beta p^\alpha$ for to forskjellige

som lett vises (c'_m en konstanter). Innføres dette i summen, får man etter en del omformninger (idet man bruker $\sum_{d|m} \mu(d) = 0$ for $m \neq 1$, og $\sum_{d|m} \mu(d)\,\tau(\frac{m}{d}) = 1$ for alle m) at

$$\sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 \frac{x}{d} = 2\sum_{m\le x} \frac{1}{m} + c_1 + c_2 \sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d} + \\ + O\Big(x^{\frac{1}{4}} \sum_{d\le x} d^{-\frac{3}{4}}\Big) = 2\log x + O(1).$$

(6) gir nu formelen

$$(7)\quad \sum_{p\le x} \log^2 p + \sum_{pq\le x} \log p \log q = 2x\log x + O(x).$$

Dette er den vesentlige nye ting, fra denne formel finen flere veier til primtall-setsen. Den mest elementære (idet de andre bruker setningen om at en begrenset ~~tallfølge~~ har en limes sup. og lim inf.) er følgende: Ved partiell summasjon får vi fra (7)

$$(8)\quad \sum_{p\le x} \log p + \sum_{pq\le x} \frac{\log p \log q}{\log pq} = 2x + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big)$$

og fra dette fåes

$$(9)\quad \sum_{pq\le x} \log p \log q = \sum_{p\le x} \log p \cdot \sum_{q\le \frac{x}{p}} \log q = 2x \sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} \\ - \sum_{p\le x} \log p \sum_{qr\le \frac{x}{p}} \frac{\log q \log r}{\log qr} + O\Big(x \sum_{p\le x} \frac{\log p}{p(1+\log \frac{x}{p})}\Big)$$

$$= 2x\log x - \sum_{pqr\le x} \frac{\log p \log q \log r}{\log qr} + O(x \log\log x)$$

$$= 2x\log x - \sum_{qr\le x} \frac{\log q \log r}{\log qr} \psi(\tfrac{x}{qr}) + O(x\log\log x)$$

(7) kan også skrives ved enkel omform

(10) $\vartheta(x)\log x = 2x\log x - \sum_{p\le x}\log p\,\vartheta\left(\frac{x}{p}\right) + O(x)$

og hvis 2 net ledd i (7) erstattes av (9);

(11) $\vartheta(x)\log x = \sum_{pq\le x}\frac{\log p\log q}{\log pq}\,\vartheta\left(\frac{x}{pq}\right) + O(x\log\log x)$

Nu innfores i (10) og (11); R istedet for ϑ ved (2). Dette gir efter enkle oppskattninger

(10') $R(x)\log x = -\sum_{p\le x}\log p\,R\left(\frac{x}{p}\right) + O(x)$

og

(11') $R(x)\log x = \sum_{pq\le x}\frac{\log p\log q}{\log pq}\,R\left(\frac{x}{pq}\right) + O(x\log\log x)$

Herav

(12) $2|R(x)|\log x \le \sum_{p\le x}\log p\left|R\left(\frac{x}{p}\right)\right| +$

$+ \sum_{pq\le x}\frac{\log p\log q}{\log pq}\left|R\left(\frac{x}{pq}\right)\right| + O(x\log\log x).$

Hvorav ved partiell summasjon,

$2|R(x)|\log x \le \sum_{n\le x}\Big\{\sum_{p\le n}\log p +$

$\sum_{pq\le n}\frac{\log p\log q}{\log pq}\Big\}\cdot\Big\{\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| - \left|R\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\Big\}$

$+ O(x\log\log x) \overset{\text{bruker her (8)}}{=} 2\sum_{n\le x} n\Big\{\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| - \left|R\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\Big\}$

$+ O\Big(\sum_{n\le x}\frac{n}{1+\log n}\left|R\left(\frac{x}{n}\right) - R\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\Big)$

$+ O(x\log\log x) =$

$$= 2\sum_{n\le x} |R(\tfrac{x}{n})| + \mathcal{O}\Big(\sum_{n\le x} \frac{n}{1+\log n}\,(\vartheta(\tfrac{x}{n}) - \vartheta(\tfrac{x}{n+1}))\Big)$$

$$+ \mathcal{O}\Big(x\sum_{n\le x} \frac{1}{(n+1)(1+\log n)}\Big) + \mathcal{O}(x\log\log x) =$$

$$= 2\sum_{n\le x} |R(\tfrac{x}{n})| + \mathcal{O}\Big(\sum_{n\le x} \frac{1}{1+\log n}\,\vartheta(\tfrac{x}{n})\Big)$$

$$+ \mathcal{O}(x\log\log x) = 2\sum_{n\le x} |R(\tfrac{x}{n})| + \mathcal{O}(x\log\log x)$$

Slik at:

$$(13)\quad |R(x)| \le \frac{1}{\log x}\sum_{n\le x} |R(\tfrac{x}{n})| + \mathcal{O}\Big(x\,\frac{\log\log x}{\log x}\Big).$$

---

2. Vi henger nu nogen egenskaper ved $R(x)$. Av (3) følger ved partiell summasjon at

$$\sum_{n\le x} \frac{R(n)}{n^2} = \log x + \mathcal{O}(1)$$

hvorav

$$\sum_{n\le x} \frac{R(n)}{n^2} = \mathcal{O}(1)$$ eller for vilkårlige $a_1, a_2 > 1$,

$$\Big|\sum_{a_1\le n\le a_2} \frac{R(n)}{n^2}\Big| < K$$

hvor K er absolutt positiv konstant.

Av dette følger, at hvis $R(n)$ ikke skifter tegn i intervallet, må der være et a' med $a_1 \le a' \le a_2$, og

$$(14)\quad \Big|\frac{R(a')}{a'}\Big| < \frac{K'}{\log\frac{a_2}{a_1}}$$

hvor K' er abs. pos. konst. Siden $R(n)$

er praktisk talt kontinuerlig (endrer sig høist om $\lg n$ når n vokser med 1) ser man lett at (14) holder alltid også om $R(x)$ skifter fortegn, altså altid.

La $\delta > 0$ være et vilkårlig ~~fast~~ tall < 1. Da vil ifølge (14) ethvert interval av formen $(x, e^{\frac{K'}{\delta}} x)$ med $x > 4$ inneholde et y, med

(15) $$|R(y)| < \delta y$$

Av (8) fåes for $y < y'$

$$0 \leq \sum_{y < p \leq y'} \lg p \leq 2(y' - y) + O\left(\frac{y'}{\lg y'}\right).$$

hvorav enkelt fåes

$$|R(y') - R(y)| \leq |y' - y| + O\left(\frac{y'}{\lg y'}\right)$$

Herav sees at om $\frac{y}{2} \leq y' \leq 2y$ vil

$$|R(y') - R(y)| \leq |y' - y| + O\left(\frac{y'}{\lg x}\right)$$

og fra (15)

$$\left|\frac{R(y')}{y'}\right| \leq \delta \frac{y}{y'} + \left|1 - \frac{y}{y'}\right| + \frac{K''}{\lg x}$$

hvor K'' er abs. pos. konst. Herav for $x > e^{\frac{K''}{\delta}}$, og $e^{-\frac{\delta}{2}} \leq \frac{y}{y'} \leq e^{\frac{\delta}{2}}$

$$\left|\frac{R(y')}{y'}\right| < 4\delta \quad \text{eller} \quad |R(y')| < 4\delta y'$$

Av dette ser vi at for $x > e^{\frac{k''}{\delta}}$ inneholder ethvert intervall $(x, e^{\frac{k'}{\delta}}x)$ et del-intervall $(y_1, e^{\frac{\delta}{2}}y_1)$ slik at for $y_1 \le z \le e^{\frac{\delta}{2}}y_1$ har vi $|R(z)| < 4\delta z$.

3. Resten av primtallsats. Vi vil bevise at $\lim_{x\to\infty} \frac{|R(x)|}{x} = 0$ hvilket er ekvivalent med primtallsatsen.

Vi har at

(16) $|R(x)| < Bx$ for $x \ge 1$

hvor B er en abs. pos. konst.

Anta nu at for et positivt $\alpha < 8$ har vi

(17) $|R(x)| < \alpha x$ for $x > x_0$

Vi velger nu $\delta = \frac{\alpha}{8}$ og kaller $e^{\frac{k'}{\delta}}$ for ρ, videre har vi anta at $x_0 > e^{\frac{k''}{\delta}}$.

Da har vi ifølge formen ovenfor at ethvert intervall $(x, \rho x)$ med $x > x_0$ inneholder et del intervall $(y, e^{\frac{\delta}{2}}y)$ hvor slike at $|R(z)| < \frac{\alpha}{2} z$ hvis z tilhører dette del-intervallet

Nu gir (13) med (16), (17) og det
øvrige resultat at.

$$|R(x)| \le B \frac{x}{\log x} \sum_{\frac{x}{x_0} \le m \le x} \frac{1}{m} + \frac{1}{\log x} \sum_{m \le \frac{x}{x_0}} |R(\tfrac{x}{m})|$$

$$+ O(\tfrac{x}{\sqrt{\log x}}) < O(\tfrac{x}{\log x} \log x_0) + \frac{x}{\log x} \sum_{m \le \frac{x}{x_0}} \frac{1}{m} \left|\tfrac{m}{x} R(\tfrac{x}{m})\right|$$

$$+ O(\tfrac{x}{\sqrt{\log x}}) < \frac{\alpha x}{\log x} \sum_{m \le \frac{x}{x_0}} \frac{1}{m} -$$

$$- \frac{\alpha x}{2 \log x} \sum_{\rho^\nu \le \frac{x}{x_0}} \sum_{e^{-\frac{\delta}{2}} \rho^\nu \le m \le \rho^\nu} \frac{1}{m} + O(\tfrac{x}{\sqrt{\log x}}) =$$

$$= \frac{\alpha x}{\cancel{m}} - \frac{\alpha \delta x}{4 \log x} \frac{\log \frac{x}{x_0}}{\log \rho} + O(\tfrac{x}{\sqrt{\log x}})$$

$$= \alpha \left(1 - \frac{\delta}{4 \log \rho}\right) x + O(\tfrac{x}{\sqrt{\log x}})$$

$$= \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{256 K'}\right) x + O(\tfrac{x}{\sqrt{\log x}}) <$$

$$< \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{300 K'}\right) x \quad \text{for } x > X_1$$

Sammenlignes dette med (17) ser man
da iterasjonen $\alpha_{n+1} = \alpha_n \left(1 - \frac{\alpha_n^2}{300 K'}\right)$
konvergerer mot null, at
$\frac{|R(x)|}{x} \to 0$ hvs. ah. bev. atte.

VIII

Biografi i Norsk Biografisk leksikon.

Selberg, Atle, 1917 - , matematiker, sønn av rektor Ole Michael Ludvigsen Selberg, født i Langesund 14.6.1917. Gift i Stockholm 13.8.1947 med Hedvig Liebermann, født i Târgu-Mures, Siebenbürger (nå i Romania) 20.11.1919, datter av møbelfabrikant Luzar Liebermann og Serena Sarolta Jakobovits, død 6.7.1995. Gift igjen 14.2.2003 i Princeton Township med Betty Frances Compton, født 24.11.1929.

Atle Selbergs interesse for matematikk ble meget tidlig vakt. Både hans far og to eldre brødre var matematikere, og dette virket nok som en sterk stimulans på ham. Også farens matematiske bibliotek – som nå tilhører NTNU – hevder han selv betød mye for hans utvikling som matematiker. Allerede som 15-åring behersket han integralregning og rekketeori, noe som vises av en løsning på en oppgave som han sendte inn til Norsk Matematisk Tidsskrift i 1932.

Han tok eksamen artium i 1935, og begynte så å studere realfag ved Universitetet i Oslo. Han ble cand.real i 1939 med matematikk som hovedfag. Som 19-åring publiserte han et arbeide om aritmetiske identiteter. Det var spesielt tallteori som Selberg var tiltrukket av, og dens sammenheng med kompleks og harmonisk analyse. På den skandinaviske matematiker-kongress i Helsinki i 1938 holdt han foredrag om Fourier-utviklinger av modulære former.

I 1943 ble Selberg dr. philos ved Universitetet i Oslo med avhandlingen "On the zeros of Riemann's zeta-function". Hans doktorgradsarbeide var om Riemann-hypotesen og vakte stor oppmerksomhet. Det dannet også grunnlaget for hans internasjonale berømmelse. Riemann-hypotesen sier at alle ikke-trivielle nullpunkter til Riemanns zeta-funksjon har realdel ½. Det var kjent at på den "kritiske" linjen med realdel lik ½ i det komplekse plan, må der i alle fall ligge uendelig mange nullpunkter. Det var et stort framskritt da Selberg viste at en positiv brøkdel av alle nullpunktene må ligge på denne linjen. Riemann-hypotesen er fortsatt et av matematikkens store uløste problemer. I desember 2003 ga Selberg i en samtale uttrykk for at han alltid har ment at Riemann-hypotesen må være korrekt – "om ikke av annet, så av rent estetiske grunner". Videre uttrykte han: "Om noe er riktig i vårt univers, så måtte det være Riemann-hypotesen".

Primtallsetningen gir et asymptotisk estimat for antall primtall opp til en viss størrelse. Den ble først vist ved hjelp av kompleks funksjonsteori, og mange eksperter mente at det var umulig å gi et elementært bevis uten bruk av komplekse funksjoner. Selberg lyktes i 1948 å gi det første elementære bevis for primtallsetningen. Dette vakte igjen stor oppsikt i den matematiske verden, og det oppstod også en prioritetsstrid med ungareren Paul Erdös, som også publiserte et bevis. Hovedideen i beviset er Selbergs, og i hans publiserte versjon unngår han helt Erdös' resultat. På denne tiden var det at Selberg utviklet sin soldmetode til bruk i primtallteorien.

For disse resultater ble Selberg i 1950 tildelt Fieldsmedaljen – matematikkens høyeste utmerkelse den gang.

Etter andre verdenskrig dro Selberg til USA. I 1947-48 var han medlem av The Institute for Advanced Study i Princeton hvor også Albert Einstein og mange andre vitenskapelige berømtheter arbeidet. I 1948-49 var han professor ved Syracuse University, og 1949 ble han fast professor ved The Institute for Advanced Study – en stilling han hadde fram til 1987 – da han ble professor emeritus.

I begynnelsen av 1950-årene kom igjen et nytt og uhyre dyptliggende resultat fra Selberg, nemlig hans nå så berømte "sporformel" – et resultat som har hatt store ringvirkninger i matematikk og teoretisk fysikk. Her kombinerer Selberg en rekke matematiske områder som automorfe former, grupperepresentasjoner, spektralteori og harmonisk analyse. Selberg var den første som forstod betydningen av bruken av spektralteorien til automorfe former i studiet av klassiske problem i tallteori. Selbergs sporformel regnes av mange som et av de betydeligste matematiske resultater i forrige århundre.

I 1986 ble Selberg tildelt den meget prestisjefylte israelske Wolf-prisen. Ved utdelingen av denne ble det uttalt: "Hans bidrag er så dype og så mange at hans navn allerede er en del av matematikkens historie." Da han i 1987 fylte 70 år ble det holdt et stort internasjonalt symposium til hans ære ved Universitetet i Oslo. Han ble ved denne anledning utnevnt til Kommandør med stjerne av St. Olavs Orden. I perioden 1988-91 var han knyttet til Stanford University, og i perioden 1991-94 var han gjesteforeleser ved Universitetet i Oslo.

Han er æresdoktor ved Universitetet i Trondheim (nå NTNU) fra 1972 og ved Universitetet i Oslo fra 1994. Ved 200-års jubileet for N.H. Abels fødsel ved Universitetet i Oslo i 2002 ble han tildelt en spesiell Abel ærespris før den ordinære tildelingen startet i 2003.

Atle Selberg har gitt fundamentale og dype bidrag til matematikken. Hans arbeider er preget av enorm skarpsindighet, originalitet og intellektuell utholdenhet. Internasjonalt er han meget høyt respektert, og han regnes som en av det 20 århundres mest betydelige matematikere.

Selberg er medlem av Det Norske Videnskaps-Akademi (1946), American Academy of Arts and Sciences, Boston, Mass (1960), Det Kongelige Danske Videnskabernes, Selskab, Foreign Member (1967), Kungliga Svenska Vetenskaps Akademien (1979), Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab (1977), Indian National Science Academy (1981), Honorary Member of London Mathematical Society (1985), Honorary Member of Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (ca. 1985).

Nils. A. Baas

Referanser: Diverse private kilder og samtaler, K.E. Aubert, Wolf-prisen til Atle Selberg, Normat, 34 (3), 1986, 127- 29.

TALLENES HERRE

En av Norges mest betydelige vitenskapsmenn gjennom alle tider,matematikeren Atle Selberg, fyller 90 år den 14 juni. Internasjonalt regnes Selberg som en av det forrige århundres store matematikere.Hans bidrag til matematikken er så dype og så mange at hans navn allerede er en del av matematikkens historie. Selbergs spesialområde i matematikk er tallteori.

Selberg ble født i Langesund, og vokste opp på Voss og Nestun ved Bergen. Han gikk på gymnaset på Gjøvik.Allerede som 12 åring studerte han bifagsforelesningene ved Universitetet i Oslo,og som 15 åring skrev han en liten note i Norsk Matematisk Tidsskrift. Han studerte deretter ved Universitetet i Oslo, hvor han i 1939 ble cand.real., og høsten 1942 forsvarte han der sin doktorgrad.

Hans doktorgradsarbeide var om Riemann hypotesen som fortsatt er et av matematikkens store uløste problemer.Denne hypotesen gir uhyre dyp informasjon om primtallenes fordeling. Selbergs resultater vakte stor oppmerksomhet,og dannet grunnlaget for hans internasjonale berømmelse.

I 1947 dro Selberg til Institute for Advanced Study i Princeton i USA. Dette er en av verdens fremste forskningsinstitusjoner for teoretisk vitenskap. På denne tiden var Albert Einstein medlem, likeså logikeren Kurt Gødel, og Robert Oppenheimer var direktør. Selberg ble i 1949 fast professor der – en stilling han hadde fram til 1987 ,da han ble professor emeritus.

I 1948 lyktes det Selberg å gi det første elementære bevis for primtallsetningen som gir et estimat for antall primtall opp til en viss størrelse.Dette var en sensasjon.Selbegs soldmetode for studiet av primtall har senere vært av fundamental betydning for den videre utvikling av tallteorien.

I begynnelsen av 1950 årene kom igjen et nytt og uhyre dyptliggende resultat fra Selberg, nemlig hans nå så berømte sporformel – et resultat som har hatt store ringvirkninger i matematikk og teoretisk fysikk.Her kombinerer Selberg en rekke matematiske områder på en uhyre intrikat måte.Selbergs sporformel regnes av mange som et av de betydeligste matematiske resultater i forrige århundre. Andrew Wiles' berømte bevis for Fermats Siste Teorem gjør vesentlig bruk av Selbergs sporformel.

Atle Selberg nyter en enorm respekt i den internasjonale matematiske verden. Hans resultater er matematiske perler! Hans arbeider er preget av enorm skarpsindighet, originalitet og intellektuell utholdenhet. Han er også kjent for sine klare meninger, og når han uttaler seg om noe, er det omtrent som hans budskap er meislet med store bokstaver i norsk granitt!

Selberg er tildelt følgende meget prestisjefylte priser: i1950 Fields-medaljen i matematikk, i 1986 den israelske Wolf-prisen og i 2002 Abels Ærespris. Han er Kommandør med stjerne av St.Olavs Orden.

Hans forhold til Norge har alltid vært nært,og hans norsk bærer intet preg av 60 år i utlendighet. Han nyter å snakke norsk og lese norsk litteratur.
Norge og norsk vitenskap bør være uhyre stolte av Atle Selberg, og derfor hedre ham på denne åremålsdagen.

Addresse for dagen: 7 Maxwell Lane, Princeton, NJ 08540,USA.

Nils A. Baas
Institute for Advanced Study, Princeton, USA

Aftenposten, Adresseavisen, Agderposten 14.06. 2007

Speech given at the Reception in hour of Atle Selberg on the occasion of his 90th birthday in Fuld Hall at the Institute for Advanced Study in Princeton on June 7, 2007

By Nils A. Baas

I have been asked to convey some greetings from Norway to you at this occasion. First, from the Minister of Research and Education – Oystein Djupedal - he sends you this letter of congratulations. Also the Norwegian Ambassador in Washington – Knut Vollebaek – sends his congratulations in a personal letter to you.
Furthermore, I have been asked to bring forward greetings and congratulations from the Norwegian Mathematical Society and The Royal Norwegian Society of Sciences and Letters.

Dear Atle,

Norway and Norwegian mathematicians are very proud of you and your mathematical achievements. Norway is a small country with long and proud mathematical traditions going back to Abel, Lie, Sylow, Thue, Skolem and Brun. Now you are one of the giants in this garden of mathematical trees.

We all admire your uncompromisable honesty and clarity when you express your opinions, it is as if you are carving the message with capital letters in Norwegian granite. When you characteristically raise your hand, we know there is no room for debate.

I have been asked if you still speak Norwegian! I can assure you all that Atles Norwegian is far better than most of the language spoken in Norway today!

Your love of Norway has always been very deep. This reminds me of an episode many years ago. This was the summer of 1974. We were visiting the Institute and staying for the summer. You were soon to leave for Norway in order to visit your brother Sigmund in his cabin in the beautiful Hardangerfjord . We were sitting in this room chatting just after teatime. The temperature was in the high nineties, so was the humidity and outside it rained cats and dogs. You looked out of the window and commented in your special cryptic way:

"Actually, I prefer the rain in Norway"

To me this sounded like the deepest declaration of love to your home country that anyone could give!

Ladies and gentlemen, may I ask you to join me in a toast to:

"Atle Selberg – a great Norwegian".

ATLE SELBERG TIL MINNE

Vår store matematiker Atle Selberg døde 6 august 2007 i sitt hjem i Princeton, New Jersey, USA, etter kort tids sykeleie. Med ham er en av det forrige århundres største matematikere gått bort.Hans bidrag til matematikken er så dype og så mange at hans navn allerede er en del av matematikkens historie. Hans matematiske spesialområde var tallteori.

Selberg ble født i Langesund 14 juni 1917, og vokste opp på Voss og Nesttun ved Bergen. Han gikk på gymnaset på Gjøvik.Han vokste opp i en familie med matematikere.Hans far var lektor og hadde doktorgrad i matematikk, og hans to eldre brødre - Henrik og Sigmund – ble professorer i matematikk.Allerede som 12 åring studerte han bifagsforelesningene ved Universitetet i Oslo,og som 15 åring skrev han en liten note i Norsk Matematisk Tidsskrift. Han studerte deretter ved Universitetet i Oslo, hvor han i 1939 ble cand.real., og høsten 1943 forsvarte han der sin doktorgrad.

Hans doktorgradsarbeide var om Riemann-hypotesen som fortsatt er et av matematikkens store uløste problemer.Denne hypotesen gir uhyre dyp informasjon om primtallenes fordeling. Selbergs resultater vakte stor oppmerksomhet,og dannet grunnlaget for hans internasjonale berømmelse.

I 1947 dro Selberg til Institute for Advanced Study i Princeton i USA. Dette er en av verdens fremste forskningsinstitusjoner for teoretisk vitenskap. På denne tiden var Albert Einstein medlem, likeså logikeren Kurt Gødel, og Robert Oppenheimer var direktør. Selberg ble i 1949 fast medlem og i 1951 professor der – en stilling han hadde fram til 1987,da han ble professor emeritus.

I 1948 lyktes det Selberg å gi det første elementære bevis for primtallsetningen som gir et estimat for antall primtall opp til en viss størrelse.Dette var en sensasjon.Selberg benyttet her sin såldmetode som senere har vært av fundamental betydning for utviklingen av tallteorien.

I begynnelsen av 1950 årene kom igjen et nytt og uhyre dyptliggende resultat fra Selberg, nemlig hans nå så berømte sporformel – et resultat som har hatt store ringvirkninger i matematikk og teoretisk fysikk.Her kombinerte Selberg en rekke matematiske områder på en uhyre intrikat og dyp måte.Selbergs sporformel regnes av mange som et av de betydeligste matematiske resultater i forrige århundre. Andrew Wiles' berømte bevis for Fermats Siste Teorem gjør vesentlig bruk av Selbergs sporformel.

Selberg ble tildelt følgende meget prestisjefylte priser:Fields-medaljen i matematikk (1950), den israelske Wolf-prisen (1986) og Abels Ærespris (2002). Han var Kommandør med stjerne av St.Olavs Orden.

Atle Selberg nøt en enorm respekt i den internasjonale matematiske verden.Hans resultater er matematiske perler.Hans arbeider er preget av enorm

skarpsindighet,originalitet og intellektuell utholdenhet. Han var i besittelse av en naturlig og imponerende faglig autoritet som gjorde at man over alt lyttet med den største oppmerksomhet til hans ord.

Selv om han bodde 60 år av sitt liv i USA stod Norge alltid hans hjerte nær. Norsk natur, språk og litteratur satte han alltid stor pris på.
Norge har mistet en av sine største vitenskapsmenn gjennom alle tider.

Nils A.Baas
Institutt for Matematiske Fag
NTNU
7491 – Trondheim

Email:baas@math.ntnu.no

Aftenposten, august 2007

ATLE SELBERG (1917 – 2007)

The renowned Norwegian mathematician Atle Selberg died on August 6, 2007, at his home in Princeton, New Jersey, USA. He was 90 years old.

Atle Selberg was one of the greatest mathematicians of the 20th century. His contributions to mathematics are so deep and original that his name will always be an important part of the history of mathematics. His special field in mathematics was number theory in a broad sense.

Selberg was born on June 14, 1917, in Langesund ,Norway. He grew up near Bergen and went to high school at Gjøvik. His father was a high school teacher with a doctoral degree in mathematics, and two of his older brothers – Henrik and Sigmund – became professors of mathematics in Norway. Already when he was 12 years old he studied mathematics at the university level. When he was 15 he published a little note in Norsk Matematisk Tidsskrift.

He studied at the University of Oslo where he obtained the cand.real. degree in 1939 and in the fall of 1943 he defended his thesis which was about the Riemann Hypothesis. At that time there was little numerical evidence supporting the Riemann Hypothesis. By his new techniques Selberg proved that a positive fraction of the zeros must lie on the critical line. This result led to great international recognition.

After the war Carl Ludwig Siegel, who had stayed in the USA, asked Harald Bohr what had happened in mathematics in Europe during the war. Bohr answered with one word: **Selberg.** In 1947 Selberg went to the Institute for Advanced Study in Princeton in USA. At this time he had developed his famous sieve method. An application of this resulted in Selbergs Fundamental Formula which in 1948 led to an elementary proof of the Prime Number Theorem. This was a sensation since even the possibility of an elementary proof had been questioned by Hardy and other mathematicians.

For these results he was awarded the Fields Medal in 1950 – at the time the highest award in mathematics.

He became a permanent member of the Institute for Advanced Study in 1949 and a professor in 1951 – a position he held until he retired in 1987.

In the early 1950s Selberg again produced a new and very deep result, namely what is now called the Selberg Trace Formula. This result has had many important implications in mathematics and theoretical physics. Here Selberg combines many mathematical areas like automorphic forms, group representations, spectral theory and harmonic analysis in an intricate and profound manner.
Selbergs Trace Formula is by many mathematicians considered as one of the most important mathematical result in the 20th century.

In 2003 Selberg was asked whether he thought the Riemann Hypothesis was correct. His response was: "If anything at all in our universe is correct, it has to be the Riemann Hypothesis, if for no other reasons, so for purely esthetical reasons."

In addition to the Fields Medal (1950), Selberg received the Wolf Prize in 1986 and an honorary Abel Prize in 2002 prior to the regular awards. He was also a member of numerous academies.

Atle Selberg was highly respected in the international mathematical community. He possessed a natural and impressive authority that made every one listen to him with the greatest attention.
He loved his home country Norway and always spoke dearly of Norwegian nature, language and literature. In 1987 he was named Commander with Star of the Norwegian St. Olav Order.

Norway has lost one of her greatest scientists of all time.

Nils A. Baas
Dept. of Mathematical Sciences
NTNU
N – 7491 Trondheim
Norway

Email:baas@math.ntnu.no

European Mathematical Newsletter, September 2007

THE LORD OF THE NUMBERS

Speech at the Atle Selberg Memorial at the Institute for Advanced Study, Princeton, 12 January 2008.

By

Nils A. Baas

Dear Family and Friends of Atle.

Let us go back in time, to the mid 1920s.We are in Norway near Bergen. On a field there are some boys playing a ball game, and this ball game is of such a nature that they have to take turns and then wait. One of the boys finds this waiting time rather boring, so he tries to entertain himself by squaring numbers:
One squared, two squared, three squared etc. Then he gets an idea – what about taking differences: one squared minus zero squared equals one, two squared minus one squared equals three, three squared minus two squared equals five, etc. and he concludes that he always gets an odd number. He has not yet learned about mathematical symbols so he treats the general case like: number plus one squared minus number squared equals two times number plus one! Furthermore, by adding all these differences he discovers that the sum of consecutive odd numbers is always a square! This is quite a remarkable discovery for a 7 year old boy! The name of this little boy is Atle – Atle Selberg.

In November 2005 my colleague Christian Skau and I interviewed Atle at length about his life and mathematical works. When we asked him about his first mathematical discovery he told us the story I just presented. He said that this had been very important to him since it was the first time he discovered a general mathematical pattern, and that he always felt that mathematics was about discovering patterns and relations.

At the time of the interview we could not resist commenting that when Gauss was at a similar age he was asked by his teacher to sum the numbers from 1 to 100, which he did brilliantly. We asked Atle how he would compare his discovery to what Gauss did. "What Gauss did was much better" he said, but then he added with his characteristic smile: "On the other hand no one asked me to sum the numbers from 1 to 100"!

It was clear at an early age that Atle was an exceptional mathematical talent. He studied the books in his fathers library, and at the age of 12 he studied Professor Stoermers lecture notes for the university. He told us that this book was probably the one which had influenced him most as a mathematician. But he did not like the introduction where the real numbers were introduced by Dedekind cuts. He said he felt that he had a good enough understanding of what he called the proletariat of the reals. The reals are decimal numbers, and continuing this hierarchy, the upper class is the integers and the Lords are the primes!
An excerpt of our video interview was shown on Norwegian Television with the title:

"The Lord of the Numbers"!

His first appearance in the mathematical literature was when he was 15 years old. He had a solution to a problem in Norsk Matematisk Tidsskrift where he proved the beautiful formula:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

The editor remarks that the problem was solved by a 15 year old boy. This formula decorated the top of a big layer cake when Atle's 70th birthday was celebrated at the Academy in Oslo.

He entered the University of Oslo in 1935 and was a brilliant student. He obtained his Masters degree in 1939. Before the Second World War came to Norway in 1940, he had done important work on partition functions and the Rankin-Selberg convolution. Immediately after the German invasion of Norway on 9 April 1940 he joined the Norwegian forces, who made considerable resistance in Gudbrandsdalen and made it possible for the King and Government to escape and get to England. Hence, Norway never surrendered due to these brave forces! But the Norwegian forces had to give up after some time, and Atle was arrested. He was soon released, and went back to the university to work on his thesis.

This is the time when he got the idea of studying the zeros of the Riemann zeta-function as a kind of moment problem, and this led to his famous estimate of the number of zeros. In his own words: "I studied the work of Hardy and Littlewood and discovered what was wrong in their approach and what they had misunderstood". This was the major result of his thesis which he defended in the fall of 1943 – one month before the university was closed by the Germans. Again he was arrested, but released with the order to go home to his parents.

In connection with the defense of his thesis he had to give a lecture on Abels "addition theorem" – suggested by the committee. In 2002 he received an Honorary Abel Prize.In the letter he wrote thanking for the prize he writes that Abel's theorem and the short proof that Abel gave gave in a two page article shortly before his death at age 26, was to him like pure magic. In the works of Gauss, Riemann or other mathematicians he had found nothing comparable. In the interview he said: " In my opinion there is nothing like it in the mathematical literature, such an important and far-reaching theorem proved with such simple tools. It is still for me like pure magic".

During the summer of 1946 he realized that his work on the Riemann zeta-function could be applied to estimate the number of primes in an interval. This was the beginning of the development leading to the famous Selberg sieve-method. After he came to the Institute in 1947 he continued to work along these lines and in the spring of 1948 he proved the Selberg Fundamental Formula which later on was the key to the proof of the Prime Number Theorem. Atle always preferred to work on his own at his own pace, but on this

occasion his work was interrupted by others, and a controversy with Paul Erdoes arose about the proof of the PNT. Atle never talked much about this, nor did he ever after this lecture on his famous proof of the PNT, but in the interview in 2005 he gave for the first time his complete account of the events around the proof of the PNT in 1948. This will soon be published.

In 1950 he received the Fields Medal. At this time he came across a paper by Hans Maass on differential operators and he realized that he could use some ideas related to his Master Thesis in this connection. Typically he remarks: " I was more inspired by what Maass did not do, than by what he had done". This was the beginning of the work that led to his famous Trace Formula which he considered his most important mathematical achievement. The basic results were obtained in 1953 and presented in Goettingen in 1954, and in a more comprehensive form at the Tata Institute in India in 1956.

For the rest of his life he continued to work on his favorite subjects: sieve-methods, zeta-functions and the Trace Formula. From time to time he was seriously working on the Riemann hypothesis.
At the time of his thesis there was not much numerical evidence in favour of it, but Atle said he never doubted that it was true. Once he said to me: "Many things in our universe are wrong, but if anything at all is correct, it has to be the Riemann hypothesis".

After a lecture in Trondheim in the eighties he gave a list of problems he felt were important. I asked him then, that if the Good Lord would offer him a solution to one of them, which one would he choose. "Without any doubt the Riemann hypothesis", he said, "I would not like to have the complete solution, but a small clue would be nice!"

I met Atle for the first time in 1972 when I came to the Institute as a young Member. We soon became very good friends, and for the rest of their lives my wife Vivian and I had a very close relationship to Hedi and Atle, and later also to Mickey.
Atle was very relaxed with respect to his own time. Once Vivian met him in the morning at the Princeton Shopping Center, and he explained why he was there: " I do the shopping, because Hedi has a job!"
Atle visited us many times in Trondheim, and he loved to be served halibut and Norwegian layer cake "heavily soaked with sherry"!

I discussed all kinds of subjects with Atle. In mathematics it was an advantage for me to be in a different field, since he would then explain his thoughts in a more elementary way. He did not like fat books and big papers! He told me that he considered himself an amateur compared to some of his colleagues. He wanted to work on his own, penetrating the problems by his own thinking and at his own pace. His knowledge outside of mathematics was extremely impressive, in botany, zoology, history, geography and many other subjects as well, and his memory was hard to beat!

Atle had very high standards both in his professional work and other activities. He had very clear and well founded opinions, and when asked about something you could always be certain to get his honest opinion without any unnecessary wrapping. Hedi once told

Vivian and me: "There is one thing that Atle is incapable of – lying!" What a wonderful statement from a spouse.

Atle was a true Norwegian. He loved Norway – the nature, the language and the culture. He spent 60 years in the US, but sometimes I felt that his mind never left Norway! He visited Norway regularly, and he was a great inspiration for younger Norwegian mathematicians. We were all very proud of Atle being a Norwegian!

When alone, we always spoke Norwegian. In connection with the celebration of his 90th birthday Atle initially did not want any reception. Peter Sarnak and I tried to pursuade him during a lunch, but our attempt was inconclusive. I went home to Atle and suggested that a reception in his honour would be nice. First he nodded willingly, but then he switched to English and objected to the plans. I managed to get the conversation back into Norwegian and then he agreed swiftly. Language is a subtle thing!

We often discussed Norwegian literature, especially poetry. We both liked the Norwegian poet Tor Jonsson, and one of his poems I showed to Atle, and to me it offers a symbolic characterization of his life and work.
I think it would be in Atle's spirit to present it in Norwegian - on the left, and I offer a non-poetic translation on the right:

Å DIKTE.	TO COMPOSE
Å dikte er å vera det vesle some ein vart og sleppe kvite fuglar ut i nattesvart	To compose is to be the little you were created as and let white birds out in the dark night.
Å leva er å vera det store som ein er og stå i einsleg undring og høyre fuglar flyge inn frå ukjend verd.	To live is to be the great thing that you are and stand alone and wonder and hear birds fly in from unknown worlds.

Atle was indeed a lonely wonderer and a great human being. With Atle gone, the world has lost one of its greatest mathematicians, Norway one of her greatest sons and we have all lost a good and dear friend. But his spirit and work will continue to live in us and in generations to come!

MINNETALE OVER ATLE SELBERG (1917–2007)

Det Norske Videnskaps-Akademi, 14. februar 2008

Ved

Nils A. Baas

Preses, Ærede Forsamling.

La oss gå tilbake i tid, til midten av 1920-årene. På Nesttun utenfor Bergen er der en flokk gutter som holder på med et ballspill. Det går på omgang, og dermed blir det en del ventetid. En av guttene finner dette nokså kjedelig, og prøver å underholde seg selv ved å kvadrere tall.

En kvadrat, to kvadrat, tre kvadrat etc. Da får han en ide — hva med å se på differansene:

En kvadrat minus null kvadrat er en, to kvadrat minus en kvadrat er tre, tre kvadrat minus to kvadrat er fem, fire kvadrat minus tre kvadrat er syv, etc. Han konkluderer med at hver gang får han et odde tall, men holder nå dette alltid? Han har ennå ikke lært om matematiske symboler, derfor betrakter han det generelle tilfellet som følger: tall pluss en kvdrat minus tall kvadrat blir to ganger tall pluss en — altså alltid odde! Videre adderer han alle disse differansene og finner at summen av alle odde tall opp til en viss grense er et kvadrattall! Dette er en bemerkelsesverdig oppdagelse av en 7 åring. Navnet på denne gutten er Atle — Atle Selberg.

I november 2005 intervjuet min kollega Christian Skau og jeg Atle Selberg om hans liv og matematiske virke — i alt 12 timer. Vi spurte ham om hans første matematiske oppdagelse, og da fortalte han denne historien. Han sa også at den var svært viktig for ham, da det var første gangen han oppdaget et generelt matematisk mønster, og at han alltid hadde følt at det viktigste i matematikken var å oppdage mønstre og relasjoner.

Under intervjuet kunne vi ikke motså fristelsen å nevne at da den store tyske matematiker Carl Friedrich Gauss var på samme alder, ble han bedt av sin lærer å summere tallene fra 1 til 100, hvilket han gjorde meget elegant. Vi spurte Atle om hvordan han ville sammenligne sin oppdagelse med Gauss'. "Hva Gauss gjorde var mye bedre", svarte han, men så føyde han til med sitt karakteristiske smil: "På den annen side var det aldri noen som ba meg om å summere tallene fra 1 til 100".

Atle Selberg ble født i Langesund 14 juni 1917 som den yngste av i alt 9 søsken. Faren var lektor med matematkk hovedfag. Familien flyttet til Voss like etter at Atle var født, og det var her og på Nesttun ved Bergen at han vokste opp. To av hans eldre brødre — Henrik og Sigmund — ble også professorer i matematikk.

Det var tidlig klart at Atle var et eksepsjonelt matematisk talent. Han poengterte alltid betydningen av farens bibliotek for sin utvikling. Allerede som 12 åring studerte han Carl Størmers bifagsforelesninger for universitetet. Han fortalte at denne boken var den som hadde påvirket ham mest som matematiker. Dog likte han ikke Størmers innføring av de reelle tall ved Dekindsnitt. Han hadde alltid tenkt på dem som desimaltall. Han kalte desimaltallene for proletariatet, de hele tall for overklassen og primtallene for Lordene. Da deler av vårt intervju ble vist på NRK høsten 2007, valgte vi tittlen: TALLENES HERRE og i engelsk oversttelse: THE LORD OF THE NUMBERS!

Første gang hans navn dukker opp i litteraturen, er da han som 15 åring løser et problem i Norsk Matematisk Tidsskrift(1933) hvor han viser den vakre formelen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Denne formelen utgjorde dekorasjonen på en stor bløtkake da hans 70 årsdag ble feiret her i DNVA.

Atle begynte ved Universitet i Oslo i 1935, og var en fremragende student. Han ble cand. real. i 1939. Da krigen brøt ut i april 1940, var han med i felttoget i Gudbrandsdalen, og disse styrkene forsinket tyskernes fremmarsj slik at Konge og Regjering kunne unnslippe og komme seg over til England.

På denne tiden hadde han allerede gjort betydningsfulle arbeider om partisjonsfunksjoner og Rankin–Selberg konvolusjonen. Etter at han ble løslatt fra tysk fangenskap, bestemte han seg for å begynne på noe nytt. Han fikk en ide om hvordan en på en ny måte kunne angripe Riemanns zeta-funksjon og dens nullpunkter.Her oppnådde han meget bedre resultater en hva datidens store eksperter — G. H. Hardy og J. E. Litllewood — hadde opnådd. Dette arbeidet ble hans doktorgrad, som han forsvarte høsten 1943 — en måned før universitetet ble stengt av tyskerne.

I prøveforelesningen for doktorgraden var det oppgitte emnet "Abels addisjonsteorem", som Abel ga et uhyre elegant bevis for i sin siste avhandling skrevet på Froland Verk i julen 1828, 26 år gammel og sterkt preget av sykdom. Om dette beviset skriver Selberg i sitt takkebrev for Abels Ærespris i 2002: "det har alltid stått for meg som den rene magi, hverken Gauss eller Riemann (eller noen annen) har noe som riktig kan måle seg med dette."

Den kjente matematikeren Carl Ludwig Siegel, som hadde vært i USA under krigen, spurte etter krigen Harald Bohr om hva som var nytt i europeisk matematikk. Bohr skal da ha svart med ett ord: "Selberg".

I løpet av sommeren 1946 oppdaget Selberg at hans arbeide med Riemanns zeta-funksjon kunne brukes til å estimere antall primtall i et intervall. Dette var begynnelsen til den senere så berømte Selbergs såld-metode. Etter at han i 1947 kom til The Institute

for Advanced Study i Princeton i USA fortsatte han dette arbeidet, og våren 1948 viste han det som idag kalles Selbergs Fundamental Formel som var nøkkelen til det elementære beviset for Primtallsatsen.Dette var en matematisk sensasjon på denne tiden, da ledende matematikere hadde antydet at et slikt bevis kanskje ikke fantes.Det oppstod en prioritetsstrid med ungareren Paul Erdős, som også publiserte et bevis. Hovedideen er Selbergs, og i hans publiserte versjon unngår han helt Erdős' delresultat. Selberg foretrakk alltid å arbeide alene i sin egen fart, men ved denne anledning ble hans arbeide avbrutt av andre. Han likte ikke å snakke om denne kontroversen, og foreleste aldri senere om sitt berømte bevis. Men i intervjuet vi hadde med han i 2005 gir han for aller første gang sin komplette versjon av begivenhetene rundt beviset av Primtall-setningen i 1948. Dette vil snart bli publisert.

Et primtall er et tall som kun er delig med 1 og seg selv.

Eksempler: $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53$.

f.eks. 10^9

$\pi(x) =$ antall primtall $\leq x$.

Primtall-setningen: $\boxed{\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \ , \ x \to \infty}$

Selbergs Fundamental Formel: $\sum_{p<x} \log^2 p + \sum_{pq<x} \log p \cdot \log q = 2x \log x + O(x)$.

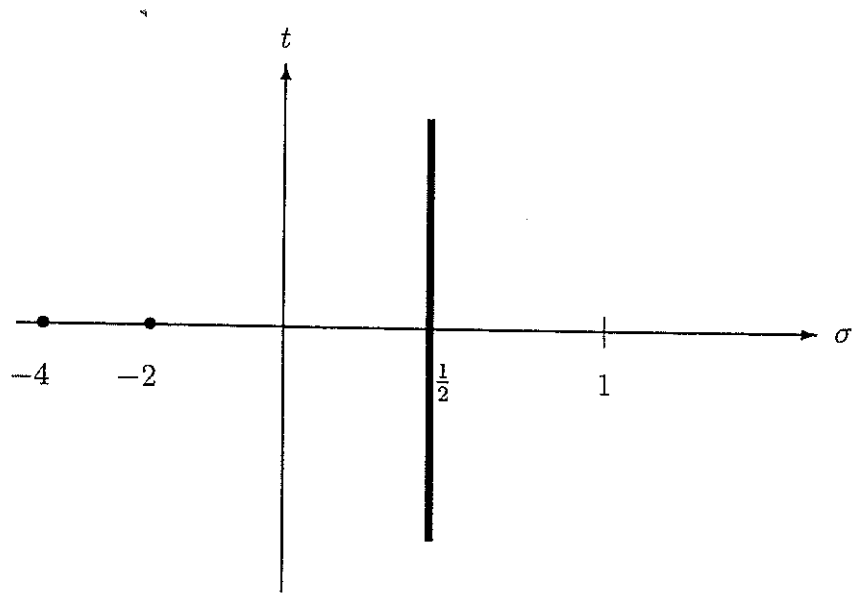
I 1950 mottok han Fields Medaljen i matematikk, og i 1951 ble han professor ved Institute for Advanved Study, en stilling han hadde frem til 1987, da han ble professor emeritus. Like etter 1950 kom han over en avhandling av tyskeren Hans Maass om differensialoperatorer, og han innså at resultatene der kunne relateres til hans hovedoppgave. Han sier selv på sin typiske måte: "Jeg ble mer inspirert av hva Maass ikke gjorde, enn hva han hadde gjort". Dette var begynnelsen til den berømte Selbergs Sporformel — et av matematikkens dypeste resultater! Her kombinerer han begreper fra mange matematiske områder pa en intrikat mäte. Han selv betraktet dette som sitt beste matematiske resultat. Det ble hovedsakelig oppnädd i 1953 og publisert i et relativt ukjent indisk tidsskrift i 1956.

Resten av sitt liv arbeidet Selberg aktivt med sine favorittområder: såldmetoder, zetafunksjoner og sporformelen. Periodevis arbeidet han seriøst med Riemann-hypotesen hvis

korrekthet han aldri betvilte.En gang sa han til meg: "Om noe er riktig i vårt univers,så måtte det være Riemann-hypotesen; om ikke av annet,så av rent estetiske grunner."

Etter en forelesning i Trondheim på 1980-tallet listet han opp en rekke problemer som han mente var viktige. Jeg spurte ham da at om Vår Herre ville tilby løsningen på et av dem, hvilket ville han velge. "Uten tvil Riemann-hypotesen", svarte han og tilføyde "jeg ville ikke ha den fullstendige løsningen,men et lite vink, hadde vært bra!"

Riemanns zeta funksjon: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$, $s = \sigma + it$.



Riemannhypotesen: $\zeta(s) = 0$ da er $s = \frac{1}{2} + it$ (vesentlige nullpunkter)

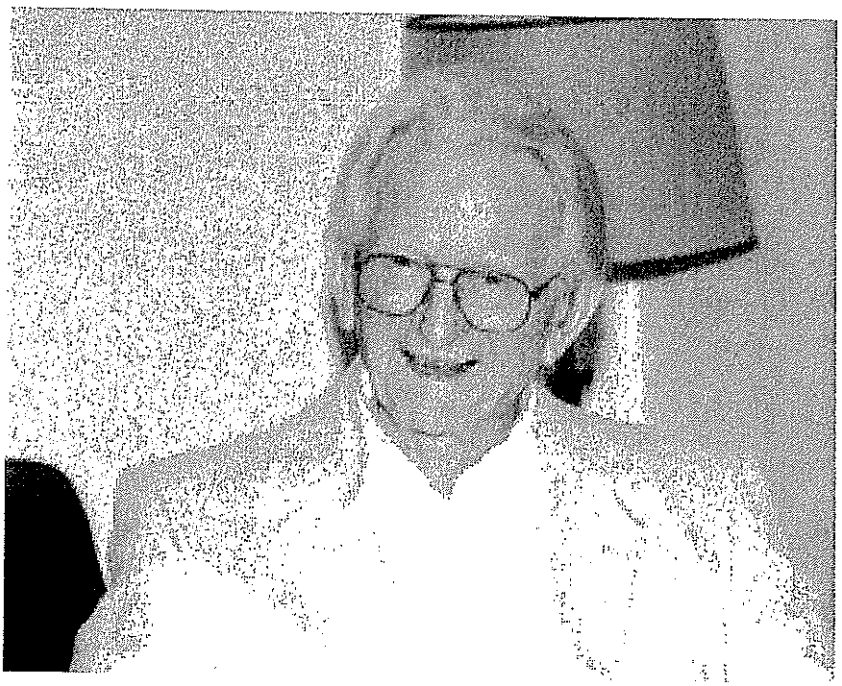
Gir informasjon om primtallenes fordeling.

Vår tids største uløste matematiske problem!

Hva er det egentlig Atle Selberg har gjort som er så viktig? Der går en rød tråd gjennom hele Atle Selbergs produksjon, nemlig primtallenes fordeling og struktur. Et primtall er et tall som bare er delelig med 1 og seg selv. Ta et vilkårlig tall x, og så spørr vi hvor mange

primtall finnes der mellom 1 og x, og er der noen struktur i deres fordeling? Dette er et av de enkleste vitenskapelige problem å formulere, men kanskje også et av de vanskeligste den menneskelige hjerne noensinne er blitt konfrontert med! Det var dette Selberg stort sett viet sitt liv til! Mange vil kanskje da spørre: kan disse primtallene være så viktige? Til det vil jeg svare at betydningen ligger i hva disse problemer genererer av tankevirksomhet med ringvirkninger til andre deler av matematikken, til anvendt matematikk og andre vitenskaper. Atle Selberg arbeidet med et av vitenskapens store lokomotiver!

I 1986 ble han tildelt den israelske Wolf-prisen, og i 2002 ble han hedret med en spesiell Abels Ærespris før den ordinære utdelingen startet i 2003. I 2002 ble han også tildelt Gunnerusmedaljen av DKNVS i Trondheim. Han var æresdoktor ved Universitetet i Trondheim (nå NTNU) fra 1972 og ved Universitetet i Oslo fra 1994. Atle Selberg var medlem av Det Norske Videnskaps-Akademi (1946), American Academy of Arts and Sciences, Boston, Mass (1960), Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab (1967), Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab (1977), Kungliga Svenska Vetenskaps Akademien (1979), Indian National Science Academy(1981), Honorary Member of Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (ca. 1985).



A. Selberg.

Jeg møtte Atle for første gang i 1972 da jeg kom til Institute for Advanced Study som ung "Member". Vi ble straks gode venner, også våre familier — et vennskap som varte livet ut. Atle hadde et meget avslappet forhold til sin egen tid og arbeide. En gang traff min

kone Vivian ham en formiddag på handletur i Princeton Shoppingcenter. Han forklarte da: "Jeg må jo gjøre innkjøpene, for Hedi (hans første kone) har en jobb". Han besøkte oss mange ganger i Trondheim, og elsket å få norsk kveite, akevitt og bløtkake!

Vi diskuterte alle slags emner. Han hadde alltid klare meninger både om matematikk og andre temaer.Han poengterte alltid at de enkleste ideer er de som vil leve videre. Han likte ikke tykke bøker og lange avhandlinger. Han fortalte meg at han betraktet seg selv som en amatør sammenlignet med flere av hans kolleger. Han foretrakk alltid å arbeide på egen hånd, og gå i dybden ved sin egen tenkning og fart. Atle hadde en sjelden naturlig autoritet og sikkerhet som gjorde at alle lyttet til ham med den største oppmerksomhet. Når der etter forelesninger var snakk om spørsmål, var gjerne hans innledende bemerkning: "No questions, but a few comments". Utenom matematikk hadde han enorme kunnskaper i botanikk, zoologi, historie, geografi og mange andre områder, og hans hukommelse var det vanskelig å slå.

Atle satte høye standarder både i sine matematiske arbeider og andre aktiviteter. Ble han spurt om noe, fikk en alltid hans klare og ærlige mening uten noen innpakning. Hedi sa en gang til Vivian og meg: "Det er en ting som Atle ikke er i stand til — å lyve". Vakrere kan det ikke sies av en ektefelle.

Atle var norsk i sinn og skinn. Han elsket Norge, naturen, språket og kulturen. Selv etter 60 år i USA talte han flytende norsk uten aksent. Hans tanker vandret ofte til Norge, han var jevnlig på besøk, og har vært en stor inspirasjon for unge norske matematikere. Vi er jo alle stolte over at Atle var norsk.

Vi diskuterte ofte norsk litteratur, særlig poesi. Vi likte begge godt Tor Jonsson, og et av hans dikt som jeg diskuterte med Atle, synes jeg gir en symbolsk karakterisering av hans liv og virke:

Å DIKTE

Å dikte er å vera
det vesle som ein vart
og sleppe kvite fuglar ut
i nattesvart.

Å leva er å vera
det store som ein er
og stå i einsleg undring
og høyre fuglar flyge inn
frå ukjend verd.

Atle var i sannhet en enslig undrer og tenker og et stort menneske. Ved hans bortgang har verden mistet en av sine aller største matematikere, Norge en av sine store sønner og mange av oss en god og nær venn. Men hans ånd og tanker vil fortsette å leve blant oss og fremtidige generasjoner.

La oss lyse fred over Atle Selbergs minne.

Referanser

1) Nils A. Baas, *Atle Selberg*, Norsk Biografisk Leksikon, vol. 8, 161–162, Kunnskapsforlaget, Oslo, 2004.

2) Nils A. Baas, *Atle Selberg (1917–2007)*, European Mathematical Society Newsletter, No. 65, September 2007.

3) A. Selberg, *Collected Papers*, volume I og II, Springer Verlag, 1989 og 1991 (heri er også en bibliografi av alle hans arbeider frem til 1991. Det er ikke registrert senere publiserte arbeider).

Nils A. Baas
Institutt for matematiske fag
NTNU
7491 Trondheim
E-post: baas@math.ntnu.no

INSTITUTE
for ADVANCED STUDY

ATLE SELBERG MEMORIAL PROGRAM
WOLFENSOHN HALL
JANUARY 11-12, 2008

Friday, January 11

SCIENTIFIC TALKS
3:00 PM - 5:30 PM
Kannan Soundararajan • John Friedlander

Saturday, January 12

SCIENTIFIC TALKS
10:30 AM - 12:30 PM

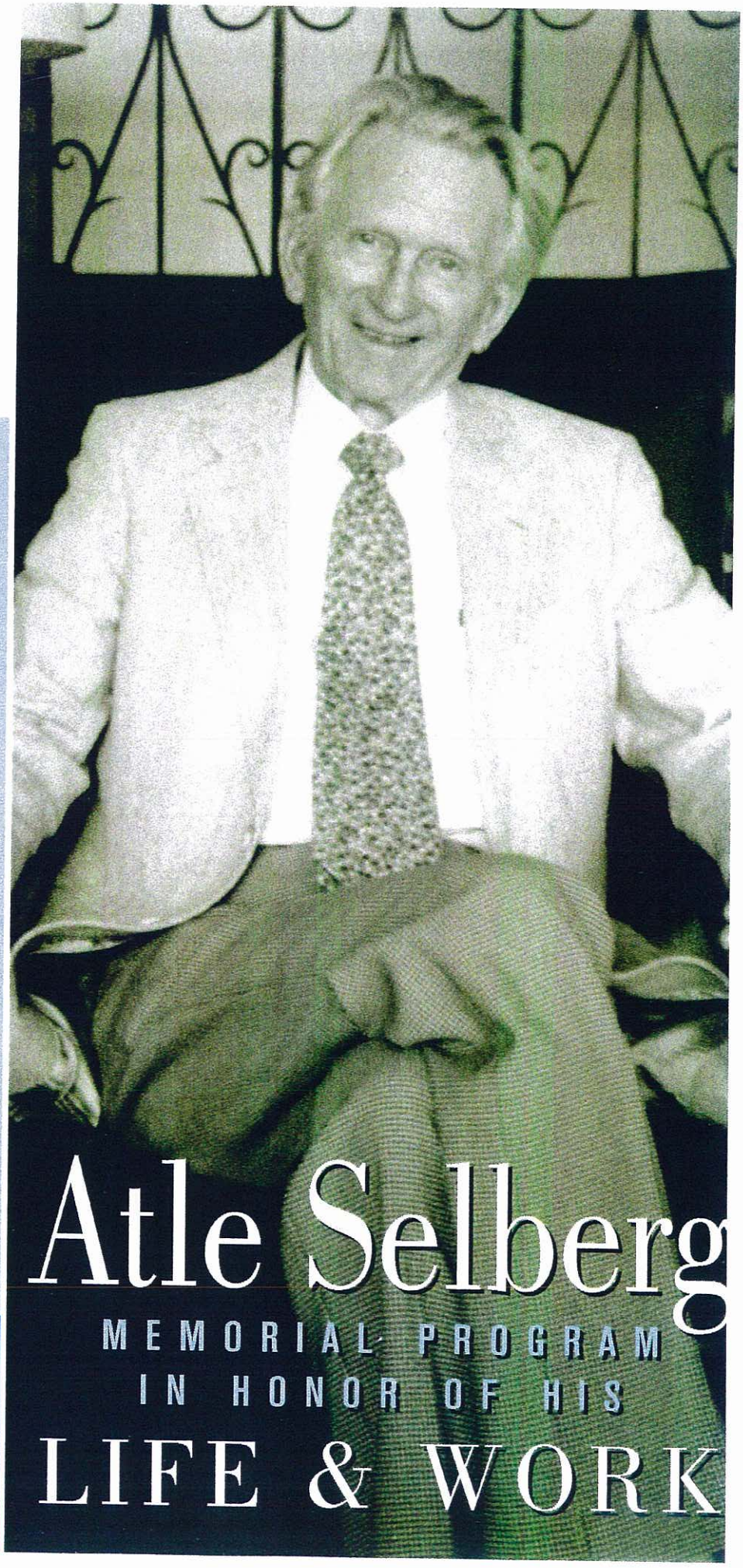
Robert Langlands, Moderator
Henryk Iwaniec • James Arthur
Peter Sarnak

LIFE AND WORK
2:00 PM - 5:30 PM

Lecture by Enrico Bombieri
Nils Baas • Brian Conrey • Dorian Goldfeld
Dennis Hejhal • Kai-Man Tsang
Members of the Selberg Family

RECEPTION WILL FOLLOW

For a Detailed Schedule, More Information, and to Register, Please Visit www.math.ias.edu/selberg or call 609.734.4595



Atle Selberg

MEMORIAL PROGRAM
IN HONOR OF HIS

LIFE & WORK

IX

Selberg med sin kone Betty

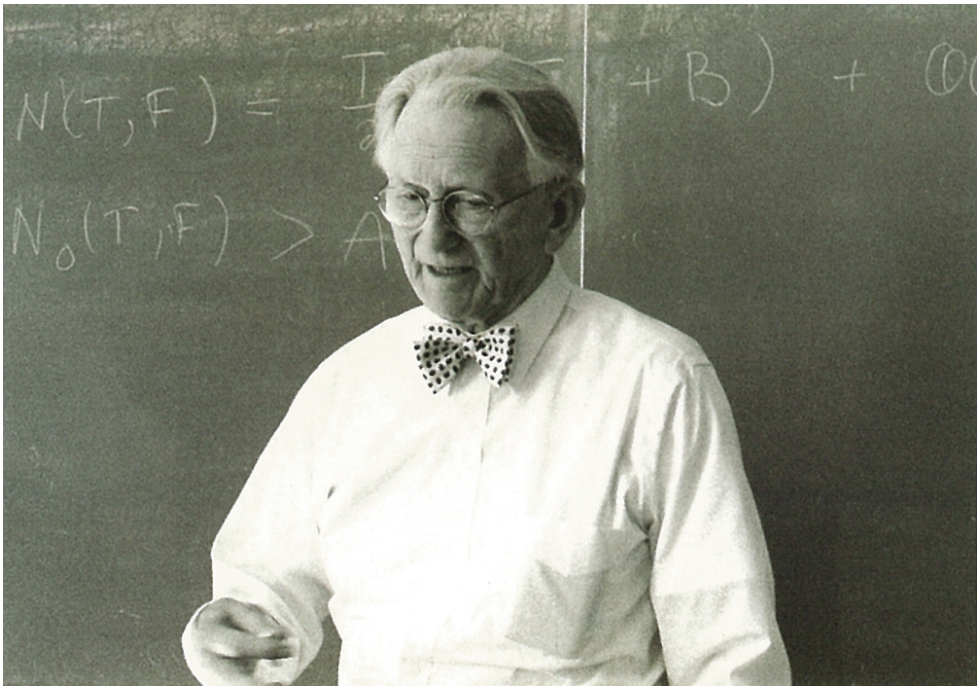
Nils A. Baas og Edvard Witten til høyre

Peter Goddard, direktør ved IAS

John Nash i samtale med Atle Selberg

Bildet tatt ved middagen på Atle Selbergs 90 årsdag 14 juni 2007.
Første rekke fra venstre: Dennis Hejhal, Atle Selberg, Nils A. Baas
Andre rekke fra venstre: John Friedlander, Peter Sarnak, Henryk Iwaniec

X



Første rekke fra venstre: Anna, Anna Kristina (mor), Hjørdis, Magnhild Maria (Maja)
Bakerste rekke fra venstre: Sigmund, Ole Michael, Henrik, Arne, Atle
Bildet er tatt på Voss i 1950-årene