Differensligninger

- $\{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Rekursive skrivemåte

Eksplisitt

$$a_n = 1{,}03^{n-1}$$

$$a_0 = 100000$$

Differensligning:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Første orden differensligning

Aritmetisk følge:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

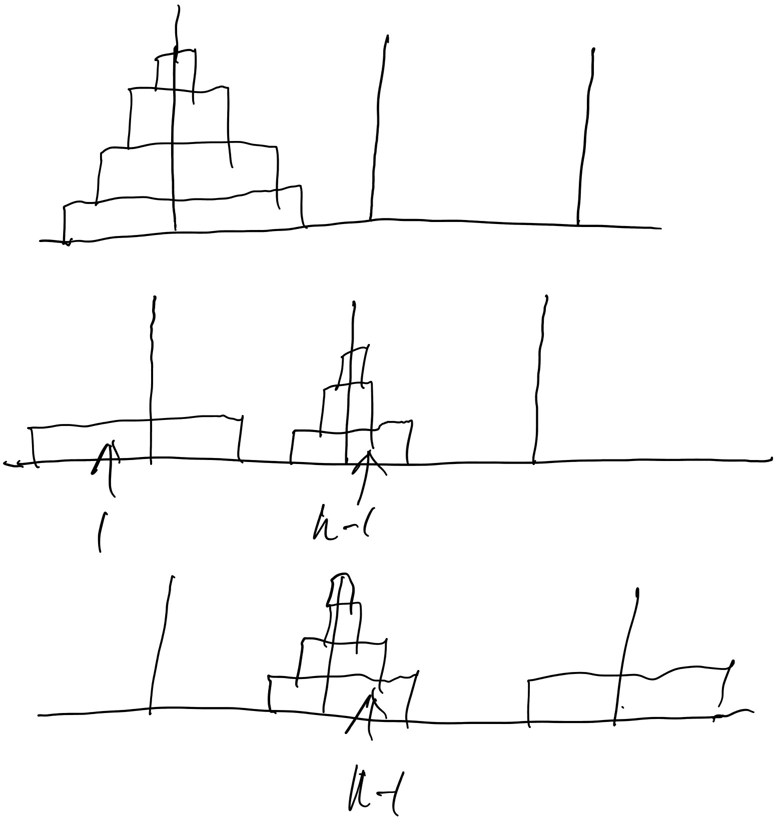
$$a_n = a_0 + dn$$

Geometrisk følge

$$a_n = r\,a_{n-1}$$

$$a_n = r^n a_0$$

Hanois tårn:



$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2\cdot 1 + 1 = 2^1 + 2^0$$

$$a_2 = 2(2\cdot 1 + 1) + 1$$

$$= 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$a_3 = 2(2^2 + 2^1 + 2^0) + 1$$

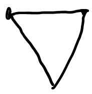
$$= 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

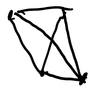
$$a_n = \sum_{n=0}^{n} 2^n = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$$

Theorem 5.2.3 i Eppa:

 0 , $n=1$

 1 , $n=2$

 $1+2=3$, $n=3$

 $1+2+3$, $n=4$

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

$$a_n = \sum_{0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

Theorem 5.2.2 i Eppa

2. ordens differensligninger

$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2} + 0$$

Konstant

lineær

Homogen

Lineær homogen 2. orden differensligning med konstante koeffisienter.

$t \rightarrow$ Et hvilket som helst tall

Antar at følgen har løsninger som

$\{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n\}$ — **Antakelse**

$m_k = t^k$

$$t^k = A t^{k-1} + B t^{k-2}$$

Differensligning

$$m_k = A m_{k-1} + B m_{k-2}$$

$m_k = t^k$

$$t^k = A t^{k-1} + B \cdot t^{k-2}$$

Deler ligningen med t^{k-2}

$$t^{k-(k-2)} = A t^{k-1-(k-2)} + B t^{k-2-(k-2)}$$

$$t^2 = At + B$$ — Karakteristisk ligning

Dette kan løses for t

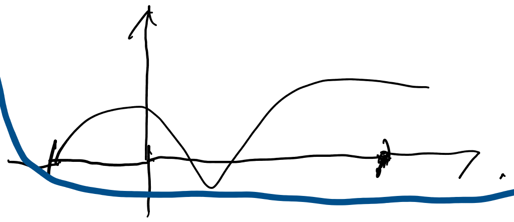
Dersom den karakteristiske ligningen har to røtter, så gjelder (I Epp, theorem 5.8.3):

$$a_n = Cr^n + Ds^n$$

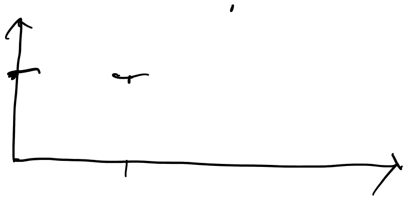
Der r og s er ~~de~~ de to røttene av karakteristisk ligning.

$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$



digresjon.



$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2}$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$A = 1, \ B = 1$$

$$t^2 - At - B = 0$$ ← karakteristisk ligning.

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Teorem 5.8.3:

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot C + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot D$$

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot C + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot D$$

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$

$$a_0 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 \cdot C + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \cdot D$$

$$= C + D = 1$$

$$a_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot C + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot D$$

$$C = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad D = \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$t^2 - At - B = 0$$

$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2}$$

$$a_n = C r^n + D s^n$$

Hva om differenslikningen bare har en rot?

Theorem 5.8.5 s Epp

Derom bare en rot r,

så

$$a_n = C r^n + D n r^n$$

Differensligning

1. orden

Skriv opp noen av de første leddene

Ser et mønster

Bevis ved induksjon

Aritmetisk følge

Geometrisk følge

Kanter

Hanoi tårn

Geometrisk rekke

algebraisk

Formler for rekker

2 orden

Teorem

$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2}$

Løs karakteristisk ligning: $t^2 - At - B = 0$

Bruk initialbetingelser til å sette opp to lineære ligninger.

truls.h.oi@ntnu.no

Differensligning med en rot.

$$b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 3$$

$$t^2 - At - B = 0$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0$$

$$b_n = C \cdot 2^n + Dn \cdot 2^n$$

$$b_0 = 1 = C \cdot 2^0 + D \cdot 0 \cdot 2^0$$

$$C = 1$$

$$b_1 = 3$$

$$C \cdot 2^1 + D \cdot 1 \cdot 2^1 = 3$$

$$2^1 + D \cdot 2 = 3$$

$$D = \frac{1}{2}$$

$$b_n = 1 \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n$$

$$= 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$