Hyperbolic-elliptic systems of conservation laws

Denis Serre *

29 novembre 2004

Résumé

One strategy for proving the global existence of admissible solutions to the Cauchy problem for first-order systems of conservation laws, is to introduce a small amount of diffusion and then pass to the limit. Under some structural assumption, this task was achived by DiPerna when the diffusion is given by artificial viscosity. We showed recently that this program works also for the Jin–Xin relaxation. We prove here that it works well when the diffusion is given by a coupling with an elliptic equation. Such coupling arises in models for radiating gases.

Résumé

Une manière de démontrer l'existence de solutions globales en temps pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation, consiste à ajouter dans un premier un terme dissipatif, puis à faire tendre celui-ci vers zéro. Sous certaines hypothèses de structure, DiPerna résolut le cas de la viscosité évanescente. Nous avons traité, sous les mêmes hypothèses, la relaxation de Jin et Xin. Nous montrons ici que des idées analogues fonctionnent, pour le couplage avec une équation elliptique. Ce type de perturbation se rencontre par exemple dans les modèles de gaz radiatif.

English

We consider the Cauchy problem for first order hyperbolic systems of conservation laws :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0. \tag{1}$$

The flux $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ is a smooth vector field. Its Jacobian $\mathrm{d}f$ has, say, semi-simple real eigenvalues of constant multiplicities. The initial data is $u(x,0) = a(x)$, a bounded function.

One strategy for proving the existence of a global (as well as admissible) solution is to approach (1) by adding some diffusion term. The choice of this modification must yield an easy existence and uniqueness result. Classical exemples are the following.

Artificial viscosity.

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \epsilon \partial_x^2 u.$$

Jin–Xin relaxation.

$$\partial_t u + \partial_x v = 0, \quad \partial_t v + \alpha^2 \partial_x u = \frac{1}{\epsilon}(f(u) - v).$$

"Radiative diffusion".

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \epsilon \partial_x q, \quad -\epsilon^2 \partial_x^2 q + q = \partial_x u.$$

In the two first models, the global solution u^ϵ is obtained through a fixed point argument, where the flux $f(u)$ is considered as a source term, treated *via* the Duhamel principle (an initial data for v must be provided in relaxation). Once we know the existence of u^ϵ, one tries to prove its pointwise convergence as $\epsilon \to 0+$. If it holds true, one passes to the limit, thanks to Lebesgue dominated convergence Theorem.

DiPerna [2] first succeeded to achieve this program, applying a strategy devised by L. Tartar [15] to the vanishing viscosity. There are five key arguments.

*ENS Lyon, UMPA (UMR 5669 CNRS), 46, allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 07 ; serre@umpa.ens-lyon.fr

L^∞-estimate. Using the notion of *positively invariant domain* (PID) of Chuey & all. [1], one finds under structural assumptions a global L^∞-estimate that is independent of ϵ. Thus the sequence u^ϵ is bounded, and we may extract a subsequence that converges in the Young sense. Then we focus to the study of the limit Young measure $(\nu_{x,t})_{x\in\mathbb{R},t>0}$.

Energy estimate. Using one strongly convex entropy η_0, one finds that $\sqrt{\epsilon}\partial_x u^\epsilon$ stays bounded in L^2.

Entropy rates estimates. From the above estimates, and thanks to Murat's Lemma [10], the entropy rate $\partial_t E(u^\epsilon) + \partial_x Q(u^\epsilon)$ stays in a relatively compact set of H^{-1}_{loc}.

Compensated compactness. That allows to apply the *div-curl* Lemma of Murat and Tartar, to obtain

$$\langle \nu, E_1Q_2 - E_2Q_1\rangle = \langle \nu, E_1\rangle\,\langle \nu, Q_2\rangle - \langle \nu, E_2\rangle\,\langle \nu, Q_1\rangle, \tag{2}$$

almost everywhere in (x,t), and for every entropy-flux pairs (E_1,Q_1) and (E_2,Q_2).

Strong convergence. Under structural assumptions (some amount of nonlinearity is needed), (2) implies that $\nu_{x,t}$ is a Dirac mass, meaning that u^ϵ converges almost everywhere.

The same procedure was employed successfully in [12] to pass to the limit in the relaxation of Jin and Xin. The most delicate part was the construction of PIDs for this enlarged system. The extension of entropy-flux pairs of (1) to the (u,v)-system was interesting too. Notice that compensated compactness and the fact that it implies strong convergence do not really depend on the kind of diffusion that is considered. See also [16] for an alternate approach to the convergence of a relaxation model.

We show here that the same ideas work for the Radiative diffusion model too, under the same structural assumptions that DiPerna used. Our result reads therefore as follows.

Theorem 0.1 *Let $K \subset \mathcal{U}$ be a compact and convex set with a piecewise smooth boundary that is characteristic (the tangent space at u is invariant under $\mathrm{d}f(u)$). Assume that (1) admits an entropy $E_0 \in \mathcal{C}^2$, strongly convex in K, in the sense of $\mathrm{D}^2E_0 > 0$ everywhere in K. Assume at last that Tartar's equation (2) implies that the probability ν supported in K is actually a Dirac mass.*

Then for every measurable initial data $a : \mathbb{R} \to K$, there exists a global solution $u^\epsilon : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to K$ of the radiative diffusion model, satisfying appropriate entropy estimates. Moreover, after possibly the extraction of a subsequence, there holds $u^\epsilon(x,t) \to u(x,t)$ almost everywhere as $\epsilon \to 0+$, where u is a weak entropy solution of (1).

In particular, we prove that K is a PID for the radiative model. We emphasize that compensated compactness is used in the proof of existence of u^ϵ, because the diffusion is not strong enough to prevent shock formation in this model, see [11, 4, 9]. Kawashima and Nishibata [6, 7] obtain the global existence of a smooth solution u^ϵ to more general radiative models, provided the initial data is small enough in $H^2(\mathbb{R})$; however, the smallness condition does not allow to keep a unique initial data as ϵ tends to zero. We also mention worth papers on the scalar case, where the semi-group is non-expansive in L^1 and satisfies a comparison property, see [8, 13, 14].

French

Nous considérons des systèmes de lois de conservation (1) du premier ordre, à flux f régulier, $\mathrm{d}f(u)$ étant à valeurs propres semi-simples réelles (hyperbolicité) et, disons, de multiplicités indépendantes de u. Pour une donnée initiale bornée $a(x)$, l'existence d'une solution globale peut être attaquée par l'ajout d'un terme de diffusion puis par un passage à la limite. Les diffusions les plus courantes sont la *viscosité artificielle*, la relaxation de Jin et Xin [3] et le modèle "radiatif" (voir le texte en Anglais). Ce dernier tire sont nom du modèles de gaz radiatif, dans lequel la température détermine le flux de chaleur *via* une équation élliptique. L'existence d'une solution u^ϵ pour les deux premiers cas (ajouter une condition initiale pour v dans la relaxation) s'obtient par une méthode point fixe à la Picard, en considérant le flux f comme un terme source et en utilisant le semi-groupe de la partie principale, linéaire.

Le passage à la limite lorsque $\epsilon \to 0+$ est la partie difficile de l'analyse. Pour la viscosité artificielle, DiPerna [2] obtient la convergence presque partout d'une sous-suite, d'où découle un théorème d'existence pour (1), sous certaines conditions structurelles. Les ingrédients de la démonstration sont 1- une estimation de u^ϵ dans L^∞, indépendante de ϵ, grâce à laquelle on peut supposer que u^ϵ converge au sens de Young vers une famille mesurable $(\nu_{x,t})_{x\in\mathbb{R},t>0}$ de probabilités, 2- une estimation dans L^2 de $\sqrt{\epsilon}\partial_x u^\epsilon$, *via* une inégalité d'énergie, 3- la compacité dans H^{-1}_{loc} des taux de production d'entropie $\partial_t E(u^\epsilon)+\partial_x Q(u^\epsilon)$, grâce aux estimations précédentes et au Lemme de Murat [10], 4- le *lemme divergence-rotationnel* (Murat–Tartar [15]), qui fournit (2) pour presque tout (x,t) et toutes paires entropie-flux (E_j,Q_j), 5- l'analyse de (2) avec pour but de montrer que les $\nu_{x,t}$ sont des masses de Dirac. Les deux étapes qui dépendent le plus de la structure du système étudié sont 1-, où il s'agît d'avoir des domaines positivement invariants (DPI) pour le modèle visqueux, et 5-, où on a besoin d'une certaine dose de non-linéarité et aussi d'avoir un nombre assez grand de paires entropie-flux. Chacun de ces deux points limite le champ d'application de la méthode aux systèmes ayant un système complet d'*invariants de Riemann*; on les appelle encore *systèmes riches.* Un DPI est alors un domaine convexe dont le bord est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et caractéristique, c'est-à-dire que l'espace tangent en u au bord est stable par $\mathrm{d}f(u)$. L'étape 2- est traitée au moyen d'une entropie E_0 fortement convexe (au sens où $\mathrm{D}^2E_0>0$ en tout point), dont l'existence est assurée pour les systèmes riches.

La stratégie décrite ci-dessus a été étendue au cas de la relaxation de Jin et Xin dans [12], sous les mêmes conditions de structure utilisées par DiPerna. La principale difficulté était la construction de DIPs pour le système étendu à $2n$ équations, lorsque le modèle visqueux (à n équations) en possède. L'extension des paires entropie-flux hors de la courbe d'équilibre $v=f(u)$ était intéressante elle aussi, quoique plus aisée. Dans le point 2- ci-dessus, $\sqrt{\epsilon}\partial_x u^\epsilon$ était remplacé par $(f(u^\epsilon)-v^\epsilon)/\sqrt{\epsilon}$.

Le but de cette note est d'adapter la même stratégie au cas du modèle radiatif. On démontre ici le résultat suivant.

Théorème 0.1 *Soit $K\subset\mathcal{U}$ un domaine compact et convexe, dont le bord est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et caractéristique. On suppose que (1) possède une entropie E_0, fortement convexe sur K. On suppose enfin que, lorsque ν est une probabilité supportée par K, l'équation de Tartar (2) entraine que ν est une masse de Dirac.*

Alors, pour toute donnée initiale mesurable $a:\mathbb{R}\to K$, il existe une solution globale $u^\epsilon:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to K$ du modèle radiatif, satisfaisant les inégalités d'entropie pour toute entropie convexe. De plus, après extraction d'une sous-suite, on a $u^\epsilon(x,t)\to u(x,t)$ quand $\epsilon\to 0+$, où u est une solution entropique de (1), de donnée initiale a.

Notons que la diffusion radiative est bien moins forte qu'une viscosité artificielle. En particulier, le point fixe de Picard avec la formule de Duhamel ne sont pas adaptés pour montrer l'existence de u^ϵ. Celle-ci est elle-même obtenue par compacité par compensation ! D'où le fait que l'unicité de u^ϵ reste un problème ouvert.

Nous donnons maintenant les éléments pour la preuve du théorème 0.1. Nous commençons par l'existence de u^ϵ, qu'on obtient par la méthode de viscosité artificielle, c'est-à-dire *via*

$$\partial_t u+\partial_x f(u)=\epsilon\partial_x q+\mu\partial_x^2 u,\quad -\epsilon^2\partial_x^2 q+q=\partial_x u. \tag{3}$$

Fixant $\epsilon>0$, on note u_μ la solution de (3) de donnée initiale a. Par Picard et Duhamel elle existe au moins localement et est régulière (noter que l'application linéaire $u\mapsto\partial_x q$ est continue dans tous les espaces fonctionnels raisonnables).

Estimation L^∞. On remarque que K est encore un DPI pour (3). Suivant l'esprit de [1] (qui ne traite cependant pas un tel système), il suffit de noter que K est positivement invariant pour le modèle visqueux d'une part (c'est l'hypothèse), et qu'il l'est encore pour la partie purement radiative

$$\partial_t u=\epsilon\partial_x q,\quad -\epsilon^2\partial_x^2 q+q=\partial_x u.$$

Celle-ci se réécrit sous la forme

$$\partial_t u=K^\epsilon * u-u,$$

où $K^\epsilon=(1/2\epsilon)\exp(-|x|/\epsilon)$ est un noyau positif de masse unité. Le second membre est donc un vecteur rentrant dans K lorsque $u(x_0,t_0)$ est sur ∂K est $u(\cdot,t_0)$ est à valeurs dans K.

Comme K est un DPI, u_μ reste à valeur dans K. Comme K est compact, u_μ est définie globalement.

Estimation d'énergie. Notons $r_\mu = \partial_x^{-1} q_\mu$, de sorte que $-\epsilon^2\partial_x^2 r + r = u$. Etant donné une entropie E_0 fortement convexe sur K, de flux Q_0, la régularité de u_μ permet d'écrire

$$\partial_t E_0(u_\mu) + \partial_x Q_0(u_\mu) + \frac{1}{\epsilon}\langle \mathrm{d}E_0(u_\mu) - \mathrm{d}E_0(r_\mu), u_\mu - r_\mu\rangle = \epsilon \mathrm{d}E_0(r_\mu)\partial_x^2 r_\mu + \mu \mathrm{d}E_0(u_\mu)\partial_x^2 u_\mu.$$

Avec $\mathrm{D}^2 E_0 \geq \omega^2 I_n$ sur K, il s'ensuit une estimation uniforme de $\epsilon^{-1/2}(u_\mu - r_\mu)$, de $\sqrt{\epsilon}\partial_x r_\mu$ et de $\sqrt{\mu}\partial_x u_\mu$ dans L^2_{loc}.

Compacité dans H^{-1}_{loc}. On applique la même formule à une paire entropie-flux (E, Q) quelconque de classe $\mathcal{C}^2$. Vu l'estimation L^∞, $\partial_t E(u_\mu) + \partial_x Q(u_\mu)$ reste dans un borné de $W^{-1,\infty}$. Par l'égalité ci-dessus et les estimations d'énergie déjà obtenues, cette quantité est aussi la somme d'expressions bornées dans L^1_{loc}, à savoir

$$\frac{1}{\epsilon}\mathrm{d}\langle E(u_\mu, r_\mu - u_\mu\rangle - \mu \mathrm{D}^2 E(u_\mu)(\partial_x u_\mu, \partial_x u_\mu)$$

(remarquer que $\epsilon > 0$ est fixé dans cette étape), et d'un terme qui tend vers zéro dans H^{-1}_{loc} : $\mu\partial_x(\mathrm{d}E(u_\mu)\partial_x u_\mu)$. On conclut par le lemme de Murat.

Conclusion. On peut donc mettre en œuvre la compacité par compensation. Par hypothèse, les mesures de Young de la suite $(u_\mu)_{\mu\to 0+}$ sont à valeurs Dirac. Autrement dit, cette suite contient une sous-suite qui converge presque partout. On passe alors à la limite dans le système, grâce au théorème de convergence dominée, et à $\mu\partial_x u_\mu \to 0$ dans L^2. On obtient ainsi une solution faible u^ϵ du modèle radiatif.

Inégalités d'entropie. Si une entropie E est convexe, on a

$$\partial_t E(u_\mu) + \partial_x Q(u_\mu) + \frac{1}{\epsilon}\langle \mathrm{d}E(u_\mu), u_\mu - r_\mu\rangle \leq \mu\partial_x(\mathrm{d}E_0(u_\mu)\partial_x u_\mu).$$

Passant de même à la limite, on obtient

$$\partial_t E(u^\epsilon) + \partial_x Q(u^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\langle \mathrm{d}E(u^\epsilon), u^\epsilon - r^\epsilon\rangle \leq 0. \tag{4}$$

Plus précisément, on a une formulation intégrale de cette inégalité, qui prend en compte la donnée initiale a.

Passons à la convergence de u^ϵ lorsque $\epsilon \to 0+$. Nous savons déjà que la suite u^ϵ est à valeurs dans K, et que $\epsilon^{-1/2}(u^\epsilon - r^\epsilon)$ et $\sqrt{\epsilon}\partial_x r^\epsilon$ restent bornés dans L^2_{loc}, car les bornes obtenues précédement étaient uniformes en μ. Pour une paire entropie-flux quelconque, on écrit alors (sachant que $u(\cdot, t)$ est dans $W^{2,\infty}(\mathbb{R})$, uniformément en t)

$$\partial_t E^\epsilon + \partial_x Q^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\langle \mathrm{d}E(u^\epsilon) - \mathrm{d}E(r^\epsilon), r^\epsilon - u^\epsilon\rangle - \epsilon \mathrm{D}^2 E(r^\epsilon)(\partial_x r^\epsilon, \partial_x r^\epsilon) + \epsilon\partial_x(\mathrm{d}E(r^\epsilon)\partial_x r^\epsilon).$$

Le membre de gauche est borné dans $W^{-1,\infty}$. A droite, les deux premiers termes restent bornés dans L^1_{loc}, tandis que le dernier tend vers zéro dans H^{-1}_{loc}. Par le lemme de Murat, on déduit que la dissipation d'entropie reste dans un compact de H^{-1}_{loc}. On peut donc mettre en œuvre la compacité par compensation. Par hypothèse, celle-ci entraine que u^ϵ contient une sous-suite qui converge presque partout. Pour passer à la limite dans le modèle radiatif, on utilise le théorème de convergence dominée, et le fait que $\epsilon\partial_x^2 r^\epsilon$ tend vers zéro dans H^{-1}_{loc}. De même, si E est une entropie convexe, l'identité ci-dessus implique

$$\partial_t E^\epsilon + \partial_x Q^\epsilon \leq \epsilon\partial_x(\mathrm{d}E(r^\epsilon)\partial_x r^\epsilon),$$

et les mêmes arguments permettent le passage à la limite. On notera qu'il n'y a pas de phénomène de couche limite en $t = 0$. La limite u est donc bien une solution entropique du problème de Cauchy pour (1), de donnée initiale a.

Remerciements

This research was funded in part by the EC as contract HPRN-CT-2002-00282.

Références

[1] K. Chuey, C. Conley, J. Smoller, Positively invariant regions of nonlinear diffusion equations. *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), pp 373–392.

[2] R. DiPerna, Convergence of approximate solutions of conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), pp 27–70.

[3] S. Jin, Z. Xin, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.* **48** (1995), pp 235–276.

[4] S. Kawashima, S. Nishibata. Shock waves for a model system of a radiating gas. *SIAM J. Math. Anal.*, **30** (1999), pp 95–117.

[5] S. Kawashima, S. Nishibata. Weak solutions with a shock to a model system of the radiating gas. *Sci. Bull. Josai Univ.* (1998), Special issue no. 5, pp 119–130.

[6] S. Kawashima, S. Nishibata. A singular limit for hyperbolic-elliptic coupled systems in radiation hydrodynamics. *Indiana Univ. Math. J.* (2001), **50** no. 1, pp 567–589.

[7] S. Kawashima, Y. Nikkuni, S. Nishibata. The initial value problem for hyperbolic-elliptic coupled systems and applications to radiation hydrodynamics. *Analysis of systems of conservation laws (Aachen, 1997)*, 87–127. Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., 99, *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.*

[8] C. Lattanzio, P. Marcati. Global well-posedness and relaxation limits of a model for radiating gas. *J. Diff. Equations*, **190** (2003), pp 439–465.

[9] H. Liu, E. Tadmor. Critical thresholds in a conservation model for nonlinear conservation laws. em SIAM J. Math. Anal., **33** (2001), pp 930–945.

[10] F. Murat, Compacité par compensation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **5** (1978), pp 489–507.

[11] S. Schochet, E. Tadmor. The regularized Chapman–Enskog expansion for conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **119** (1992), pp 95–107.

[12] D. Serre, Relaxations semi-linéaire et cinétique des systèmes de lois de conservation. *An. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **17** (2000), pp 169–192.

[13] D. Serre. L^1-stability of nonlinear waves in scalar conservation laws. *Handbook of Differential Equations*, C. Dafermos & E. Feireisl eds. Elsevier (2004).

[14] D. Serre. L^1-Stability of constants in a model for radiating gases. *Communications in Math. Sciences*, **1** (2003), pp 199–207.

[15] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations. *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt symposium, Vol. IV*, pp 136–212, Res. Notes in Math., 39, *Pitman, London*, (1979).

[16] A. Tzavaras, Materials with internal variables and relaxation of conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.* **146** (1999), pp 129–155.