1. Ekstranotat om basiser og lineærtransformasjoner under basisskifte

Notasjon: vektorer i $\mathbb{R}^n$ skrives med uthevet skrift, feks. $\boldsymbol{x}$. Skalarer skrives uten uthevning, feks. λ.

Husk at en samling vektorer $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}\}$ i $\mathbb{R}^n$, med $m < n$, er lineært uavhengig dersom ligningen $c_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + c_m\boldsymbol{b_m} = \boldsymbol{0}$ bare har løsningen $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Definisjon 1.1. En *basis* for $\mathbb{R}^n$ er en lineært uavhengig samling n-vektorer $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ i $\mathbb{R}^n$.

Det er viktig å påpeke at en samling av $m < n$ vektorer aldri kan danne en basis for $\mathbb{R}^n$, selv om den kan være en lineært uavhengig samling. Vi har også at en basis for $\mathbb{R}^n$ spenner ut $\mathbb{R}^n$ med den betydning at hvis $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, så kan enhver vektor $\boldsymbol{x}$ utrykkes som en lineærkombinasjon av vektorene i samlingen $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$; altså, vi kan finne koeffisienter $c_1, \dots, c_n$ slik at $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n}$. Faktisk er disse koeffisientene c_i unike:

Proposisjon 1.2. *Hvis $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, så kan enhver vektor utrykkes unikt som en lineærkombinasjon av samlingen $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$.*

Bevis. Hvis

$$c_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{x} = d_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + d_n\boldsymbol{b_n},$$

for koeffisienter d_i og c_i, så vil

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = (c_1 - d_1)\boldsymbol{b_1} + \cdots + (c_n - d_n)\boldsymbol{x_n}.$$

Siden $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ er en basis, er de spesielt lineært uavhengige, og da kan ligningen

$$\boldsymbol{0} = (c_1 - d_1)\boldsymbol{b_1} + \cdots + (c_n - d_n)\boldsymbol{x_n},$$

bare ha den trivielle løsnignen $(c_1 - d_1) = \cdots = (c_n - d_n) = 0$; altså $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$. □

Hvis $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ er en basis, skriver vi gjerne samlingen som $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$.

Fra Definisjon 1.1 er det klart at det finnes mange ulike basiser for $\mathbb{R}^n$. Vi trenger bare å finne n-lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$, så har vi en basis. For eksempel er $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ en basis for $\mathbb{R}^2$, som vi kaller standardbasisen til $\mathbb{R}^2$. Et annet eksempel er $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ fordi vektorene er lineært uavhengig samtidig som det er nøyaktig 2 av dem, nemlig det samme som dimensjonen til $\mathbb{R}^2$.

Definisjon 1.3. La $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$. Vi vet at enhver $\boldsymbol{x}$ i $\mathbb{R}^n$ skrives som $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{b_n}$, for noen unike koeffisienter α_i. *Koordinatene* til vektoren $\boldsymbol{x}$ i basisen $\mathcal{B}$ er vektoren

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix},$$

i $\mathbb{R}^n$.

Koordinatene til en vektor forteller oss hvordan vi skal "bygge" vektoren ut fra basisen; altså hvis $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ er en basis og $x \in \mathbb{R}^n$ med koordinater i basisen gitt ved

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

så vet vi at $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b_n}$.

Proposisjon 1.4. *La $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ være en basis for R^n. Hvis $\boldsymbol{x}$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$ med koordinater $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$, og $B = (b_1 \dots b_n)$ er matrisen med kolonnevektorene $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}$ (så vektoren b_j er kolonne j i matrisen B). Da kan $\boldsymbol{x}$ utrykkes som matrise-vektor-produktet*

$$\boldsymbol{x} = B[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Bevis. Gitt disse koordinatene $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$, si $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, så vet vi at $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b_n}$, men denne lineærkombinasjon er bare det samme som $B[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$, siden $B = (\boldsymbol{b_1} \dots \boldsymbol{b_n})$; altså

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b_n} = B[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}.$$

□

Eksempel 1.5.

1. Hva er koordinatene til en vektor i $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x}$, i standardbasisen $\mathcal{E}$? Vel,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \boldsymbol{e_1} + x_2 \boldsymbol{e_2}.$$

   Så $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}} = \boldsymbol{x}$.

2. La

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Dette er en basis for R^2. Hva er koordinatene til vektoren $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i denne basisen? Siden

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \boldsymbol{b_1} + 1 \cdot \boldsymbol{b_2},$$

   har den koordinater

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det er en veldig enkel generell metode man bruker kan bruke for å finne koordinatene til en vektor gitt en basis:

Proposisjon 1.6. *La $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$, $B = (\boldsymbol{b_1} \dots \boldsymbol{b_n})$ være matrisen med basiselementene som kolonner (i riktig rekkfølge). Koordinatene til en vektor $\boldsymbol{x}$ i $\mathbb{R}^n$ er den unike løsningen til matrise-vektor ligningen $B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$.*

Bevis. Siden $\mathcal{B}$ er en basis, finnes der en løsning til $B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$, og den er attpåtil unik. La $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ være løsningen. Fra definisjonen av matrise-vektor-produktet, har vi at

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b_1} \dots \boldsymbol{b_n}) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{b_1} + \dots + c_n\boldsymbol{b_n}.$$

Vi vet at $\boldsymbol{x}$ kan utrykkes unikt som en lineærkombinasjon av basis-elementene i $\mathcal{B}$, så fra Definisjon 1.3 følger det at $\boldsymbol{c}$ er koordinatene til $\boldsymbol{x}$ i basisen $\mathcal{B}$. □

Eksempel 1.7. La oss bruke Proposisjon 1.6 til å finne koordinatene til vektoren $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i basisen $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Vi ønsker altså å løse matrise-vektor-ligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi løser det augmenterte systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

så koordinatene blir

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eksempel 1.8. La oss finne koordinatene til samme vektoren $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, men nå i basisen gitt ved $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Vi ønsker altså å løse matrise-vektor-ligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi løser det augmenterte systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

så koordinatene blir

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi kan dobbeltsjekke svaret ved å regne ut

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som vi ser er nettop vektoren $\boldsymbol{x}$.

Tildelingen $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}} \mapsto [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ kalles et basisskifte fra standardbasisen $\mathcal{E}$ til basisen $\mathcal{B}$. Man kan finne mye videoer og bilder på nett som gir fine visuelle bilder på et slikt basisskifte (også kalt koordinatskifte), og det anbefales å sjekke disse ut for å få litt geometrisk intuisjon på denne prosessen.

Når vi er gitt en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, så vet vi at det alltid finnes en matrise som implementerer denne, ofte kalt standardmatrisen. Den er gitt som $A_T = (T(\boldsymbol{e_1}) \dots T(\boldsymbol{e_n}))$. Med å implementere transformasjonen, menes det at $T(\boldsymbol{x}) = A_T\boldsymbol{x}$ (matrise-vektor-prduktet). Det er veldig naturlig å spørre seg hvordan denne transformasjonen, implementert av A_T, ser ut hvis vi heller bytter til en annen basis enn standardbasisen.

Definisjon 1.9. La $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$, og la $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en lineærtransformasjon, implementert av en matrise A. Lineærtransformasjonen som representerer T i basisen $\mathcal{B}$, er lineærtransformasjonen $T_{\mathcal{B}}$ som tilfredsstiller $[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$. Matrisen som representerer A i basisen $\mathcal{B}$, er matrisen $A_{\mathcal{B}}$ som tilfredsstiller $[A\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$, for alle $\boldsymbol{x}$ i $\mathbb{R}^n$. Vi har også at $A_{\mathcal{B}}$ implementerer (er standardmatrisen til) $T_{\mathcal{B}}$.

Det er matrisen $A_{\mathcal{B}}$ i proposisjonet over som forteller hvordan lineærtransformasjonen oppfører seg etter vi har skiftet basis. Hvordan finner man så denne $A_{\mathcal{B}}$ gitt basisen $\mathcal{B}$ og lineærtransformasjonen T? Generelt kan vi gå frem som følger (konkrete eksemepler kommer også nedenfor): T er implementert av en matrise, si A, slik at $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ for alle vektorer $\boldsymbol{x}$. Gitt en slik vektor $\boldsymbol{x}$, kan vi skrive $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b_1} + \dots + c_n\boldsymbol{b_n}$, hvor $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, er koordinatene til $\boldsymbol{x}$ i basisen $\mathcal{B}$. Siden matrise-multiplikasjon er lineært, vil

$$A\boldsymbol{x} = c_1 A\boldsymbol{b_1} + \dots + c_n A\boldsymbol{b_n}.$$

Det å ta koordinatene til en vektor er også en lineærtransformasjon; altså $[a\boldsymbol{z} + b\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}} = a[\boldsymbol{z}]_{\mathcal{B}} + b[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}}$. Dette følger fra at $\boldsymbol{y} = B[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}}$, så $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\boldsymbol{y}$, og vi vet at matrisemultiplikasjon er en lineærtransformasjon. Dermed får vi

$$\begin{aligned}
[A\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} &= [c_1 A\boldsymbol{b_1} + \dots + c_n A\boldsymbol{b_n}]_{\mathcal{B}} \\
&= c_1[A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}} + \dots + c_n[A\boldsymbol{b_n}]_{\mathcal{B}} \\
&= ([A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}} \dots [A\boldsymbol{b_n}]_{\mathcal{B}}) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&= ([A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}} \dots [A\boldsymbol{b_n}]_{\mathcal{B}})[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Dette forteller oss at $([A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}} \dots [A\boldsymbol{b_n}]_{\mathcal{B}})$ (matrisen med vektorene $[A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}}, \dots, [A\boldsymbol{b_n}]_{\mathcal{B}}$ som kollonner) er matrisen $A_{\mathcal{B}}$ som implementerer A (og T) etter basisskiftet. La oss se på et eksempel:

Eksempel 1.10. La $\mathcal{B}$ være basisen $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$, og la A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

Vi skal finne matrisen $A_\mathcal{B}$ som representerer matrisen A med hensyn på basisen $\mathcal{B}$. Alt vi trenger å gjøre, er å finne $[A\boldsymbol{b_1}]_\mathcal{B}$ og $[A\boldsymbol{b_2}]_\mathcal{B}$. Vi beregner:

$$A\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix},$$

$$A\boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}.$$

Vi ønsker å finne koordinatene til disse vektorene i basisen $\mathcal{B}$. Da løser vi

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3\\2 & 1 & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3\\0 & -1 & -3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 3\end{array}\right],$$

så $[A\boldsymbol{b_1}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$. Vi løser også

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\0 & -1 & -2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\end{array}\right],$$

så $[A\boldsymbol{b_2}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$. Altså er

$$A_\mathcal{B} = ([A\boldsymbol{b_1}][A\boldsymbol{b_2}]) = \begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 2\end{bmatrix}.$$