



Forelesning VII

IMAT2150: Høsten 2023

Kent Holing, NTNU (12. september 2023)

LÆRINGSMÅL for dagens forelesning

IVP = Initial Value Problem

- Grunnleggende teori ("IVP basics") (S: 6.1)
- Analyse av IVP løsere (S: 6.2)
- System av første ordens ligninger/
Høyere ordens ligninger (S: 6.3)

Definisjon

En ordinær differensialligning av første orden er en ligning på formen

$$y' = f(x, y) .$$

En eksakt løsning $y(x)$ på et intervall (a, b) oppfyller $y'(x) = f(x, y(x))$ for alle $x \in (a, b)$.

Eksempel

Ligningen $y' = x^2 y$ har løsningene $y(x) = C e^{x^3/3}$ (C reell konstant).¹

¹Ligningen er en enkel såkalt separabel differensialligning der en kan bestemme den eksakte løsningen.

Definisjon

En ordinær første ordens differentialligning $y' = f(x, y)$ med startbetingelsen $y(x_0) = y_0$ kalles et **initialverdiproblem** (IVP).

Eksempel

$y' = -y/x, y(1) = 1$ har eksakt løsning $y(x) = 1/x$.¹

¹Ligningen her er også en enkel såkalt separabel differentialligning. (Jfr. forrige eksempel.)

Differensiallignings
 Eksemplene er
 separable med et unntak

$$y'(x) = x^2 y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\ln y = \frac{1}{3} x^3 + C_1$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{3} x^3} \cdot e^{C_1}$$

$$y(x) = C e^{x^3/3} \quad \checkmark$$

IVP: $y'(x) = -y/x$
 $y(1) = 1$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln y = \ln \frac{1}{x} + C$$

$$y^{(x)} = \frac{1}{x} + C$$

$$C = 0$$

$$\underline{y(x) = 1/x \quad \checkmark}$$

Definisjon

En funksjon $f(x, y)$ sies å være **Lipschitz kontinuerlig i y** på rektangelet $R = [a, b] \times [c, d]$ hvis det finnes en konstant L (**Lipschitz-konstanten**) slik at

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L |y_2 - y_1|$$

for alle punktpar (x, y_1) og (x, y_2) i R .¹

¹Det finnes mer generelle versjoner av denne betingelse.

Definisjon

En funksjon $f(x, y)$ sies å være **Lipschitz kontinuerlig i y** på rektangelet $R = [a, b] \times [c, d]$ hvis det finnes en konstant L (**Lipschitz-konstanten**) slik at

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L |y_2 - y_1|$$

for alle punktpar (x, y_1) og (x, y_2) i R .¹

Spesialtilfelle

Hvis $f(x, y)$ er **kontinuerlig deriverbar i y** slik at $|\partial f(x, y)/\partial y| < M$ på rektanglet R , da kan Lipschitz-konstanten tas som M .

¹Det finnes mer generelle versjoner av denne betingelse.

Definisjon

En funksjon $f(x, y)$ sies å være **Lipschitz kontinuerlig i y** på rektangelet $R = [a, b] \times [c, d]$ hvis det finnes en konstant L (**Lipschitz-konstanten**) slik at

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L |y_2 - y_1|$$

for alle punktpar (x, y_1) og (x, y_2) i R .¹

Spesialtilfelle

Hvis $f(x, y)$ er **kontinuerlig deriverbar i y** slik at $|\partial f(x, y)/\partial y| < M$ på rektanglet R , da kan Lipschitz-konstanten tas som M .

Eksempler

- $y' = y$ er Lipschitz² på **alle rektangler** da $L = 1$ her.
- $y' = \sqrt{y}$ er **ikke** Lipschitz på rektangler som inneholder deler av x -aksen.³

¹Det finnes mer generelle versjoner av denne betingelse.

²Vi sier at $f(x, y)$ og det tilhørende initialverdiproblemet er Lipschitz hvis $f(x, y)$ er kontinuerlig og Lipschitz kontinuerlig i y .

³Velg y_1 og y_2 i R med motsatt fortegn.

Teorem (teorem 6.2 i SAUER)

Hvis $y' = f(x, y)$ og $y(a) = y_a$ for $x \in [a, b]$ er Lipschitz på $[a, b] \times [c, d]$ og $c < y_a < d$, så finnes det en $s \in (a, b)$ slik at startverdi problemet har én og bare én løsning for $x \in [a, s]$. (Det omvendte gjelder ikke.¹)

MERK:

Er $f(x, y)$ Lipschitz kontinuerlig i y på $[a, b] \times (-\infty, \infty)$, så har startverdi problemet en entydig løsning i hele intervallet $[a, b]$.

¹Vi gir et eksempel senere.

Teorem (teorem 6.2 i SAUER)

Hvis $y' = f(x, y)$ og $y(a) = y_a$ for $x \in [a, b]$ er Lipschitz på $[a, b] \times [c, d]$ og $c < y_a < d$, så finnes det en $s \in (a, b)$ slik at startverdi problemet har én og bare én løsning for $x \in [a, s]$. (Det omvendte gjelder ikke.¹)

MERK:

Er $f(x, y)$ Lipschitz kontinuerlig i y på $[a, b] \times (-\infty, \infty)$, så har startverdi problemet en entydig løsning i hele intervallet $[a, b]$.

NB:

Merk at selv om et IVP er Lipschitz som nevnt ovenfor, så kan vi ikke garantere at vi har en løsning i hele $[a, b]$! Løsningen kan komme utenfor $[c, d]$ for t der Lipschitz-betingelsen er gyldig.

Dette er spesielt viktig å være oppmerksom hvis vi skal løse et IVP numerisk.

Vi illustrerer med et eksempel på hva som kan skje. (Example 6.5 i SAUER (s. 288–289).)

¹Vi gir et eksempel senere.

Eksempel 6.5 (SAUER)

Definer $y' = y^2$ med $y(0) = 1$ for $t \in [0, 2]$.

Vi har at $\partial f(t, y)/\partial y = 2y$, så Lipschitz-konstanten 20 er gyldig på rektanglet $R = [0, 2] \times [-10, 10]$ i t, y -planet.

Startverdi-problemet har løsningen $y(t) = 1/(1 - t)$.¹

¹Ligningen er en separabel ligning og er lett å løse eksakt.

Eksempel 6.5 (SAUER)

Definer $y' = y^2$ med $y(0) = 1$ for $t \in [0, 2]$.

Vi har at $\partial f(t, y)/\partial y = 2y$, så Lipschitz-konstanten 20 er gyldig på rektanglet $R = [0, 2] \times [-10, 10]$ i t, y -planet.

Startverdi-problemet har løsningen $y(t) = 1/(1 - t)$.¹

Vi ser at $y(t) \rightarrow \infty$ når $0 < t \rightarrow 1$.

Lipschitz-konstanten 20 er gyldig for $|y| \leq 10$, men løsningen $y(t)$ kommer utenfor R før t når 2.

¹Ligningen er en separabel ligning og er lett å løse eksakt.

Eksempel 6.5 (SAUER)

Definer $y' = y^2$ med $y(0) = 1$ for $t \in [0, 2]$.

Vi har at $\partial f(t, y)/\partial y = 2y$, så Lipschitz-konstanten 20 er gyldig på rektanglet $R = [0, 2] \times [-10, 10]$ i t, y -planet.

Startverdi-problemet har løsningen $y(t) = 1/(1 - t)$.¹

Vi ser at $y(t) \rightarrow \infty$ når $0 < t \rightarrow 1$.

Lipschitz-konstanten 20 er gyldig for $|y| \leq 10$, men **løsningen $y(t)$ kommer utenfor R før t når 2.**

M.a.o. løsningen eksisterer på intervallet $t \in [0, c]$ for alle $0 < c < 1$, men ikke for noen $c \geq 1$.

¹Ligningen er en separabel ligning og er lett å løse eksakt.

$$y'(t) = y^2$$

$$y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt$$

$$-1/y = t + C_p$$

$$-1 = C$$

$$1/y = 1 - t$$

$$y(t) = 1/(1-t)$$

INTERMESSO

Hvorfor trenger vi numeriske metoder for løsning av differentialligninger?

1) Differensialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{y^2 + 1/2}$ med $y(0) = 0$ har en løsning $y(x)$ som er gitt **implisitt** ved $2(x - y) + \arctan y = 0$.

Det kan vises at for alle $x > 0$, så finnes entydig $y(x)$ i $[x, x + \pi/4]$.

1) Differensialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{y^2 + 1/2}$ med $y(0) = 0$ har en løsning $y(x)$ som er gitt **implisitt** ved $2(x - y) + \arctan y = 0$.

Det kan vises at for alle $x > 0$, så finnes entydig $y(x)$ i $[x, x + \pi/4]$.

2) Startverdi problemet $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ med $y(0) = 0$ er ikke Lipschitz, men har en **entydig løsning** i intervallet $[0, 1/2]$.¹

En lukket løsning er ikke kjent. Og, det kan tenkes at om en slik løsning ble kjent, så ville det være av liten verdi hvis vi allikevel må ha tallverdier, dvs. være avhengig av numerisk løsning.

¹Så Lipschitz-betingelsen er **en tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse** for at entydig løsning eksisterer på et intervall (ref. teorem 6.2 ovenfor).

- 1) Differensialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{y^2 + 1/2}$ med $y(0) = 0$ har en løsning $y(x)$ som er gitt **implisitt** ved $2(x - y) + \arctan y = 0$.

Det kan vises at for alle $x > 0$, så finnes entydig $y(x)$ i $[x, x + \pi/4]$.

- 2) Startverdi problemet $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ med $y(0) = 0$ er ikke Lipschitz, men har en **entydig løsning** i intervallet $[0, 1/2]$.¹

En lukket løsning er ikke kjent. Og, det kan tenkes at om en slik løsning ble kjent, så ville det være av liten verdi hvis vi allikevel må ha tallverdier, dvs. være avhengig av numerisk løsning.

- 3) Startverdi problemet $\frac{dy}{dx} = 1 - 2xy$ med $y(0) = 0$ er Lipschitz.

Problemet har en entydig løsning for $x \in [0, 1]$.

¹Så Lipschitz-betingelsen er **en tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse** for at entydig løsning eksisterer på et intervall (ref. teorem 6.2 ovenfor).

1) Differensialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{y^2 + 1/2}$ med $y(0) = 0$ har en løsning $y(x)$ som er gitt **implisitt** ved $2(x - y) + \arctan y = 0$.

Det kan vises at for alle $x > 0$, så finnes entydig $y(x)$ i $[x, x + \pi/4]$.

2) Startverdi problemet $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ med $y(0) = 0$ er ikke Lipschitz, men har en **entydig løsning** i intervallet $[0, 1/2]$.¹

En lukket løsning er ikke kjent. Og, det kan tenkes at om en slik løsning ble kjent, så ville det være av liten verdi hvis vi allikevel må ha tallverdier, dvs. være avhengig av numerisk løsning.

3) Startverdi problemet $\frac{dy}{dx} = 1 - 2xy$ med $y(0) = 0$ er Lipschitz.

Problemet har en entydig løsning for $x \in [0, 1]$.

Løsningen er $y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$. Men, integralet er ikke elementært, dvs. må tilnærmes numerisk ved hjelp av numerisk integrasjon eller vi må ha tilgang til feilfunksjonen $ERF(x)$.²

¹Så Lipschitz-betingelsen er **en tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse** for at entydig løsning eksisterer på et intervall (ref. teorem 6.2 ovenfor).

²Funksjonen er **tilgjengelig i Python** som `math.erf()`.

EULERS METODE

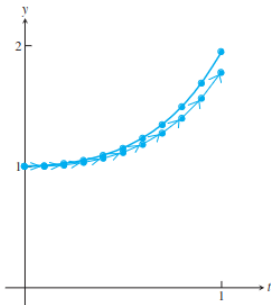
Gitt startverdiproblemet $y' = f(x, y)$ for $y(x_0) = y_0$.

Vi skal beregne tilnærmelser w_i for løsningen til problemet i $x = x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$ med **Eulers metode for steglengden h** :

$$w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) \text{ for } i = 0, 1, \dots$$

der $w_i \approx y_i = y(x_i)$ der $y(x)$ er den eksakte løsningen.

Eulers metode for $y' = t y + t^3$ og $y(0) = 1^1$ med steglengden (tidssteget) $h = 0.1$:



step	t_i	w_i	y_i	e_i
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.0000	1.0050	0.0050
2	0.2	1.0101	1.0206	0.0105
3	0.3	1.0311	1.0481	0.0170
4	0.4	1.0647	1.0899	0.0251
5	0.5	1.1137	1.1494	0.0357
6	0.6	1.1819	1.2317	0.0497
7	0.7	1.2744	1.3429	0.0684
8	0.8	1.3979	1.4914	0.0934
9	0.9	1.5610	1.6879	0.1269
10	1.0	1.7744	1.9462	0.1718

¹Eksakt løsning er gitt i SAYER, i eksempel 6.8, s. 296 (tabulert i y_i -kolonna). IVP-et er løst i eksempel 6.6, s. 291.

Eksemplet $y'(x) = c y$ med $y(0) = 1$ og $c = 1$ med eksakt løsning $y(t) = e^{cx} = e^x$.¹

¹I Sauer (s. 287) vises det at for det gitte IVP **konvergerer Eulers metode mot den eksakte løsningen**.

IMAT2150: Eulers metode

Eksempel med bruk av Python

Eksemplet $y'(x) = c y$ med $y(0) = 1$ og $c = 1$ med eksakt løsning $y(t) = e^{cx} = e^x$.¹

I figuren til høyre er Eulers metode bruk med steglengden $h = 1/30$ og $h = 1/10$.

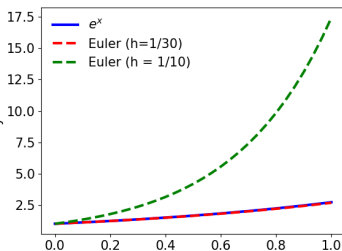
Figuren til venstre gir et Python program for å utføre disse beregningene (for $h = 1/30$).

Merk forskjellen i nøyaktigheten for Eulers metode her m.h.p. steglengden h !

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from math import pi
4 N = 30
5 x = np.linspace(0, 1, N + 1)
6 h = x[1] - x[0] # steglengden
7 y_0 = 1 # initial condition
8 Y = np.zeros_like(x) # vector for storing y values
9 Y[0] = y_0 # first element of y = y(0)
10 for n in range(N):
11     f = Y[n]
12     Y[n + 1] = Y[n] + h*f
13 Y_analytic = np.exp(x)
14 LNWDT=2; FNT=15
15 plt.rcParams['lines.linewidth'] = LNWDT
16 plt.rcParams['font.size'] = FNT
17 plt.figure()
18 plt.plot(x, Y_analytic, 'b', linewidth=3.0)
19 plt.plot(x, Y, 'r--', linewidth=3.0)
20 plt.legend(['$e^x$', 'euler'], loc='best', frameon=False)
21 plt.xlabel('x')
22 plt.ylabel('y')
23 plt.show()

```



¹I Sauer (s. 287) vises det at for det gitte IVP konvergerer Eulers metode mot den eksakte løsningen.

Definisjon

Anta at $y(t_i) = w_i$.

Da sier vi at lokal trunkeringsfeil er $e_{i+1} = |w_{i+1} - y(t_{i+1})|$, dvs. feilen metoden gir i steget fra t_i til t_{i+1} der vi antar at w_i er eksakt.

Lokal trunkeringsfeil for Eulers metode

Feilen er proporsjonal med **kvadratet av steglengden**: $e_{i+1} = \frac{h^2}{2} \times |y''(c)|$ der c ligger mellom t_i og t_{i+1} .

Vi har jo $y(t_i + h) = y(t_i) + h y'(t_i) + h^2/2 \times y''(c)$ og $w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$.

Derfor er (husk at $y(t_i) = w_i$!) $e_{i+1} = |w_{i+1} - y(t_{i+1})| = h^2/2 \times |y''(c)|$, som påstått.¹

¹Vi har også at $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) = f(t_i, w_i)$.

Definisjon

Global trunkeringsfeil er definert som $g_i = |w_i - y_i|$ der w_i er numerisk løsnning og y_i er eksakt løsnning.

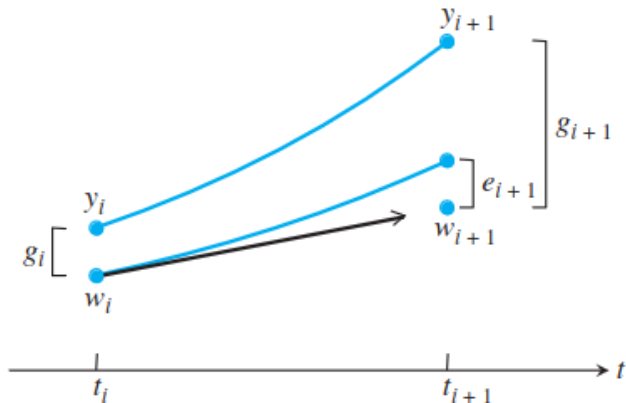
Teorem Eulers metode

Eulers metode har global feil som oppyller $g_i \leq \frac{Mh}{2L} (e^{L(t_i-a)} - 1)$ der $|y''(t)| \leq M$ for alle $t \in [a, b]$ og L er Lipschitz-konstanten for $f(x, y)$.

Den globale feilen er altså proporsjonal med steglengden mens den lokale feilen er proporsjonal med **kvadratet** av steglengden.

Vi skriver dette også som $e_i = \mathcal{O}(h^2)$ og $g_i = \mathcal{O}(h)$.

IMAT2150: Sammenheng mellom lokal og global trunkeringsfeil: En illustrasjon



Feilestimat for en-skrittsmetoder

THEOREM 6.4 Assume that $f(t, y)$ has a Lipschitz constant L for the variable y and that the value y_i of the solution of the initial value problem (6.2) at t_i is approximated by w_i from a one-step ODE solver with local truncation error $e_i \leq Ch^{k+1}$, for some constant C and $k \geq 0$. Then, for each $a < t_i < b$, the solver has global truncation error

$$g_i = |w_i - y_i| \leq \frac{Ch^k}{L}(e^{L(t_i-a)} - 1). \quad (6.25)$$



Vi sier at en IVP løser som oppfyller det ovenfor når $h \rightarrow 0$ har **orden k** .

Så, **Eulers metode har orden 1**.

Konvergens for Eulers metode

Da $e_i \leq M h^2/2$ for Eulers metode, så gir (6.25) for $k = 1$ fra tidligere:¹

(Euler's Method convergence) Assume that $f(t, y)$ has a Lipschitz constant L for the variable y and that the solution y_i of the initial value problem (6.2) at t_i is approximated by w_i , using Euler's Method. Let M be an upper bound for $|y''(t)|$ on $[a, b]$. Then

$$|w_i - y_i| \leq \frac{Mh}{2L}(e^{L(t_i-a)} - 1). \quad (6.26)$$

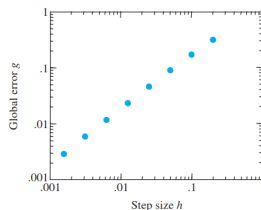
¹Siden $y''(x)$ er antatt å være kontinuertlig på et lukket og begrenset intervall er $y''(x)$ begrenset der.

Vi skal nå gi et eksempel på hvordan vi bestemmer en øvre feilgrense for Eulers metode.

Vi har tidligere vist Eulers metode for $y' = t y + t^3$ og $y(0) = 1$ med steglengden (tabellen til venstre) $h = 0.1$:

Tabellen til høyre (log-log plot) viser trunkeringsfeilene for flere steglengder for problemet. Den er omtrent 2 ganger h for små h .

step	t_i	w_i	y_i	e_i
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.0000	1.0050	0.0050
2	0.2	1.0101	1.0206	0.0105
3	0.3	1.0311	1.0481	0.0170
4	0.4	1.0647	1.0899	0.0251
5	0.5	1.1137	1.1494	0.0357
6	0.6	1.1819	1.2317	0.0497
7	0.7	1.2744	1.3429	0.0684
8	0.8	1.3979	1.4914	0.0934
9	0.9	1.5610	1.6879	0.1269
10	1.0	1.7744	1.9462	0.1718



Eksakt løsning av IVP er $y(x) = 3e^{t^2/2} - t^2 - 2$.¹

Da eksakt løsning er kjent, er M lett å bestemme.

Dette gir at $y''(x) = (t^2 + 2)e^{t^2/2} - 2$.

Vi har derfor $M = y''(1) = 3\sqrt{e} - 2$.

Da $L = 1$ på (t) -intervallet $[0, 1]$, får vi at øvre grense for global feil (fra 6.26 ovenfor er $M h/(2L) e^{L(1-0)} = (3\sqrt{e} - 2) e h/2 \approx 4.004 h$.

Hvorfor er $L = 1$?

Vi har jo $|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |t(y_2 - y_1)| \leq |y_2 - y_1|$ da $t \in [0, 1]$.

¹Se eksempel 6.6, s. 291 i SAUER.

En forbedring av Eulers metode:¹

$$w_0 = y_0$$

$$v_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} (f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, v_{i+1}))$$

¹Metoden går også under navnet "Improved Euler" og Heuns metode.

En forbedring av Eulers metode:¹

$$w_0 = y_0$$

$$v_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} (f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, v_{i+1}))$$

Teorem

Lokal og global trunkeringsfeil for trapesmetoden er henholdsvis proporsjonal med h^3 og h^2 .

Trapesmetoden har altså orden 2.

¹Metoden går også under navnet "Improved Euler" og Heuns metode.

En forbedring av Eulers metode:¹

$$w_0 = y_0$$

$$v_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} (f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, v_{i+1}))$$

Teorem

Lokal og global trunckeringsfeil for trapesmetoden er henholdsvis proporsjonal med h^3 og h^2 .

Trapesmetoden har altså orden 2.

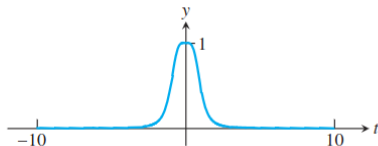
Metoden er et eksempel på en enkel "predictor/corrector-metode".²

¹Metoden går også under navnet "Improved Euler" og Heuns metode.

²Først "forutsier" vi en løsning i det første steget, så "retter" vi på denne i det andre.

Eksakt løsning av problemet nedenfor er $y(x) = 1/(t^4 + 1)$, så $y(0) = 1$.¹

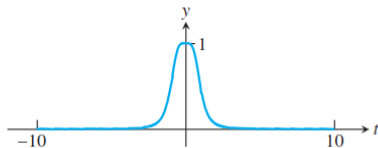
$$\begin{cases} y' = -4t^3 y^2 \\ y(-10) = 1/10001. \\ t \text{ in } [-10, 0] \end{cases}$$



¹Ligningen er en separabel differensialligning og derfor lett å løse eksakt.

Eksakt løsning av problemet nedenfor er $y(x) = 1/(t^4 + 1)$, så $y(0) = 1$.¹

$$\begin{cases} y' = -4t^3 y^2 \\ y(-10) = 1/10001. \\ t \text{ in } [-10, 0] \end{cases}$$



Vi kan vise at tilnærmelsen til $y(0)$ med trapesmetoden og med $h = 10^{-3}$ (gitt i figuren ovenfor) er bedre enn Euler-tilnærmelsen med $h = 10^{-5}$.²

¹Ligningen er en separabel differensialligning og derfor lett å løse eksakt.

²Feilen der er ≈ 0.0015 og krever **1 million** Euler-skritt!! Feilen med trapesmetoden med $h = 10^{-5}$ er i størrelsesorden 10^{-7} .

$$(1) y'(t) = -4t^3 y^2$$

$$(2) y(-10) = 1/10001$$

Vis at IVP har eksakt

løsning $y(t) = \frac{1}{t^4 + 1}$

$$\frac{dy}{dt} = -4t^3 y^2$$

1) ^{1) separabel} separabel lign.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -4t^3$$

$$-y^{-1} = -t^4 + C$$

$$C = -1 \quad (\text{mv (2)})$$

$$y^{-1} = t^4 - C$$

$$1/y = t^4 + 1$$

$$y(t) = \frac{1}{t^4 + 1}$$

Taylor Method of order k

$$w_0 = y_0$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(t_i, w_i).$$

$$y_{i+1} - w_{i+1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(c)$$

Vi har følgende Taylor metode av orden 2:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{1}{2}h^2(f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)f(t_i, w_i))$$

Merk de partielle deriverte av $f(t,y)$ i formelen ovenfor!

Determine the second-order Taylor Method for the first-order linear equation

$$\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Since $f(t, y) = ty + t^3$, it follows that

$$\begin{aligned} f'(t, y) &= f_t + f_y f \\ &= y + 3t^2 + t(ty + t^3), \end{aligned}$$

and the method gives

$$w_{i+1} = w_i + h(t_i w_i + t_i^3) + \frac{1}{2} h^2 (w_i + 3t_i^2 + t_i(t_i w_i + t_i^3)).$$