



Løsninger av tidligere eksamensett

IMAx2150: Høsten 2023

Kent Holing, NTNU (21 og 22 november 2023)

Løsning er også tilgjengelig på fagets hjemmeside.

Eksamen høst 2021

1 Vi har to lineære likningssystemer gitt ved:

$$A_1 \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 \mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke av likningssystemene er inkonsistente?

Løsning: Både A_1 og A_2 er overbestemte. Dersom noen av de er inkonsistente inneholder de *selvmotsigelser*, hvis ikke er ikke alle radvektorene lineært uavhengige. Begge tilfeller kan sjekkes med gauss-eliminasjon.

For A_1 :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{array}{l} (-3) \\ (-5) \end{array}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow +]{(-2)} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A_1 har altså løsning $x_2 = 1/2$ og $x_1 = 0$. Systemet er ikke inkonsistent.

For A_2 har vi:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{array}{l} (-3) \\ (-1) \end{array}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow +]{(1/2)} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{array} \right]$$

Dette er et inkonsistent system.

Siste ligning for LS med A_1 er **alltid oppfylt**.

Siste ligning for LS med A_2 gir en **selvmotsigelse**.

- b) Dersom noen av likningssystemene er inkonsistente, bruk minste kvadraters metode for å finne vektoren $\tilde{\mathbf{x}}$ som minimerer feilen $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$

Løsning: Det vil si at vi vil løse likningssystemet $A^T A \tilde{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \cdot 3+1 & 2+3 \cdot 4+3 \\ 2+4 \cdot 3+3 & 2 \cdot 2+4 \cdot 4+3 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \cdot 2+3 \\ 2+2 \cdot 4+3 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 29 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Løser ved gauss-eliminasjon:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{cc|c} 11 & 17 & 10 \\ 17 & 29 & 19 \end{array} \right] & \xrightarrow[\leftarrow +]{-\frac{17}{11}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 11 & 17 & 10 \\ 0 & 29 - \frac{17^2}{11} & 19 - \frac{170}{11} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 11 & 17 & 10 \\ 0 & \frac{30}{11} & \frac{39}{11} \end{array} \right] \\
 \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1.1 \\ 1.3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi kan nå finne RMSE (ikke en del av oppgaven som var gitt):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}} \\
 \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.1 \\ 1.3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1.1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 1.3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + 1.1 \cdot 1 - 1.3 \cdot 2 \\ 2 + 1.1 \cdot 3 - 1.3 \cdot 4 \\ 3 + 1.1 \cdot 1 - 1.3 \cdot 3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \\
 \text{RMSE} &= \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}} \\
 \text{RMSE} &= \sqrt{\frac{0.5^2 + 0.1^2 + 0.2^2}{3}} \\
 \text{RMSE} &= \sqrt{0.1} \approx 0.32
 \end{aligned}$$

c) Bruk uendelighetsnormen ($\|A\|_\infty$) til å finne kondisjonstallet til $A^T A$ fra normalligningen i b).

Løsning: Kondisjonstallet til $A^T A$, $\text{cond}(A^T A)$, er gitt ved $\|A^T A\|_p \|(A^T A)^{-1}\|_p$ hvor p gir typen matrisenorm. Når man bruker uendelighetsnormen, $p = \infty$, er matrisenormen lik maksimal absolutt radsum.

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 29 \end{bmatrix} \\ \det A^T A &= 11 \cdot 29 - 17^2 = 30 \\ (A^T A)^{-1} &= \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 29 & -17 \\ -17 & 11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{29}{30} & -\frac{17}{30} \\ -\frac{17}{30} & \frac{11}{30} \end{bmatrix} \\ \|A^T A\|_\infty &= \max\{11 + 17, 17 + 29\} = 46 \\ \|(A^T A)^{-1}\|_\infty &= \max\left\{\frac{29 + 17}{30}, \frac{11 + 17}{30}\right\} = \frac{46}{30} \\ \text{cond}(A^T A) &= \frac{46}{30} \cdot 46 \approx 70.5 \end{aligned}$$

- 2 Finn en løsning av følgende differenslikning ved hjelp av iterasjonsmetoden, og bevis at løsningen er korrekt ved induksjon.

$$a_k = a_{k-1} + 2^k, \quad \forall k \geq 2$$
$$a_1 = 1$$

Du vil kunne få bruk for rekkforenklingen:

$$\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

- 2 Finn en løsning av følgende differenslikning ved hjelp av iterasjonsmetoden, og bevis at løsningen er korrekt ved induksjon.

$$a_k = a_{k-1} + 2^k, \quad \forall k \geq 2$$
$$a_1 = 1$$

Du vil kunne få bruk for rekkforenklingen:

$$\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

Denne oppgaven ligner svært mye på en tilsvarende oppgave fra forrige forelesning. (Bruk av iterasjonsmetoden og induksjonsbevis.)

Hvis det er interesse for å gå igjennom denne oppgaven, så gjør vi det i neste uke.

Det var interesse for repetisjon.

DEF: $a_k = a_{k-1} + 2^k$ for $k \geq 2$ og $a_1 = 1$.

Løsning: Vi skriver setter opp følgen fra 1 og oppover og prøver å finne et mønster:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2^2$$

$$a_3 = (1 + 2^2) + 2^3$$

$$a_4 = (1 + 2^2 + 2^3) + 2^4$$

$$a_5 = (1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5$$

$$\vdots$$

$$a_k = 1 + \sum_{n=2}^k 2^n$$

DEF: $a_k = a_{k-1} + 2^k$ for $k \geq 2$ og $a_1 = 1$.

Løsning: Vi skriver setter opp følgen fra 1 og oppover og prøver å finne et mønster:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2^2$$

$$a_3 = (1 + 2^2) + 2^3$$

$$a_4 = (1 + 2^2 + 2^3) + 2^4$$

$$a_5 = (1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5$$

$$\vdots$$

$$a_k = 1 + \sum_{n=2}^k 2^n$$

Uttrykket kan forenkles:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^k 2^n &= \sum_{n=0}^{k-2} 2^{n+2} = 2^2 \sum_{n=0}^{k-2} 2^n \\ \text{fra oppgaveteksten: } \sum_{k=0}^n ar^k &= \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \\ \sum_{n=0}^{k-2} 2^n &= \frac{1 \cdot 2^{k-2+1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{k-1} - 1 \\ a_k &= 1 + 2^2(2^{k-1} - 1) = 2^{k+1} - 3 \end{aligned}$$

Iterasjonsmetoden ga induksjonsantagelsen (*) $a_k = 2^{k+1} - 3$ (IA).

Følgen var definert som $a_k = a_{k-1} + 2^k$ for $k \geq 2$ og $a_1 = 1$. (DEF)

For $k = 1$ gir IA at $a_1 = 4 - 3 = 1$ i overenstemmelse med DEF.

La $k > 1$ og anta IA.

Iterasjonsmetoden ga induksjonsantagelsen (*) $a_k = 2^{k+1} - 3$ (IA).

Følgen var definert som $a_k = a_{k-1} + 2^k$ for $k \geq 2$ og $a_1 = 1$. (DEF)

For $k = 1$ gir IA at $a_1 = 4 - 3 = 1$ i overenstemmelse med DEF.

La $k > 1$ og anta IA.

Da er fra DEF $a_{k+1} = a_k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 3) \text{ (fra IA)} + 2^{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 3 = 2^{k+2} - 3 = 2^{(k+1)+1} - 3$.

Iterasjonsmetoden ga induksjonsantagelsen (*) $a_k = 2^{k+1} - 3$ (IA).

Følgen var definert som $a_k = a_{k-1} + 2^k$ for $k \geq 2$ og $a_1 = 1$. (DEF)

For $k = 1$ gir IA at $a_1 = 4 - 3 = 1$ i overenstemmelse med DEF.

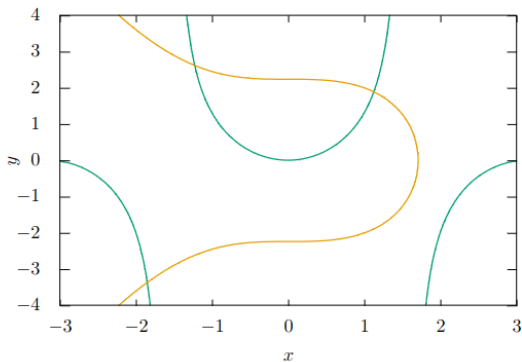
La $k > 1$ og anta IA.

Da er fra DEF $a_{k+1} = a_k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 3) \text{ (fra IA)} + 2^{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 3 = 2^{k+2} - 3 = 2^{(k+1)+1} - 3$.

Dette viser at påstanden (*) er riktig for $k + 1$ hvis den er riktig for k , og da påstanden også er riktig for $k = 1$, så er den riktig for alle $k \geq 1$.

Vi har følgende ikke-lineære likningssystem:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= y \cos x \\ x^3 + y^2 &= 5\end{aligned}$$



Taylorrekka for funksjoner med tre variable

Basis for Newtons flervariabel iterasjonsmetode

Taylorutvidelse rundt x_0

Taylorutvidelsen av $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix}$ rundt $\mathbf{x}_0$:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial z}(z - z_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2, (y - y_0)^2, (z - z_0)^2)$$

Vi finner en *linjær* approksimasjon $F_L(\mathbf{x})$ ved å droppe feilleddet:

$$\begin{aligned} F_L(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial z}(z - z_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} \end{bmatrix} (x - x_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} (y - y_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} (z - z_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Python kode

Newtons flervariabel metode

```
import numpy as np
def Newtons_multivariate_method(f, df, x0, tol):
    x = x0
    while(np.abs(np.linalg.norm(f(x))) > tol):
        fx = f(x)
        dfx = df(x)
        s = np.linalg.solve(dfx, -fx)
        x = x+s
    return x

f = lambda x: np.array([x[0]**2-4.0*x[1]**2-4.0,
                        (x[0]-1.0)**2+x[1]**2-4.0]).reshape((2,1))
df = lambda x: np.array([2.0*x[0], -8.0*x[1],
                        2.0*x[0]-2.0, 2.0*x[1]]).reshape((2,2))
x0 = np.array([1,1]).reshape((2,1))
x = Newtons_multivariate_method(f,df,x0,0.001)
print(f"x:\n {x}")
print(f"feil:\n {np.abs(np.linalg.norm(f(x)))}")
```


OPPGAVE 3

Mathematica® kode for Newtons iterasjonsmetode for system

Ikke bruk det ekvivalente $sx = (J//Inverse).negF$ for uttrykket for sx i koden nedenfor (linje 15) **hvis antall ukjente er stort!**

Merk også bruken av den **symbolskgenererte** Jacobi matrisa. (Vi slipper å partiellderivere $F(X)$ selv.)

```

1 F[x1_, x2_] := {f1[x1,x2],f2[x1,x2]}
2 f1[x1_,x2_] := Sin[x1]^2-x2 Cos[x1];
3 f2[x1_,x2_] := x1^3+x2^2-5;
4
5 (*SYMBOLIC computation of the Jacobi matrix*)
6 JM=D[F[x1,x2],{{x1, x2}}];
7
8 x0={1,1};//N;
9 x=x0;
10
11 nr=5;
12 x0//Print;
13 Do[
14 J=JM/.{x1->x[[1]],x2->x[[2]]};
15 negF=-F[x[[1]],x[[2]]];sx=LinearSolve[J,negF];
16 x=x+sx;x//Print,nr];

```

Jacoby matrisa

$$\mathbf{DF} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2 \sin x \cos x + y \sin x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\cos x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y$$

$$\mathbf{DF} = \begin{bmatrix} 2 \sin x \cos x + y \sin x & -\cos x \\ 3x^2 & 2y \end{bmatrix}$$

Vi genererte denne automatisk i kodeeksemplet ovenfor.

Manuelle utregninger (én iterasjon)

Konvergens mot $\{1, 12545, 1.89063\}$ etter tre iterasjoner.

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{DF}^{-1}(\mathbf{x}_0)\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{x}_0 = (1, 1)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \sin^2 1 - 1 \cdot \cos 1 \\ 1^3 + 1^2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1678 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{DF}(\mathbf{x}_0) &= \begin{bmatrix} 2 \sin 1 \cos 1 + 1 \cdot \sin 1 & -\cos 1 \\ 3 \cdot 1^2 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.7508 & -0.5403 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{DF}(\mathbf{x}_0) = 1.7508 \cdot 2 + 0.5403 \cdot 3 = 5.1225$$

$$\mathbf{DF}^{-1}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{5.1225} \begin{bmatrix} 2 & 0.5403 \\ -3 & 1.7508 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3904 & 0.1054 \\ -0.5857 & 0.3418 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3904 & 0.1054 \\ -0.5857 & 0.3418 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1678 \\ -3 \end{bmatrix}$$

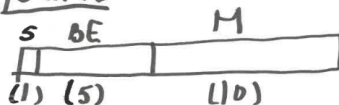
$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.2507 \\ -1.1237 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1.2507 \\ 2.1237 \end{bmatrix}$$

OPPGAVE 4-1 høst 2021

Half precision IEEE 754 model

Half precision IEEE 754 E2021
format oppg. 4



a) Hva er ϵ_M ?

$$\epsilon_M = (1.\underbrace{0000000000}_{(9)}1)_2 - 1$$

$$\boxed{\epsilon_M = 2^{-10}}$$

(For IEEE 754 DP
er $\epsilon_M = 2^{-52}$)

d) n_{max} sum kan lagres?



NB! $B_{Emax} = 11110$, IKKE 11111!

$$B_{Emax} = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

$$E_{max} = 30 - 15 = 15$$

$$B_{Emax} = E_{max} + 15 \quad (15 = 2^4 - 1)$$

Mark: IEEE 754

$$(E + 2^{10} - 1 = BE) \\ 2^{10} - 1 = 1023$$

$$n_{max} = (1.1111111111)_2 \times 2^{15}$$

$$\Sigma = (0.1111111111)_2$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$$

$$\text{GR } a_b = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$n = 10$$

$$\Sigma = \frac{(\frac{1}{2})^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \cdot \frac{1}{2} = 1 - 2^{-10}$$

$$n_{\max} = (1.1111111111)_2 \times 2^{15} = (1 + \Sigma) 2^{15}$$

$$n_{\max} = 2^{16} (2 - 2^{-10}) \times 2^{15}$$

$$n_{\max} = 2^{16} - 2^5 = 2^5 (2^{11} - 1)$$

$$\underline{n_{\max} = 65504}$$

c) Hva er minste positive tall
som kan lagres?

$$bE_{\min} = E_{\min} + 15$$

$$E_{\min} = (00001)_2 - 15 = 1 - 15$$

$$E_{\min} = -14$$

$$n_{\min} = 2^{-14} \times (0.\underline{0000000001})_2$$

$$= 2^{-14} \times 2^{-10} \quad (9)$$

$$= 2^{-24} \doteq 5.960 \cdot 10^{-8}$$

d) Hvordan lages 2051?

$$2051 = 2^{11} + 2 + 2^0$$

$$(2051 = 2 \cdot 1024 + 3)$$

$$\begin{aligned} 2051 &= + (1.000\,000\,000\,11)_2 \\ &= + (1.000\,000\,000\,10)_2 \times 2^{11} \quad \text{bit 11} \end{aligned}$$

som avrundes op

$$\begin{aligned} &\boxed{011101101000000010} \\ &\text{BE} = E + 15 = 26 = 2^4 + 2^3 + 1 \\ &\text{Dette er 2052} \end{aligned}$$

$$fl(2051) = 2052$$

$$rel = \frac{|fl(x) - x|}{|x|} = 1/2051 \approx 0.000487$$

$$\epsilon_M = 2^{-10}$$

$$\frac{1}{2}\epsilon_M = 2^{-11} \approx 0.000488$$

$$rel \leq \frac{1}{2}\epsilon_M$$

Gitt eksempel

1	01101	11000000000
---	-------	-------------

$$BE = 8 + 4 + 1 = 13$$

$$E = 13 - 15 = -2$$

$$-2^{-2} \times (1.11 \underbrace{00000000}_8)_2$$

$$-2^{-2} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-7/16}}$$

Denne oppgaven har blitt gjennomgått **tidlig i oktober** (lysarkpakke datert den 3. og 4. oktober (fra lysark 44)).

Oppgaven løser $u_t = 2u_{xx}$ med tilhørende randkrav.

Hvis det er interesse for å repetere denne løsningen av denne oppgaven, så gjør vi det **i neste uke.**

Det var interesse for repetisjon.

→ **til tidligere forelesning.**

$$u_t = 2u_{xx}$$

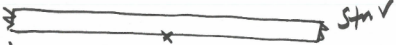
$$u_t = 2u_{xx}$$

$$F(x) \dot{G}(t) = 2F''(x) G(t), \text{ dvs. } F''(x)/F(x) = \dot{G}(t)/(2G(t)) = k \text{ (konstant)}$$

Noen andre versjoner av varmeligningen (OPPGAVE 5 H2021)

$$u_t = 2u_{xx}$$

$F(x) \dot{G}(t) = 2F''(x) G(t)$, dvs. $F''(x)/F(x) = \dot{G}(t)/(2G(t)) = k$ (konstant)

$$\begin{aligned}
 &u_t = 2u_{xx} \\
 &t > 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\
 &u(t, x) = G(t) F(x) \\
 &\quad \hookrightarrow F''(x) = k \cdot F(x) \\
 &\quad \quad G'(t) = \boxed{2k} \cdot G(t) \\
 &(*) \quad \forall \text{ stak ha } u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0 \\
 &\quad \quad (\text{Neumann}) \\
 &\quad \quad \text{Isoleret keramisk materiale,} \\
 &\quad \quad \text{egge endene er isolert (*)}
 \end{aligned}$$


$$u_t = 2u_{xx}$$

$$u_x(t, x) = G(t) F'(x) \text{ (da } u(x, t) = G(t) F(x))$$

$$(*) u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0$$

$$(*) \text{ gir } F'(0) = F'(1) = 0$$

$$(A_n C'(1) \neq 0)$$

$k > 0$: Triviell løsn.

$$k = 0: F(x) = B \quad (\text{Visselr!})$$

$$k < 0: \tilde{f}(k) = A \cos wx + B \sin wx$$

$$F'(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$F'(1) = 0 \rightarrow \sin w = 0$$

$$w = n\pi \quad n \geq 1$$

$$f(x) = A_n \cos n\pi x, \quad n \geq 0$$

$$u_t = 2u_{xx}$$

Cosinusrekka til $u(0, x)$ er $29/2 - 3/2 \cos 2\pi x$.

(Bruk at $\sin^2 \pi x = (1 - \cos 2\pi x)/2$ til å omskrive $u(0, x) = f(x) = 13 + 3 \sin^2 \pi x$.)

$u_n(t, x)$ etter SPP: nedenfor skal være $u(t, x)$.

Detaljer bak forrige lysark

$k > 0$: Standard argument gir
 $f(x) \equiv 0$ (fyll inn detaljene
 selv!)

$k = 0$

$$f''(x) = k f(x) = 0$$

$$f(x) = Ax + B$$

$$f'(x) = A$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$

Da må $B \neq 0$ (ellers er
 $\int_0^1 f(x) \equiv 0$)

$$\underline{k < 0}$$

$$k = -w^2 < 0$$

$$f(x) = A \cos wx + B \sin wx$$

$$f'(x) = -Aw \sin wx + Bw \cos wx$$

$$f'(0) = 0 \quad f'(0) = Bw$$

$$w \neq 0 \rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$f'(1) = -Aw \sin w = 0$$

$$\cancel{w \neq 0} \quad w \neq 0, \quad w \neq 0 \rightarrow A = 0$$

$$\text{Så } \sin w = 0 \quad w = n\pi$$

$$n \geq 1$$

Vi har nå $(w = n\pi)$

$$f_n(x) = A_n \cos n\pi x$$

$n \geq 0$ (merk at vi også
har $n=0$)

$$\dot{G}(t) = 2k G(t)$$

$$G_n(t) = e^{-2n^2 \pi^2 t} \quad \left(k = -\frac{w^2}{4} = -n^2 \pi^2 \right)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot G_n(t)$$

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x$$

$$\begin{aligned} u(0, x) &= 13 + 3 \sin^2 \pi x \\ &= 29/2 - \frac{3}{2} \cos 2\pi x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_0 &= 29/2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{3}{2} \\ a_n &= 0, \quad n > 2 \end{aligned}$$

).

$$u(x, t) = 29/2 - \frac{3}{2} e^{-8\pi^2 t} \cos 2\pi x$$

Utvalgte relevante eksamensoppgaver 2020, 2019 og 2018 og 2017

Gitt systemet

$$x'' = x^2 + y' - 2$$

$$y'' = x' - 2xy + 3$$

med startbetingelsene $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = -2$ og $y'(0) = -1$.

- a) Skriv om systemet til et lineært system med 4 ukjente funksjoner $z_1 = x$, $z_2 = x'$, $z_3 = y$ og $z_4 = y'$.

Gitt systemet

$$\begin{aligned}x'' &= x^2 + y' - 2 \\ y'' &= x' - 2xy + 3\end{aligned}$$

med startbetingelsene $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = -2$ og $y'(0) = -1$.

- a) Skriv om systemet til et lineært system med 4 ukjente funksjoner $z_1 = x$, $z_2 = x'$, $z_3 = y$ og $z_4 = y'$.

Løsning: Definisjonen av z_1 og z_2 gir $z_2 = x' = z_1'$ og definisjonen av z_3 og z_4 gir $z_4 = y' = z_3'$. Vi erstatter x'' med z_2' og y'' med z_4' i ligningene. Vi har derfor foreløpig

$$\begin{aligned}z_1' &= z_2 \\ z_2' &= x^2 + y' - 2 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= x' - 2xy + 3\end{aligned}$$

Gitt systemet

$$\begin{aligned}x'' &= x^2 + y' - 2 \\ y'' &= x' - 2xy + 3\end{aligned}$$

med startbetingelsene $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = -2$ og $y'(0) = -1$.

- a) Skriv om systemet til et lineært system med 4 ukjente funksjoner $z_1 = x$, $z_2 = x'$, $z_3 = y$ og $z_4 = y'$.

Løsning: Definisjonen av z_1 og z_2 gir $z_2 = x' = z_1'$ og definisjonen av z_3 og z_4 gir $z_4 = y' = z_3'$. Vi erstatter x'' med z_2' og y'' med z_4' i ligningene. Vi har derfor foreløpig

$$\begin{aligned}z_1' &= z_2 \\ z_2' &= x^2 + y' - 2 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= x' - 2xy + 3\end{aligned}$$

Vi erstatter så x med z_1 , x' med z_2 og så videre.

$$\begin{aligned}z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_1^2 + z_4 - 2 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= z_2 - 2z_1z_3 + 3\end{aligned}$$

$z_1(0) = x(0) = 0$, $z_2(0) = x'(0) = 1$, $z_3(0) = y(0) = -2$ og $z_4(0) = y'(0) = -1$. 32 / 69

b) Utfør en iterasjon av Eulers metode med steglengde $h = 0.1$ til å finne en tilnærming av $x(0.1)$ og $y(0.1)$.

Løsning: Vi bruker Eulers metode for å løse ligningsystemet. Startbetingelsene gir

$$w_{0,1} = x(0) = 0.00$$

$$w_{0,2} = x'(0) = 1.00$$

$$w_{0,3} = y(0) = -2.00$$

$$w_{0,4} = y'(0) = -1.00$$

b) Utfør en iterasjon av Eulers metode med steglengde $h = 0.1$ til å finne en tilnærming av $x(0.1)$ og $y(0.1)$.

Løsning: Vi bruker Eulers metode for å løse ligningsystemet. Startbetingelsene gir

$$w_{0,1} = x(0) = 0.00$$

$$w_{0,2} = x'(0) = 1.00$$

$$w_{0,3} = y(0) = -2.00$$

$$w_{0,4} = y'(0) = -1.00$$

$$w_{1,1} = w_{0,1} + h \cdot w_{0,2} = 0.10$$

$$w_{1,2} = w_{0,2} + h \cdot (w_{0,1}^2 + w_{0,4} - 2) = 0.70$$

$$w_{1,3} = w_{0,3} + h \cdot w_{0,4} = -2.10$$

$$w_{1,4} = w_{0,4} + h \cdot (w_{0,2} - 2w_{0,1}w_{0,3} + 3) = -0.60$$

Vi har $\mathbf{Z}' = \mathbf{f}(\mathbf{Z})$ med $\mathbf{f}(\mathbf{Z}) = (z_2, z_1^2 + z_4 - 2, z_4, z_2 - 2z_1z_3 + 3)^T$.

RK4 med $h = 0.1$ gir $x(0.1) \approx 0,0856784$ og $y(0,1) \approx -2,07985$

Sammenlign med det **Eulersmetode** gir nedenfor (relativt gode tilnærmelser i forhold til RK4 da h er liten)
(Se neste lysark for pseudo (Mathematica) kode for RK4 metoden)

- b) Utfør en iterasjon av Eulers metode med steglengde $h = 0.1$ til å finne en tilnærming av $x(0.1)$ og $y(0.1)$.

Løsning: Vi bruker Eulers metode for å løse ligningsystemet. Startbetingelsene gir

$$\begin{aligned}w_{0,1} &= x(0) = 0.00 \\w_{0,2} &= x'(0) = 1.00 \\w_{0,3} &= y(0) = -2.00 \\w_{0,4} &= y'(0) = -1.00\end{aligned}$$

Første steg i metoden gir

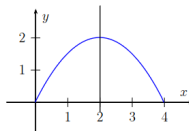
$$\begin{aligned}w_{1,1} &= w_{0,1} + h \cdot w_{0,2} = 0.10 \\w_{1,2} &= w_{0,2} + h \cdot (w_{0,1}^2 + w_{0,4} - 2) = 0.70 \\w_{1,3} &= w_{0,3} + h \cdot w_{0,4} = -2.10 \\w_{1,4} &= w_{0,4} + h \cdot (w_{0,2} - 2 w_{0,1} w_{0,3} + 3) = -0.60\end{aligned}$$

Vi har derfor $x(0.1) \approx w_{1,1} = 0.10$ og $y(0.1) \approx w_{1,3} = -2.10$.

```
1 RK4[y0_,h_] := Module[{f},
2 F[x_] := Module[{f}, x1=x[[1]]; x2=x[[2]]; x3=x[[3]]; x4=x[[4]];
3 Return[{f1[x1,x2,x3,x4], f2[x1,x2,x3,x4], f3[x1,x2,x3,x4],
4 f4[x1,x2,x3,x4]}];
5 f1[x1_,x2_,x3_,x4_] := x2; f2[x1_,x2_,x3_,x4_] := x1^2+x4-2;
6 f3[x1_,x2_,x3_,x4_] := x4; f4[x1_,x2_,x3_,x4_] := x2-2x1 x3+3;
7 k1=F[y0]; k2=F[y0+h/2 k1]; k3=F[y0+h/2 k2]; k4=F[y0+h k3];
8 Return[y0+h(k1+2k2+2k3+k4)/6]
9 ];
10 Y0={0,1,-2,-1};
11 (** output solution at 0.1 **)
12 n=1;
13 h=0.1;
14 pY=Y0;
15 Print[];
16 pY//Print;
17 (** Do[Y=RK4[pY,h]; pY=Y;{Y[[1]],Y[[3]]}//Print,{i,1,n}];
18   ***)
18 Do[Y=RK4[pY,h]; pY=Y,{i,1,n}];
19 {Y[[1]],Y[[3]]}//Print;
```

Oppgave 3 (25%)

En funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[0, L]$ kalles **symmetrisk om** $x = L/2$ hvis $f(L - x) = f(x)$ for alle $x \in [0, L]$. I denne oppgaven vil du få nytte av en setning om sinusrekken til slike funksjoner. Figuren viser en funksjon som er symmetrisk om $x = 2$. Grafen til funksjonen er speilet om den vertikale linjen med $x = 2$. I dette eksempelet er $L = 4$.



Setning 1 La $f(x)$, $D_f = [0, L]$, være kontinuert og symmetrisk om $x = L/2$ på intervallet $[0, L]$. Da er koeffisientene b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ til sinusrekken

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

lik

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \text{ for jevne } n \\ \frac{4}{L} \int_0^{L/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx & , \text{ for odde } n \end{cases}$$

Gitt funksjonen f definert på intervallet $[0, 4]$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 2 \\ 8 - 2x & , 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

- Finn L og vis at funksjonen f er symmetrisk om $x = L/2$.
- Benytt setningen til å regne ut koeffisientene til sinusrekken til $f(x)$.
(Delvis fasit: $b_9 = \frac{32}{81\pi^2}$)

a) Finn L og vis at funksjonen f er symmetrisk om $x = L/2$.

Løsning: Funksjonen er definert på intervallet $[0, 4]$. Derfor er $L = 4$. Vi viser nå at $f(x)$ er symmetrisk om $x = 2$. La $x \in [0, 2)$. Da er $4 - x \in (2, 4]$. Følgelig er $f(4 - x) = 8 - 2(4 - x) = 2x = f(x)$. La $x \in (2, 4]$. Da er $4 - x \in [0, 2)$. Følgelig er $f(4 - x) = 2(4 - x) = 8 - 2x = f(x)$.

$f(x) = 2x$ når $0 \leq x \leq 2$ og $8 - 2x$ for $2 < x \leq 4$.

For $0 \leq x < 2 \rightarrow -2 < -x \leq 0 \rightarrow 2 < 4 - x \leq 4$,
så $f(4-x) = 8 - 2(4-x) = 2x = f(x)$

For $2 < x \leq 4 \rightarrow 0 \leq 4 - x < 2$,
så $f(4-x) = 2(4-x) = 8 - 2x = f(x)$

b) Benytt setningen til å regne ut koeffisientene til sinusrekken til $f(x)$.

(Delvis fasit: $b_9 = \frac{32}{81\pi^2}$)

Løsning: Vi bruker setningen fordi f tilfredstiller betingelsen i setningen. For jevne n er $b_n = 0$ og for odden n er

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \int_0^2 2x \sin \frac{n\pi x}{4} dx.$$

Vi bruker delvis integrasjon. La $u = 2x$ og $v' = \sin(\frac{n\pi x}{4})$. Da er $u' = 2$ og $v = -\frac{4 \cos(\frac{n\pi x}{4})}{n\pi}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \left[-\frac{8x \cos(\frac{n\pi x}{4})}{n\pi} \right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{8 \cos(\frac{n\pi x}{4})}{n\pi} dx \\ &= -\frac{16 \cos(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} - \left[-\frac{32 \sin(\frac{n\pi x}{4})}{n^2 \pi^2} \right]_0^2 \end{aligned}$$

b) Benytt setningen til å regne ut koeffisientene til sinusrekken til $f(x)$.

(Delvis fasit: $b_9 = \frac{32}{81\pi^2}$)

Løsning: Vi bruker setningen fordi f tilfredstiller betingelsen i setningen. For jevne n er $b_n = 0$ og for odde n er

$$b_n = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} 2x \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \frac{4}{n\pi} \int_0^2 2x \sin \frac{n\pi x}{4} dx.$$

Vi bruker delvis integrasjon. La $u = 2x$ og $v' = \sin(\frac{n\pi x}{4})$. Da er $u' = 2$ og $v = -\frac{4 \cos(\frac{n\pi x}{4})}{n\pi}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \left[-\frac{8x \cos(\frac{n\pi x}{4})}{n\pi} \right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{8 \cos(\frac{n\pi x}{4})}{n\pi} dx \\ &= -\frac{16 \cos(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} - \left[-\frac{32 \sin(\frac{n\pi x}{4})}{n^2 \pi^2} \right]_0^2 \end{aligned}$$

Det første leddet er lik null fordi n er odde. Derfor er

$$b_n = \frac{32 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2 \pi^2}.$$

Siden n er odde har vi at

$$b_n = \frac{32 (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 \pi^2}.$$

Merk at $b_n = 0$ når n er jamn.

For n odde er integralet for b_n lik $\int_0^2 u' v dx$ for u og v definert ovenfor.

Merk at for n odde ($n = 2m + 1$) er $\sin \pi n/2 = (-1)^m = (-1)^{(n-1)/2}$.

Tilfellene $k = 0$ og $k > 0$:

c) Finn alle løsninger på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ til den partielle differensialligningen

$$u_t = 2u_{xx} - 2u$$

med randbetingelser $u(0, t) = 0$ og $u(4, t) = 0$.

Løsning: Vi setter inn $F(x)G(t)$ for u inn i likningen.

$$F(x)G'(t) = 2F''(x)G(t) - 2F(x)G(t).$$

Deler vi på $F(x)G(t)$, får vi

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = 2 \frac{F''(x)}{F(x)} - 2.$$

Vi har derfor $F'' = kF$ for en konstant k . Randbetingelsene for u gir randbetingelser for F .

$$F(0) = F(4) = 0.$$

For $k = 0$ har vi løsningen $F(x) = Ax + B$. Randbetingelsene gir $F(0) = B = 0$ og $F(4) = 4A = 0$. Det gir $F(x) = 0$.

For $k = \lambda^2 > 0$ har vi løsningen $F(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$. Randbetingelsene gir $F(0) = A + B = 0$ og $F(4) = A(e^{4\lambda} - e^{-4\lambda}) = 0$. Det gir $F(x) = 0$.

Merk at både $k = 0$ og $k > 0$ gir $F(x) = 0$ (triviell løsning).

Tilfellet $k < 0$:

For $k = -\omega^2 < 0$ har vi løsningen $F(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$. Randbetingelsene gir $F(0) = A = 0$ og $F(4) = B \sin(4\omega) = 0$. For å unngå at $F(x) = 0$ så må $B \neq 0$. Da må $4\omega = n\pi$ der $n = 1, 2, 3, \dots$. Vi får derfor at

$$F(x) = B \sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vi har da at $k = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{16}$. Ligningen for G er da

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = -\frac{\pi^2 n^2}{8} - 2.$$

Denne har løsning

$$G(t) = e^{(-\frac{\pi^2 n^2}{8} - 2)t}$$

Løsningene er

$$u_n(x, t) = B_n e^{(-\frac{\pi^2 n^2}{8} - 2)t} \sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

For $k = -\omega^2 < 0$ er $B \neq 0$ og $\omega = n\pi/4$.

d) Bruk svaret fra oppgave c) til å løse den partielle differensialligningen

$$u_t = 2u_{xx} - 2u$$

med randbetingelser $u(0, t) = 0$ og $u(4, t) = 0$ og startbetingelse $u(x, 0) = f(x)$.

Løsning: Fra punkt c) får vi generell løsning

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{(-\frac{\pi^2 n^2}{8} - 2)t} \sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right).$$

Vi setter $t = 0$ og bruker startbetingelsen

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right).$$

Vi får derfor at $B_n = b_n$. Løsningen er derfor

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2} e^{(-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{8} - 2)t} \sin\left(\frac{\pi x(2n+1)}{4}\right).$$

Trykkfeil: $2n + 1$ i formelen nederst til høyre skal være $2n - 1$ for $n = 1, 2, \dots$.

3 a) Finn sinusrekken til funksjonen

$$g(x) = \sin^3 \pi x, \quad D_g = [0, 1].$$

Løsning: Vi skal altså finne en sinusrekke $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$. Før vi skriver opp integralene som vil gi oss koeffisientene b_1 , b_2 og så videre skriver vi om funksjonen $g(x)$ ved hjelp av trigonometriske identiteter.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin^3 \pi x = \sin^2 \pi x \sin \pi x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x) \sin \pi x \\ &= \frac{1}{2} \sin \pi x - \frac{1}{2} \sin \pi x \cos 2\pi x = \frac{1}{2} \sin \pi x - \frac{1}{4}(\sin(\pi x - 2\pi x) + \sin(\pi x + 2\pi x)) \\ &= \frac{1}{2} \sin \pi x - \frac{1}{4}(\sin(-\pi x) + \sin 3\pi x) = \frac{3}{4} \sin \pi x - \frac{1}{4} \sin 3\pi x. \end{aligned}$$

Her stopper vi siden $\frac{3}{4} \sin \pi x - \frac{1}{4} \sin 3\pi x$ er en sinusrekke og derfor er sinusrekken til $g(x)$ lik

$$\frac{3}{4} \sin \pi x - \frac{1}{4} \sin 3\pi x.$$

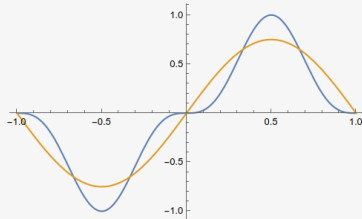
Resten av oppgaven er svært lik den forrige oppgaven (oppgave 3 H2020), og det overlates derfor her til den enkelte til å se på løsningsforslaget, som er tilgjengelig på hjemmesida.

```

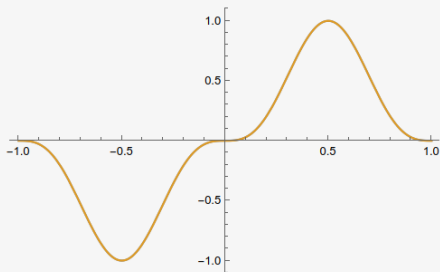
L=1;
f[x_]:=Sin[Pi x]^3;
g[x_]:=If[x>0,Return[f[x]],Return[-f[-x]]];
(***)
bn[n_]:=1/L Integrate[f[x] Sin[n Pi x/L],{x,-1,1}];
Print[bn/@Range[5]];
(***)
FR=FourierSinSeries[f[x],x,1,FourierParameters->{1,Pi}]
Plot[{f[x],%},{x,-1,1}]
FR=FourierSinSeries[f[x],x,2,FourierParameters->{1,Pi}]
Plot[{f[x],%},{x,-1,1}]
FR=FourierSinSeries[f[x],x,3,FourierParameters->{1,Pi}]
Plot[{f[x],%},{x,-1,1}]

```

$$\frac{3}{4} \sin[\pi x]$$



$$\frac{3}{4} \sin[\pi x] - \frac{1}{4} \sin[3\pi x]$$



```
L=1;
f[x_]:=Sin[Pi x]^3;
g[x_]:=If[x>0,Return[f[x]],Return[-f[-x]]];
bn[n_]:=1/L Integrate[f[x] Sin[n Pi x/L],{x,-1,1}];
Print[bn/@Range[5]];
```

$$\left\{\frac{3}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, 0\right\}$$

Startverdiproblemet fra oppgave 1c):

$$y'' + 2y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Oppgave 4

- a) Skriv om startverdiproblemet i oppgave 1 c) til et startverdisystem med to variabler $z_1 = y$ og $z_2 = y'$.
- b) Bruk Eulers metode med steglengde 0.1 til å finne for løsning av startverdisystemer i to variabler til å finne en tilnærming av $y_1(0.3)$ og $y_2(0.3)$ der $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er løsningen av startverdisystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - \cos y_2 \\ y_2' &= \cos y_1 - y_2 \end{aligned}$$

med startbetingelser $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

$$y'' + 2y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Løsning: Vi erstatter y' i startverdi problemet i oppgave 1 c) med z_2 .

$$z_2' + 2z_2 + 2y = f(t), \quad y(0) = 1, z_2(0) = 0$$

vi erstatter så y med z_1 .

$$z_2' + 2z_2 + 2z_1 = f(t), \quad z_1(0) = 1, z_2(0) = 0$$

Vi deriverer z_1 og z_2

$$\begin{aligned} z_1' &= y' \\ z_2' &= y'' \end{aligned}$$

Vi erstatter y' med z_2 og løser

$$z_2' + 2z_2 + 2z_1 = f(t)$$

m.h.p. z_2' .

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -2z_2 - 2z_1 + f(t) \end{aligned}$$

$$z_1 = y \text{ og } z_2 = y'$$

MERK: $f_1(u, v) = u - \cos v$ og $f_2(u, v) = \cos u - v$, og ikke som gitt nedenfor!

Løsning: Vi lar $v_{i,j}$ være tilnærming av den eksakte løsningen $y_i(t_j)$ der $t_j = 0.1 \cdot j$. Vi skal altså finne $v_{1,3} \approx y_1(0.3)$ og $v_{2,3} \approx y_2(0.3)$

$$v_{1,0} = 1$$

$$v_{2,0} = 1$$

Vi lar $f_1(y_1, y_2) = y_1 - 2y_2$ og $f_2(y_1, y_2) = 2y_1 - y_2$ Første trinn gir

$$v_{1,1} = v_{1,0} + h f_1(v_{1,0}, v_{2,0}) = 1 + 0.1 \cdot (1 - \cos 1) = 1.0460$$

$$v_{2,1} = v_{2,0} + h f_2(v_{1,0}, v_{2,0}) = 1 + 0.1 \cdot (\cos 1 - 1) = 0.9540$$

Andre trinn gir

$$v_{1,2} = v_{1,1} + h f_1(v_{1,1}, v_{2,1}) = 1.0460 + 0.1 \cdot (1.0460 - \cos(0.9540)) = 1.0928$$

$$v_{2,2} = v_{2,1} + h f_2(v_{1,1}, v_{2,1}) = 0.9540 + 0.1 \cdot (\cos(1.0460) - 0.9540) = 0.9087$$

Tredje trinn gir

$$v_{1,3} = v_{1,2} + h f_1(v_{1,2}, v_{2,2}) = 1.0928 + 0.1 \cdot (1.0928 - \cos(0.9087)) = 1.1406$$

$$v_{2,3} = v_{2,2} + h f_2(v_{1,2}, v_{2,2}) = 0.9087 + 0.1 \cdot (\cos(1.0928) - 0.9087) = 0.8638$$

Vi har derfor at $y_1(0.3) \approx 1.1406$ og $y_2(0.3) \approx 0.8638$.

Oppgave 1 (20%)

- a) (i) Skriv om oktadesimaltallet $(3743)_8$ til desimaltall.
 (ii) Skriv om tallet $7/15$ til binærtall.
 (iii) Skriv om binærtallet $(101.1001)_2$ til desimaltall.
- b) Når jeg skriver `num2hex(x)` så svarer MATLAB med den heksadesimalt representasjon a slik x er lagret i minnet:

`'409f8c0000000000'`.

- (i) Hvilket fortegn har x ?
 (ii) Finn eksponenten til x .
 (iii) Finn mantissen til x .
 (iv) Hvilket tall er x ?

Et tall på heksadesimalform bruker 16 siffer, sifrene 0 – 9 og bokstavene $a - f$.

$$(0)_{16} = (0)_{10} = (0000)_2$$

$$(1)_{16} = (1)_{10} = (0001)_2$$

$$(2)_{16} = (2)_{10} = (0010)_2$$

$$(3)_{16} = (3)_{10} = (0011)_2$$

$$(4)_{16} = (4)_{10} = (0100)_2$$

$$(5)_{16} = (5)_{10} = (0101)_2$$

$$(6)_{16} = (6)_{10} = (0110)_2$$

$$(7)_{16} = (7)_{10} = (0111)_2$$

$$(8)_{16} = (8)_{10} = (1000)_2$$

$$(9)_{16} = (9)_{10} = (1001)_2$$

$$(a)_{16} = (10)_{10} = (1010)_2$$

$$(b)_{16} = (11)_{10} = (1011)_2$$

$$(c)_{16} = (12)_{10} = (1100)_2$$

$$(d)_{16} = (13)_{10} = (1101)_2$$

$$(e)_{16} = (14)_{10} = (1110)_2$$

$$(f)_{16} = (15)_{10} = (1111)_2$$

Oppgave 1 (20%)

- a) (i) Skriv om oktadesimaltallet $(3743)_8$ til desimaltall.

Løsning: Vi har

$$((3 \cdot 8 + 7) \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 3 = (31 \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 3 = 252 \cdot 8 + 3 = 2019.$$

Oppgave 1 (20%)

- a) (i) Skriv om oktadesimaltallet $(3743)_8$ til desimaltall.

Løsning: Vi har

$$((3 \cdot 8 + 7) \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 3 = (31 \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 3 = 252 \cdot 8 + 3 = 2019.$$

- (ii) Skriv om tallet $7/15$ til binærtall.

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned}(7/15) \cdot 2 &= 14/15 + 0 \\(14/15) \cdot 2 &= 13/15 + 1 \\(13/15) \cdot 2 &= 11/15 + 1 \\(11/15) \cdot 2 &= 7/15 + 1 \\(7/15) \cdot 2 &= \dots\end{aligned}$$

Det er en periode på fire i sifrene og vi leser av ovenifra og får

$$7/15 = (0.\overline{0111})_2.$$

Oppgave 1 (20%)

- a) (i) Skriv om oktadesimaltallet $(3743)_8$ til desimaltall.

Løsning: Vi har

$$((3 \cdot 8 + 7) \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 3 = (31 \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 3 = 252 \cdot 8 + 3 = 2019.$$

- (ii) Skriv om tallet $7/15$ til binærtall.

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} (7/15) \cdot 2 &= 14/15 + 0 \\ (14/15) \cdot 2 &= 13/15 + 1 \\ (13/15) \cdot 2 &= 11/15 + 1 \\ (11/15) \cdot 2 &= 7/15 + 1 \\ (7/15) \cdot 2 &= \dots \end{aligned}$$

Det er en periode på fire i sifrene og vi leser av ovenifra og får

$$7/15 = (0.\overline{0111})_2.$$

- (iii) Skriv om binærtallet $(101.\overline{1001})_2$ til desimaltall.

Løsning: Tallet har to deler. Heltallsdelen er $(101)_2 = 4 + 1 = 5$. Vi finner brøkdelen x ved å sette $x = (0.\overline{1001})_2$. Da er $16x = (1001.\overline{1001})_2$. Da er $15x = 16x - x = (1001)_2 = 8 + 1 = 9$. Vi har folgelig. $x = 9/15 = 3/5$. Svaret er derfor

$$5 + 3/5 = 28/5.$$

- b) Når jeg skriver `num2hex(x)` så svarer MATLAB med den heksadesimalt representasjon av x slik x er lagret i minnet:

```
'409f8c0000000000'.
```

- (i) Hvilket fortegn har x ?

Løsning: Det er 16 heksadesimale siffer i `'409f8c0000000000'`. Det betyr at det er 64 bit. Dobbel presisjons IEEE flyttallsformat benytter 1 bit til fortegnet. Det er første bit. $(4)_{16} = (0100)_2$ så fortegnsbittet er lik 0 og tallet er **positivt**.

- (ii) Finn eksponenten til x .

Løsning: Dobbel presisjons IEEE flyttallsformat benytter 11 bit til eksponenten. Det er i dette tilfellet $(409)_{16} = (100\ 0000\ 1001)_2 = 1024 + 8 + 1 = 1033$. Eksponentene regnes ut ved å trekke 1023 fra 1033. Den er derfor lik

$$e = 10.$$

- b) Når jeg skriver `num2hex(x)` så svarer MATLAB med den heksadesimale representasjon av x slik x er lagret i minnet:

`'409f8c0000000000'`.

- (i) Hvilket fortegn har x ?

Løsning: Det er 16 heksadesimale siffer i `'409f8c0000000000'`. Det betyr at det er 64 bit. Dobbel presisjons IEEE flyttallsformat benytter 1 bit til fortegnet. Det er første bit. $(4)_{16} = (0100)_2$ så fortegnsbittet er lik 0 og tallet er **positivt**.

- (ii) Finn eksponenten til x .

Løsning: Dobbel presisjons IEEE flyttallsformat benytter 11 bit til eksponenten. Det er i dette tilfellet $(409)_{16} = (100\ 0000\ 1001)_2 = 1024 + 8 + 1 = 1033$. Eksponentene regnes ut ved å trekke 1023 fra 1033. Den er derfor lik

$$e = 10.$$

- (iii) Finn mantissen til x .

Løsning: Mantissaen fås fra de siste 52 bit-ene av `'409f8c0000000000'` Dvs

$$m = \mathbf{1.f8c} = 1 + 15/16 + 8/16^2 + 12/16^3 = 1.9716796875.$$

Det ledende ett-tallet er ikke lagret på maskinen.

- (iii) Skriv om binærtallet $(101.\overline{1001})_2$ til desimaltall.

Løsning: Tallet har to deler. Heltallsdelen er $(101)_2 = 4+1 = 5$. Vi finner brøkdelen x ved å sette $x = (0.\overline{1001})_2$. Da er $16x = (1001.\overline{1001})_2$. Da er $15x = 16x - x = (1001)_2 = 8 + 1 = 9$. Vi har følgelig $x = 9/15 = 3/5$. Svaret er derfor

$$5 + 3/5 = 28/5.$$

- (iii) Skriv om binærtallet $(101.\overline{1001})_2$ til desimaltall.

Løsning: Tallet har to deler. Heltallsdelen er $(101)_2 = 4+1 = 5$. Vi finner brøkdelens x ved å sette $x = (0.\overline{1001})_2$. Da er $16x = (1001.\overline{1001})_2$. Da er $15x = 16x - x = (1001)_2 = 8 + 1 = 9$. Vi har følgelig $x = 9/15 = 3/5$. Svaret er derfor

$$5 + 3/5 = 28/5.$$

- (iv) Hvilket tall er x ?

Løsning: Vi regner ut tallet og får

$$x = 1.9716796875 \cdot 2^{10} = 2019.$$

Merk at

$$1.9716796875 \times 2^{10} = (1 + 9716796875/10000000000) \times 2^{10} = (1 + 995/1024) \times 2^{10} = (1024 + 995)/2^{10} \times 2^{10} = 1024 + 995 = 2019.$$

Fra forrige lysark har vi at $m = 1 + 15/16 + 8/16^2 + 12/16^3 = 3980/16^3 = 995/1024$ (jfr. over).

Oppgave 2 (20%)

a) Løs systemet

$$\begin{aligned} 10^{-22}x + 2y &= 4 \\ x - 3y &= 1 \end{aligned}$$

og gi svaret på desimalform.

Løsning: Vi setter opp total-matrisen og pivoterer først. Deretter utfører vi Gauss-eliminering og tilbakeinnsetting

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-22} & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\leftarrow} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 10^{-22} & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\leftarrow +}^{(-10^{-22})} \\ & \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 + 3 \cdot 10^{-22} & 4 - 10^{-22} \end{array} \right] \xrightarrow{\leftarrow +}^{(-10^{-22})} \end{aligned}$$

Først finner vi

$$y = \frac{4 - 10^{-22}}{2 + 3 \cdot 10^{-22}} \approx 2.$$

der vi har brukt alle sifre på lommeregneren. Fra første linje får vi $x = 1 + 3y = 7$. Løsningen er derfor

$$(x, y) = (7, 2).$$

(Uten pivotering ville man fått $(x, y) = (0, 2)$ som er feil svar.)

b) Løs likningen

$$x^2 - 5x + 10^{-20} = 0$$

Vi skal løse andregradsligningen $x^2 - 5x + 10^{-20} = 0$.

og gi svaret på desimalform.

Løsning: Likningen har to løsninger og vi må passe på at vi ikke trekker to svært like tall fra hverandre. Vi får to løsninger

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 10^{-20}}}{2} = 5$$

og

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 10^{-20}}}{2}.$$

Den siste blir null hvis vi ikke er forsiktig. Vi løser problemet med differensen av to like tall ved å gange med $5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 10^{-20}}$ i teller og nevner.

$$x_2 = \frac{(5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 10^{-20}})(5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 10^{-20}})}{2(5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 10^{-20}})} = \frac{25 - 25 + 4 \cdot 10^{-20}}{20} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-20}.$$

Løsningen er

$$x = 5 \quad \vee \quad x = 2 \cdot 10^{-21}.$$

c) Finn $PA = LU$ faktoriseringen til matrisen. Husk delvis pivoting.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi må igjen huske på pivoting

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0.5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ (\frac{1}{2}) & 1 & -2 \\ (\frac{1}{4}) & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ (\frac{1}{2}) & 1 & -2 \\ (\frac{1}{4}) & (\frac{1}{2}) & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Vi har derfor

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi regner ut P :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P.$$

Matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ har egenverdiene -5,-2 og 1.

- a) Vis at påstanden over er riktig.
- b) Bestem så egenverdiene til matrisa.

Matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ har egenverdiene -5, -2 og 1.

- a) Vis at påstanden over er riktig.
- b) Bestem så egenverdiene til matrisa.

SVAR:

- a) Det karakteristiske polynomet til matrisa er $p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10$, som har nullpunktene -5, -2 og 1. (Hvordan løse $p(\lambda) = 0$?¹)

¹For slike moniske polynomligninger med heltallskoeffisienter må en heltallsrot dividere konstantleddet. (At polynomet er monisk betyr bare at koeffisienten for den høyeste potensen av den ukjente er 1.) Så, eneste mulige heltallsrøtter av $p(\lambda) = 0$ er $\pm 1, \pm 2$ eller ± 5 . Det er lett å se at $p(-5) = p(-2) = p(1) = 0$. ($p(\lambda) = 0$ kan heller ikke ha flere enn disse røttene (hvorfor?).)

Matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ har egenverdiene -5,-2 og 1.

- a) Vis at påstanden over er riktig.
- b) Bestem så egenverdiene til matrisa.

SVAR:

- a) Det karakteristiske polynomet til matrisa er $p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10$, som har nullpunktene -5, -2 og 1. (Hvordan løse $p(\lambda) = 0$?¹)

Vi kan bruke potensiterasjonsmetoden til å bestemme en egenverdi λ_m (si den største egenverdi i tallverdi), og så se om vi kan dermed redusere den karakteristiske ligningen fra å være en tredjegradslikning til å bli andregradslikningen $p(\lambda)/(\lambda - \lambda_m)$.²

¹For slike moniske polynomlikninger med heltallskoeffisienter må en heltallsrot dividere konstantleddet. (At polynomet er monisk betyr bare at koeffisienten for den høyeste potensen av den ukjente er 1.) Så, eneste mulige heltallsrøtter av $p(\lambda) = 0$ er ± 1 , ± 2 eller ± 5 . Det er lett å se at $p(-5) = p(-2) = p(1) = 0$. ($p(\lambda) = 0$ kan heller ikke ha flere enn disse røttene (hvorfor?).)

²For eksemplet vårt er $\lambda_m = -5$ og den tilhørende andregradslikningen er $\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda + 2) \times (\lambda - 1) = 0$ med egenverdiene -2 og 1 i tillegg til -5.

Matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ har egenverdiene -5, -2 og 1.

- a) Vis at påstanden over er riktig.
- b) Bestem så egenverdiene til matrisa.

SVAR:

- a) Det karakteristiske polynomet til matrisa er $p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10$, som har nullpunktene -5, -2 og 1. (Hvordan løse $p(\lambda) = 0$?¹)

Vi kan bruke potensiterasjonsmetoden til å bestemme en egenverdi λ_m (si den største egenverdi i tallverdi), og så se om vi kan dermed redusere den karakteristiske ligningen fra å være en tredjegradsligning til å bli andregradsligningen $p(\lambda)/(\lambda - \lambda_m)$.²

- b) Egenverdiene er $(-2, -1, 2)$, $(2, -2, 1)$ og $(1, 2, 2)$. (Vise dette selv!)

¹For slike moniske polynomligninger med heltallskoeffisienter må en heltallsrot dividere konstantleddet. (At polynomet er monisk betyr bare at koeffisienten for den høyeste potensen av den ukjente er 1.) Så, eneste mulige heltallsrøtter av $p(\lambda) = 0$ er ± 1 , ± 2 eller ± 5 . Det er lett å se at $p(-5) = p(-2) = p(1) = 0$. ($p(\lambda) = 0$ kan heller ikke ha flere enn disse røttene (hvorfor?).)

²For eksemplet vårt er $\lambda_m = -5$ og den tilhørende andregradsligningen er $\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda + 2) \times (\lambda - 1) = 0$ med egenverdiene -2 og 1 i tillegg til -5.

Oppgave 5 (20%) Vi vil løse likningsystemet

$$\begin{aligned}x^3 - 2xy + y^2 + 1 &= 0 \\x + y^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

a) Finn Jacobimatrisen til $F(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 - 2xy + y^2 + 1 \\ x + y^2 - 1 \end{bmatrix}$.

Løsning: Jacobimatrisen er

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3x^2 - 2y) & (-2x + 2y) \\ 1 & 2y \end{bmatrix}.$$

b) Gjør en iterasjon med multivariabel Newtons metode for numerisk løsning av systemet over.

Start med $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

Løsning: Vi har $F(-1, -1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $DF(-1, -1) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Vi har

$$S = DF(1, 1)^{-1} F(1, 1) = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}.$$

$$X_1 = X_0 - S = (-1, -1) - (-1/5, 2/5) = (-4/5, -7/5).$$

Oppgave 4 (15%)

Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$.

- a) Regn ut $\|A\|_\infty$ og $\|A\|_1$.
- b) Finn en vektor v slik at $\|Av\|_\infty = \|A\|_\infty \|v\|_\infty$
- c) Finn en vektor w slik at $\|Aw\|_1 = \|A\|_1 \|w\|_1$

Her skal rad/kolonnesum være **absolutt** radsum/kolonnesum.

- 4 a) Vi skal finne $\|A\|_\infty$ til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Det er maksimal radsum er $\|A\|_\infty = |-4| + 1 + |-6| = 11$.

Vi skal finne $\|A\|_1$ til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Det er maksimal kolonnesum: $\|A\|_1 = 6 + 2 + |-4| = 12$.

b) En slik vektor er $v = [-1 \ 1 \ -1]^T$ fordi

$$\|Av\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -11 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \max\{|2|, |7|, |-11|\} = 11$$

er lik $\|A\|_{\infty}/\|v\|_{\infty} = 11/1 = 11$.

c) En slik vektor er $w = [1 \ 0 \ 0]^T$ fordi

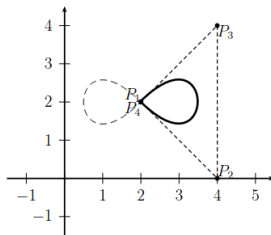
$$\|Aw\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\|_1 = |6| + |2| + |-4| = 12$$

er lik $\|A\|_1/\|w\|_1 = 12/1 = 12$.

Oppgave 6 (10%)

Figur 1 viser to bezierkurver som til sammen fremstiller et ∞ -tegn.

- a) Bezierkurven til høyre i figur 1 er bestemt av punktene $P_1(2, 2)$, $P_2(4, 0)$, $P_3(4, 4)$ og $P_4(2, 2)$. Bestem parametriseringen $(x(t), y(t))$ til kurven.
- b) Angi kontrollpunktene for den stiplede tynne bezierkurven.



- 6 a) Vi bruker formelen gitt på forelesning i stedet for den i boka.

$$B(t) = (1-t)^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ekspansjon gir

$$B(t) = \begin{bmatrix} 2 + 6t - 6t^2 \\ 2 - 6t + 18t^2 - 12t^3 \end{bmatrix}$$

- b) Speilingen av kurven er gitt ved å speile x-vediene om linjen verdien 2. Det fås ved å translater 2 til 0, skifte fortegn for så å translater fra 0 til 2

$$x \mapsto x - 2 \mapsto -(x - 2) \mapsto -(x - 2) + 2 = 4 - x.$$

Formel for speilet $B(t)$ er

$$C(t) = \begin{bmatrix} 4 - (2 + 6t - 6t^2) \\ 2 - 6t + 18t^2 - 12t^3 \end{bmatrix}$$

Vi deriverer for å finne kontrollpunktene

$$C'(t) = \begin{bmatrix} -6 + 12t \\ -6 + 36t - 36t^2 \end{bmatrix}$$

Første kontrollpunkt er

$$C(0) + \frac{1}{3}C'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Andre kontrollpunkt er

$$C(1) - \frac{1}{3}C'(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Det gis også poeng for å si noe som for eksempel. Kontrollpunktene er også speilet om den vertikale linjen $x = 2$ slik som kurven. Det gir kontroll punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Symmetri om linja $x = 2$ gir den alternative måten å beregne kontrollpunktene P_2 og P_3 på. Denne metoden er å foretrekke dette spesialtilfellet da den gir minst regnearbeid. Metoden ovenfor er mer generell.

Oppgave 1

- a) i) Skriv om desimaltallet 2017 til binært.
 ii) Skriv om brøken $1/7$ til binært.

I standarden IEEE 754 halv-presisjon er 16 bit brukt til å presentere et flyttall. En bit brukes til fortegnet, 5 bit til eksponenten og 10 bit brukes til mantissan. Tallet $1.b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10} \cdot 2^e$ er lagret som

$$\boxed{s \mid e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \mid b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \ b_7 \ b_8 \ b_9 \ b_{10}} \quad ,$$

der $(e_1e_2e_3e_4e_5)_2 = e + 15$ og $s = 0$ for positive tall og $s = 1$ for negative tall.

- b) i) Hvordan er 2017 lagret i IEEE 754 halv-presisjon?
 ii) Hvordan er $1/7$ lagret i IEEE 754 halv-presisjon?
 iii) Hva er maskin epsilon i IEEE 754 halv-presisjon?

- 1 a) (i) Vi deler på 2 suksessivt inntil vi sitter igjen med 0. Restene blir sifrene i binærutviklingen av tallet.

$$\begin{array}{rcl}
 2017/2 & = & 1008 \text{ Rest } 1 \\
 1008/2 & = & 504 \text{ Rest } 0 \\
 504/2 & = & 252 \text{ Rest } 0 \\
 252/2 & = & 126 \text{ Rest } 0 \\
 126/2 & = & 63 \text{ Rest } 0 \\
 63/2 & = & 31 \text{ Rest } 1 \\
 31/2 & = & 15 \text{ Rest } 1 \\
 15/2 & = & 7 \text{ Rest } 1 \\
 7/2 & = & 3 \text{ Rest } 1 \\
 3/2 & = & 1 \text{ Rest } 1 \\
 1/2 & = & 0 \text{ Rest } 1
 \end{array} \tag{1}$$

Svaret er $2017 = (111\ 1110\ 0001)_2$

- (ii)

$$\begin{array}{rcl}
 1/7 \cdot 2 & = & 2/7 \text{ } +0 \\
 2/7 \cdot 2 & = & 4/7 \text{ } +0 \\
 4/7 \cdot 2 & = & 1/7 \text{ } +1 \\
 1/7 \cdot 2 & = & 2/7 \text{ } +0 \\
 2/7 \cdot 2 & = & 4/7 \text{ } +0
 \end{array} \tag{2}$$

Vi ser at mønsteret 0 0 1 gjentar seg i det uendelige.

$$1/7 = (0.\overline{001})_2.$$

- b) (i) Først skriver vi om 2017 på formen $(1.1111100001)_2 \cdot 2^{10}$. Det gir $e = 15 + 10 = 25 = 16 + 8 + 1 = (11001)_2$. Fortegnet er positivt så $s = 0$. Vi har da

0	11001	1111100001
---	-------	------------

- (ii) Vi skriver om $1/7$ på formen $(1.001001001001\dots)_2 \cdot 2^{-3}$. Det gir $e = 15 + (-3) = 12 = 8 + 4 = (01100)_2$. Fortegnet er positivt så $s = 0$. Vi har da

0	01100	0010010010
---	-------	------------

Vi har rundet nedover fordi det gir minst feil.

- (iii) Maskin epsilon er forskjellen mellom 1 og det minste tallet større enn 1 som kan skrives i standarden.

$$\varepsilon_{mach} = (1.0000000001) - 1 = 2^{-10}.$$

Oppgave 2 Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ og $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- a) Anta at likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skal løses. Begrunn hvorfor systemet er mulig eller ikke mulig å løse ved Gauss-Seidel iterasjon.
- b) Utfør en $PA = LU$ -faktorisering av A .
- c) Bruk $PA = LU$ faktoriseringen til å løse systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Fasit 2c): $x_1 = 1/12$, $x_2 = 5/12$, $x_3 = 1/4$.

Her er det nedenfor strengt tatt en noe upresis formulering om Gauss-Seidel (GS) metoden.¹ Strengt diagonaldominant koeffisientmatrise A er en tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse for konvergens av GS (og Jacoby (J)) metoden.

GS metoden for en ikke strengt diagonaldominant matrise kan konvergere, men vi kan **ikke garantere** konvergens.²

- 2 a) Slik matrisen er skrevet er den ikke diagonal dominant og vi kan ikke bruke Gauss-Seidel. Om vi bytter om på første og andre rad vil den være diagonal dominant men ikke strengt diagonal dominant. Det gis full uttelling om det skrives noe fornuftig om diagonal dominant eller strengt diagonal dominant.

¹Dette er sakset fra løsningsforslaget som er tilgjengelig på hjemmesida.

²**IKKE PENSUM:** En tilstrekkelig og nødvendig betingelse for konvergens av J/GS metodene er at den såkalte spektralradien $\rho(C) = \max|\lambda| < 1$ (tatt over alle egenvektorer til C) for fikspunktiterasjonsmetoden $x^{(n+1)} = C x^{(n)} + g$. (Slike metoder inkluderer J og GS metodene.)

b)

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\leftarrow]{\begin{smallmatrix} \text{ } \\ \text{ } \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow+]{(1/3)} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5/3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow+]{(1/3)} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi har

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}$$

Med disse verdiene er $PA = LU$.

- c) Fra $Ax = b$ får vi $PAx = Pb$ og $LUx = Pb$. Først løses $Lc = Pb$ for c . Deretter løses $Ux = c$ for x . Høyresiden er $Pb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Løsningen av $Lc = Pb$ er $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ og $c_3 = 1/3$. Løsningen av $Ux = c$ er

$$x_3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4},$$

$$x_2 = \frac{1 + x_3}{3} = \frac{5}{12},$$

$$x_1 = \frac{0 + x_3}{3} = \frac{1}{12}.$$