$\forall X \in \{A,G,T\}$: IMAX 2150
Matematiske metoder 3 for data.
Vektorrom og underrom

Hans J. Rivertz

IDI – NTNU

10. oktober 2023

Plan for forelesningen

1. Vektorer og vektorrom
2. Systemer og vektorrom
3. Lineær avhengighet og lineære kombinasjoner
4. Underrom, basis og dimensjon.
5. Vektorrom assosiert med matriser.

Læringsmål

Dere skal gå gjennom

- Lære / repetere hva en vektor er.
- Repetere operasjonene **addisjon** og **multiplisering med skalar**.
- Lineære kombinasjoner og generatormengde
- Lære om underrom av vektorrom
- Noen viktige underrom

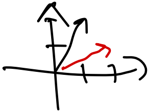
Vektorer og vektorrom

1. Vektorer og vektorrom
   - Repetisjon av vektorer
   - Vektorrom
   - Regning med vektorer
2. Systemer og vektorrom
3. Lineær avhengighet og lineære kombinasjoner
4. Underrom, basis og dimensjon.
5. Vektorrom assosiert med matriser.

Vektorer

- En vektor er en ordnet sekvenser av n reelle tall, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. n-vektor
- Tallene x_1, x_2, etc. kalles for vektorens koordinater.
- Radvektorer og søylevektorer er slike vektorer, bare skrevet på en annen form
- En søylevektor er også en $n \times 1$-matrise.
- En radvektor er også en $1 \times n$-matrise.
- **nullvektoren**: $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

2-vektor $(1,2) \neq (2,1)$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3×1 - matrise

Vekrorrom

- Symbolet $\mathbb{R}$ står for mengden av reelle tall.
- Med $\mathbb{R}^n$ mener vi mengden av alle $\underbrace{\text{ordnede sekvenser av } n \text{ reelle tall, } (x_1, x_2, \ldots, x_n).}_{\text{alle } n\text{-vektorer}}$
- $\mathbb{R}^n$ kalles for **vektorrommet** $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \text{ er en } n \times 1 \text{ matrise} \}$$

$$\text{"=" } \{ \text{ mengden av alle lister av "floating point" med } n \text{ elementer}$$

Addisjon av vektorer

Definisjon

Addisjon av vektorer defineres ved

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$x = [1, 3, 4]$ $y = [-2, 4, 1]$ $x + y = [1+(-2), 3+4, 4+1]$
$= [-1, 7, 5]$

$p(x) = x^2 + 3x + 4$ $q(x) = -2x^2 + 4x + 1$

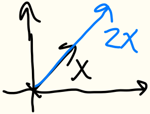
$p(x) + q(x) = x^2 - 2x^2 + 3x + 4x + 4 + 1 = -x^2 + 7x + 5$

skalarmultiplikasjon

Definisjon

For en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og en reell skalar c definerer vi **skalarmultiplikasjonen**

$$c\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n).$$



Spesielt skriver vi $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.

Eksempel

Gitt vektoren $\mathbf{a} = (4, 2, 1, -5)$ i $\mathbb{R}^4$. Da er

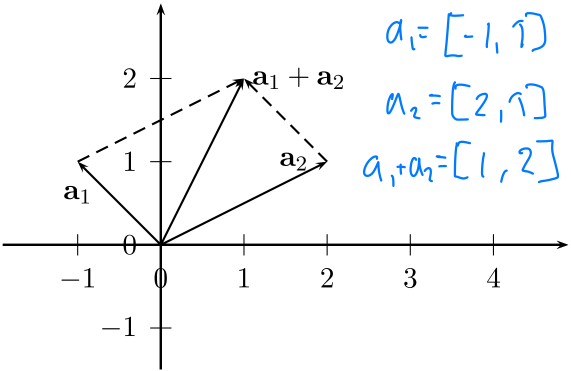
$$3\,\mathbf{a} = (3 \cdot 4, 3 \cdot 2, 3 \cdot 1, 3 \cdot (-5)) = (12, 6, 3, -15).$$

Setning (Regneregler)

Hvis $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *er vilkårlig valgte vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *og* a *og* b *er vilkårlig valgte reelle skalarer så er følgende påstander sanne.*

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *er med i* $\mathbb{R}^n$, *(*$\mathbb{R}^n$ *er* **lukket under addisjon***)*
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, *(***Kommutativ lov***)*
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{v}+(\mathbf{u}+\mathbf{w})$, *(***Assosiativ lov***)*
4. $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$, *(Vektoren* $\mathbf{0}$ *kalles også for en* **additiv enhet***)*
5. $-\mathbf{u}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$, *(*$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ *har en* **additiv invers***)*
6. $a\mathbf{u}$ *er med i* $\mathbb{R}^n$, *(*$\mathbb{R}^n$ *er* **lukket under skalarmultiplikasjon***)*
7. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$
8. $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$, *(***Distributiv lov***)*
9. $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$, *(***Distributiv lov***)*
10. $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$

Addisjon av vektorer i planet



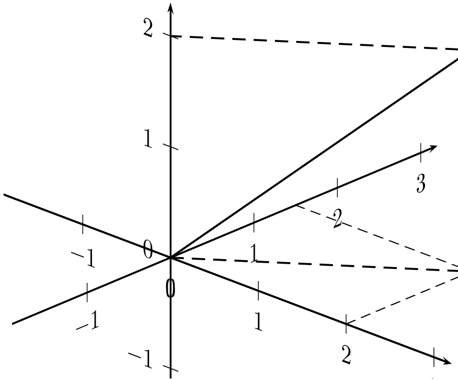
$a_1 = [-1, 1]$

$a_2 = [2, 1]$

$a_1 + a_2 = [1, 2]$

Figur: Vektorer i planet utstyrt med et kartesisk koordinatsystem.

Det tredimensjonale rommet og $\mathbb{R}^3$ er samme vektorrom



Figur: Vektorer i rommet utstyrt med kartesiske koordinater

Systemer og vektorrom

Tre fremstillinger av samme system

Vi har sett at det lineære likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcr} -u & + & 2v & = & 5 \\ u & + & v & = & 1 \end{array}$$

$ax = b$

$x = b/a$

kan skrives om på matriseform (matrise bildet)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$VS = \begin{bmatrix} -1 \cdot u + 2v \\ u + v \end{bmatrix}$

Systemet kan også skrives på vektorform (vektorbildet)

$A\underline{x} = \underline{b}$

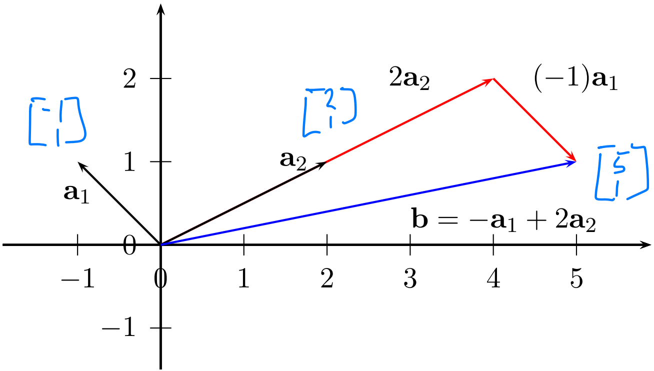
$A = [\underline{a}_1 \; \underline{a}_2] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = u\underline{a}_1 + v\underline{a}_2$

$$u \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{x} = A \backslash \underline{b}$

Den siste gir en geometrisk tolkning.

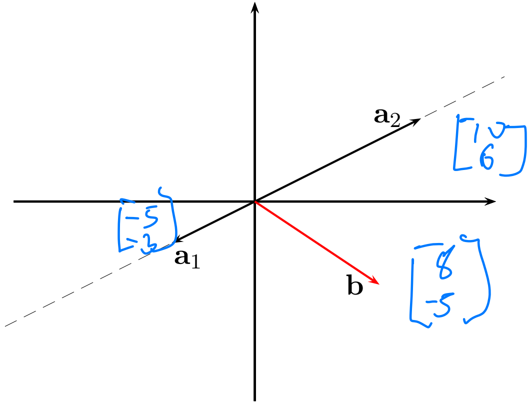
Geometrisk tolkning av system av likninger



Figur: Løsning av det lineære systemet på forige side.

Vektorbildet og inkonsistente systemer

Vektorbildet gjør det enkelt å forså systemer uten løsning:



Figur: Illustrasjon av et selvmotsigende system.

Lineær avhengighet og lineære kombinasjoner

Lineære kombinasjoner

- Gitt en endelig **vektormengde** S i $\mathbb{R}^n$.
- Eksempel på vektormengde i $\mathbb{R}^2$:

$$S = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

- Vektoren $(-1)\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ er en lineær kombinasjon av vektorene i S.
- $(-1)\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}^T$. $= \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Vi iser at vektoren $\begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}^T$ er en **lineær kombinasjon** av vektorene i S.

Definisjon

Definisjon

La $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$, $k > 0$ være endelig mengde av vektorer i $\mathbb{R}^n$. En **lineær kombinasjon** over S er et uttrykk på formen

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ skalarer.

$$u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + \cdots + u_k\mathbf{a}_k.$$

Vi sier også at en vektor er en **lineærkombinasjon** over S hvis den kan skrives som minst én lineær kombinasjon over S.

Eksempel

Eksempel

La $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Da er vektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en lineær kombinasjon over mengden S i $\mathbb{R}^3$.

en lineærkombinasjon over S

Matriser og lineære kombinasjoner

Setning

Enhver lineær kombinasjon $\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{a}_i$ *over* $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ *kan skrives på som matriseproduktet*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{a}_i = A\mathbf{c}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

søylevektorer

der $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$ *og* $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T$.

Lineært avhengige og uavhengige vektormengder

Definisjon

En vektormengde S kalles **lineært avhengig** hvis det finnes minst ett element i S som kan skrives som en lineær kombinasjon av de øvrige. Av grunner vi ikke skal gå inn på kalles også en vektormengde for lineært avhengig når det inneholder en nullvektor.

$\{\underline{0}\}$ lineært avhengig.

En vektormengde som ikke er lineært avhengig kalles for **lineært uavhengig**.

Metode for å avgjøre lineær (u)avhengighet

Setning

Gitt vektormengde $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$. *Hvis vektorlikningen*

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

1. *har bare den trivielle løsningen så er* S *lineært uavhengig.*
2. *har ikke-trivielle løsninger så er* S *lineært avhengig.*

Eksempel

Eksempel

Avgjør om vektormengden

$$S = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T, \right\}$$

er lineært avhengig eller lineært uavhengig.

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3 = \underline{0} \qquad A\underline{c} = \underline{0} \qquad A^a$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \; (-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$c_3 = t$

$c_2 + c_3 = 0$

$c_2 = -t$

$c_1 - 2c_2 = 0$

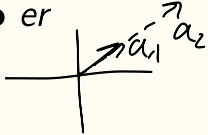
$c_1 = -2t$

$$-2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \qquad a_3 = a_2 + 2a_1$$

Noen setninger om lineært uavhengighet

Setning

1. *Hvis S inneholder nullvektoren så er S lineært avhengig (L.A.)*
2. *To vektorer $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ er L.A. hvis og bare hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er proporsjonale*



3. *Tre vektorer i $\mathbb{R}^2$ er L.A.*
4. *Tre vektorer som ligger i et plan i $\mathbb{R}^3$ er L.A.*

Rangmetoden

Setning

Gitt vektormengden $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ *og la* $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$

1. *Hvis* $\operatorname{rank} A = k$ *så er* S *lineært uavhengig.*
2. *Hvis* $\operatorname{rank} A < k$ *så er* S *lineært avhengig.*

Rang av matrise A er antall pivot elementer i AG gauss eliminat matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel

Avgjør om

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært avhengig eller lineært uavhengig.

$1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$\{\underline{0}\}$ L.A.

$$A = \left[\underline{a}_1 \middle| \underline{a}_2 \middle| \underline{a}_3 \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Rank}\, A = 2 < 3$ S er L.A.

Lineærspennet av S

Definisjon

Hvis S er en vektormengde i $\mathbb{R}^n$ så er mengden av alle vektorer som er en lineærkombinasjon av S en delmengde av $\mathbb{R}$. Vi kaller denne delmengden for **lineærspennet** av S i $\mathbb{R}^n$. Vi skriver

$$\operatorname{Linspan} S = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{a}_i \,\middle|\, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^k \right\} \tag{1}$$

vektormengden S kalles for **generatormengden** til $\operatorname{Linspan} S$.

Underrom, basis og dimensjon.

Underrom av vektorrom

Vi vil bare ta den uformelle her

Definisjon

Et underrom av $\mathbb{R}^n$ er et lineært spenn av en generatormengde S.

Viktig egenskap og to spesialtilfeller.

Setning

1. *Nullvektoren* $\mathbf{0}$ *er alltid med i et underrom* V *av* $\mathbb{R}^n$.
2. $\{\mathbf{0}\}$ *er et underrom av* $\mathbb{R}^n$.
3. $\mathbb{R}^n$ *er et underrom av* $\mathbb{R}^n$.

Viktig egenskap

Setning

Hvis V er et underrom av $\mathbb{R}^n$ så er følgende to egenskaper er tilfredsstilt for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V og alle skalarer c i $\mathbb{R}$.

1. *Vektoren $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er med i V.*
2. *Vektoren $c\mathbf{u}$ er med i V.*

Fjerning av avhengig vektor i S

- La S være en generatormengde til $V = \operatorname{Linspan} S$.
- Hvis $\mathbf{v}$ er en vektor i S som er lineært avhengig av de andre vektorene i S så kan vi fjerne $\mathbf{v}$ fra S og den nye mengden S' er fortsatt en generatormengde til V.
- Det betyr at $V = \operatorname{Linspan} S'$.

Basis til underrom

- Vi kan fortsette å fjerne medlemmer fra et generatorsettet S til vi sitter igjen med et lineært uavhengig generatorsett for $V = \operatorname{Linspan} S$.
- Slike generatorsett er så viktige at de har fått et eget navn.

Definisjon

Et lineært uavhengig generatorsett B for V kalles for en **basis** for V.

Standardbasis

Eksempel

vektormengden $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ i vektorrommet $\mathbb{R}^n$, der

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

kalles for **standardbasisen** for $\mathbb{R}^n$.

Setning

Setning

En mengde S er en basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og bare hvis S er lineært uavhengig og inneholder nøyaktig n vektorer.

Dimensjon til underrom

Definisjon (Dimensjonen til et underrom.)

La V være et underrom av $\mathbb{R}^n$ og la $\mathcal{B}$ være en basis for V. Anta at $\mathcal{B}$ har nøyaktig k vektorer. Da sier vi at **dimensjonen** til V er k.

$$\dim V = k = \text{antall vektorer i } \mathcal{B}.$$

Dimensjonen til $\mathbb{R}^n$ er lik n fordi standardbasisen har nøyaktig n vektorer.

Vektorrom assosiert med matriser.

Søylerommet til en matrise

Definisjon (Søylerommet)

La A være en matrise. Underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av kolonnene til A kaller vi for **søylerommet** til A.

$$\operatorname{col} A = \operatorname{Linspan}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \operatorname{Linspan} S.$$

Setning

Vi har følgende oppskrift for å finne en basis for $\operatorname{col} A$.

1. *Utfør Gausseliminsajon* $A \sim \cdots \sim A^G$
2. *Identifiser pivotsøylene til* A^G.
3. *De tilsvarende søylene til* A *er en basis for* $\operatorname{col} A$.

Radrommet

Definisjon

Radommet $\mathrm{row}\, A$ til en $m \times n$ matrise A er underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av radvektorene til A.

Setning

Radrommet til A *og* A^G *er det samme.*

Nullrommet til en matrise

Definisjon

Nullrommet til en matrise A er løsningsmengden til det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi kaller denne mengden for $\operatorname{null} A$.

La S vær lineært avhengig:

$$S = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$$

$$\underline{a}_3 = c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + c_4\underline{a}_4$$

$$0 = c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + (-1)\underline{a}_3 + c_4\underline{a}_4$$

$$0 = c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + c_3\underline{a}_3 + c_4\underline{a}_4$$