NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Iterative metoder 1

Jonas J. Harang

~~19 oktober 2022~~

31. oktober 23

Tema og læringsutbytte

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Sauer 2.5: Iterative metoder

- Jacobi- og Gauss-Seidel-metoden
- Tynne matriser
- Konvergenskriterier
- SOR

Du skal kunne:

- Forklare når og hvorfor vi vil bruke iterative metoder for å løse et likningssystem
- Regne ut noen iterasjoner av Jacobi/Gauss-Seidel for et mindre system (3×3)
- Forklare når Gauss-Seidel og Jacobi konvergerer
- Identifisere en tynn matrise
- Programmere Jacobi/Gauss-Seidel i python

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fikspunktiterasjon - Rep

For fikspunktet x_f til en funskjon $f(x)$ gjelder:

$$f(x_f) = x_f$$

Ved fikspunktiterasjon prøver vi å finne et slikt fikspunkt på følgende måte:

```python
def fikspunkt(f, x0,tol):
    x = x0
    while(abs(f(x)-x)>tol):
        x = f(x)

    return x
```

$$x^5 + 4 = 3x^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt[5]{3x^2 - 4}$$

$$f(x) = \sqrt[5]{3x^2 - 4}$$

Fikspunktiterasjon

Kan vi bruke fikspunktiterasjon til å løse et *system* av likninger, for eksempel systemet under?

$$\vec{x}_f = \begin{bmatrix} u_f \\ v_f \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \end{bmatrix}\right)$$

(1) $3u + v = 5$

(2) $u + 2v = 5$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsningen er $[1, 2]$

$f(x_f) = x_f$

(1) $u = \frac{5-v}{3}$

(2) $v = \frac{5-u}{2}$

$$f\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5-v}{3} \\ \frac{5-u}{2} \end{bmatrix}$$

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Hva om vi bytter om hvilke variabler vi løser for?

(1) $3u + v = 5$

(2) $u + 2v = 5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) $\Rightarrow v = 5 - 3u$

(2) $\Rightarrow u = 5 - 2v$

$$f\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 - 3u \\ 5 - 2v \end{bmatrix}$$

Typiske likningssystem i den virkelige verden

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Tynne matriser

NTNU

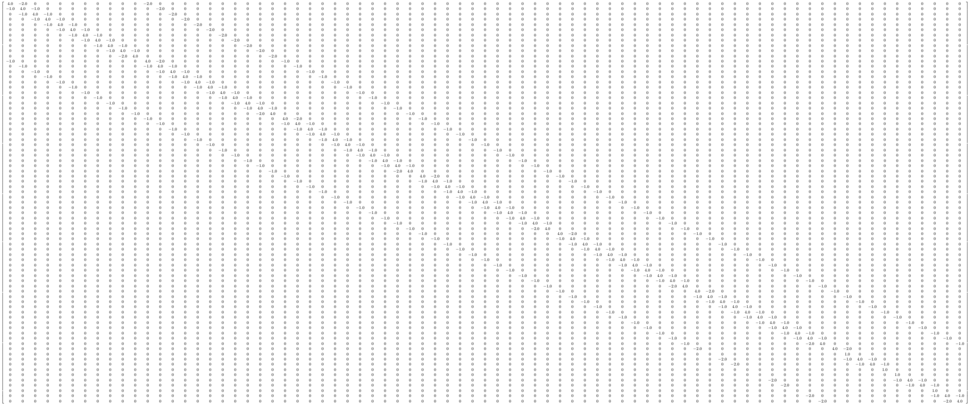
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Systemmatrisen for løsning av det elektriske potensialet via finite-difference metoden i en leder (2D):

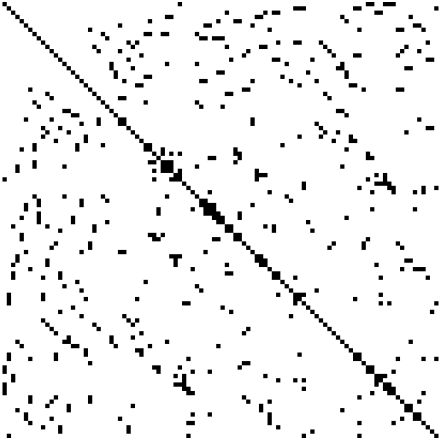
$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
$$

2D poisson

Poisson likningen for diode med 11 x 7 diskrete punkter

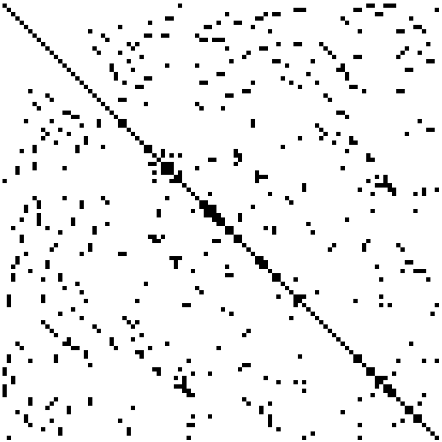


Tynne matriser



Figur: Systemmatrisen fra løsning av finite-element-problem i 2D

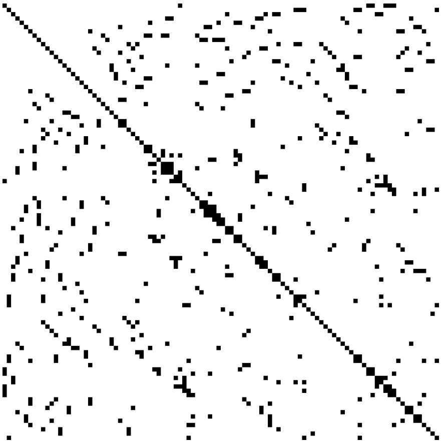
Tynne matriser



Figur: Systemmatrisen fra løsning av finite-element-problem i 2D

- Tynne matriser krever mindre minne, og er raske å regne ut matrise·vektor produkt for...

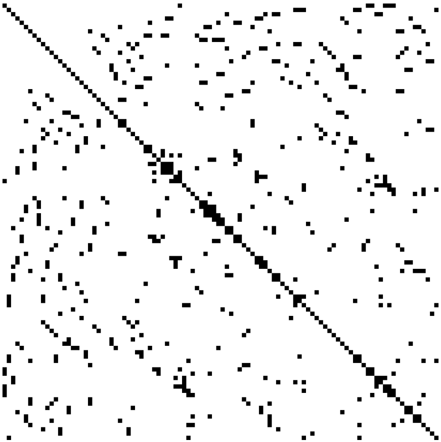
Tynne matriser



Figur: Systemmatrisen fra løsning av finite-element-problem i 2D

- Tynne matriser krever mindre minne, og er raske å regne ut matrise·vektor produkt for...
- ... dersom man bruker egnede metoder: `import scipy.sparse`

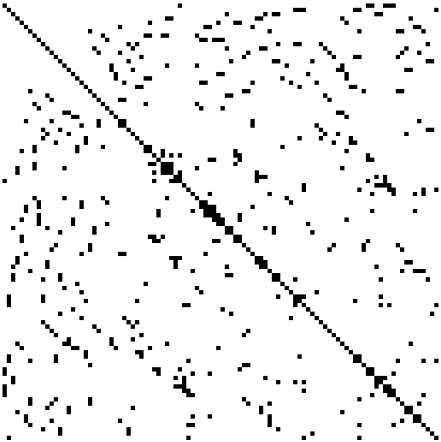
Tynne matriser



Figur: Systemmatrisen fra løsning av finite-element-problem i 2D

- Tynne matriser krever mindre minne, og er raske å regne ut matrise·vektor produkt for…
- … dersom man bruker egnede metoder: `import scipy.sparse`
- Gausseliminasjon og LU-faktorisering har en tendens til å «ødelegge» de fine tynne matrisene: *Fill-in*

Tynne matriser



Figur: Systemmatrisen fra løsning av finite-element-problem i 2D

- Tynne matriser krever mindre minne, og er raske å regne ut matrise·vektor produkt for...
- ... dersom man bruker egnede metoder: `import scipy.sparse`
- Gausseliminasjon og LU-faktorisering har en tendens til å «ødelegge» de fine tynne matrisene: *Fill-in*
- Ofte har man en god tilnærmet løsning man kan starte de iterative metodene med: *polishing*

Jacobi-metoden

Vi har et likningssystem $Ax = b$, som vi vil løse gjennom en type fikspunktsiterasjon med startvektor x_0 - *Jacobi-metoden*. For eksempel:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi begynner med å skrive om A:

Jacobi-metoden

Vi har et likningssystem $Ax = b$, som vi vil løse gjennom en type fikspunktsiterasjon med startvektor x_0 - *Jacobi-metoden*. For eksempel:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi begynner med å skrive om A:

$$Ax = (L + D + U)x = b$$

Jacobi-metoden

Vi har et likningssystem $Ax = b$, som vi vil løse gjennom en type fikspunktsiterasjon med startvektor x_0 - *Jacobi-metoden*. For eksempel:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi begynner med å skrive om A:

$$\begin{aligned} Ax &= (L + D + U)x = b \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x = b \end{aligned}$$

Jacobi-metoden

Vi har et likningssystem $Ax = b$, som vi vil løse gjennom en type fikspunktsiterasjon med startvektor x_0 - *Jacobi-metoden*. For eksempel:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi begynner med å skrive om A:

$$\begin{aligned} Ax &= (L + D + U)x = b \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\left. + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x = b \end{aligned}$$

$$Dx = b - (L + U)x$$

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Jacobi-metoden

Vi har et likningssystem $Ax = b$, som vi vil løse gjennom en type fikspunktsiterasjon med startvektor x_0 - *Jacobi-metoden*. For eksempel:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi begynner med å skrive om A:

$$\begin{aligned} Ax &= (L + D + U)x = b \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\left. + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dx &= b - (L + U)x \\ x &= D^{-1}(b - (L + U)x) \end{aligned}$$

Jacobi-metoden

Vi har et likningssystem $Ax = b$, som vi vil løse gjennom en type fikspunktsiterasjon med startvektor x_0 - *Jacobi-metoden*. For eksempel:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi begynner med å skrive om A:

$$\begin{aligned} Ax &= (L + D + U)x = b \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dx &= b - (L + U)x \\ x &= D^{-1}(b - (L + U)x) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right)$$

Jacobi-metoden

Vi har et likningssystem $Ax = b$, som vi vil løse gjennom en type fikspunktsiterasjon med startvektor x_0 - *Jacobi-metoden*. For eksempel:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi begynner med å skrive om A:

$$\begin{aligned} Ax &= (L + D + U)x = b \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dx &= b - (L + U)x \\ x &= D^{-1}(b - (L + U)x) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right)$$

Jacobi

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{startvektor} \\ x_{k+1} &= D^{-1}(b - (L + U)x_k) \end{aligned}$$

for $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Jacobi: Eksempel

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L + U)x_k)$$

Jacobi: Eksempel

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)) = 1/3$$

Jacobi: Eksempel

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\right) = 1/3$$

$$v_1 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)\right) = -2/5$$

Jacobi: Eksempel

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\right) = 1/3$$

$$v_1 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)\right) = -2/5$$

$$w_1 = \frac{1}{8}\left(3 - (1 \cdot 0 + 6 \cdot 0)\right) = 3/8$$

Jacobi: Eksempel

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}\,(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)) = 1/3$$

$$v_1 = -\frac{1}{5}\,(2 - (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)) = -2/5$$

$$w_1 = \frac{1}{8}\,(3 - (1 \cdot 0 + 6 \cdot 0)) = 3/8$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot -\frac{2}{5} - 1 \cdot \frac{3}{8})\right) = \frac{71}{120}$$

Jacobi: Eksempel

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\right) = 1/3$$

$$v_1 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)\right) = -2/5$$

$$w_1 = \frac{1}{8}\left(3 - (1 \cdot 0 + 6 \cdot 0)\right) = 3/8$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot -\frac{2}{5} - 1 \cdot \frac{3}{8})\right) = \frac{71}{120}$$

$$v_2 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{3}{8})\right) = -\frac{5}{12}$$

Jacobi: Eksempel

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L + U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)) = 1/3$$

$$v_1 = -\frac{1}{5}(2 - (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)) = -2/5$$

$$w_1 = \frac{1}{8}(3 - (1 \cdot 0 + 6 \cdot 0)) = 3/8$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot -\frac{2}{5} - 1 \cdot \frac{3}{8})\right) = \frac{71}{120}$$

$$v_2 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{3}{8})\right) = -\frac{5}{12}$$

$$w_2 = \frac{1}{8}\left(3 - (1 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot -\frac{2}{8})\right) = \frac{25}{48}$$

Jacobi: Eksempel

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)) = 1/3$$

$$v_1 = -\frac{1}{5}(2 - (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)) = -2/5$$

$$w_1 = \frac{1}{8}(3 - (1 \cdot 0 + 6 \cdot 0)) = 3/8$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot -\frac{2}{5} - 1 \cdot \frac{3}{8})\right) = \frac{71}{120}$$

$$v_2 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{3}{8})\right) = -\frac{5}{12}$$

$$w_2 = \frac{1}{8}\left(3 - (1 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot -\frac{2}{8})\right) = \frac{25}{48}$$

$$r_2 = b - Ax_2 = \begin{bmatrix} 13/80 & -277/120 & 89/120 \end{bmatrix}^T$$

Jacobi: Eksempel

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\right) = 1/3$$

$$v_1 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)\right) = -2/5$$

$$w_1 = \frac{1}{8}\left(3 - (1 \cdot 0 + 6 \cdot 0)\right) = 3/8$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot -\frac{2}{5} - 1 \cdot \frac{3}{8})\right) = \frac{71}{120}$$

$$v_2 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{3}{8})\right) = -\frac{5}{12}$$

$$w_2 = \frac{1}{8}\left(3 - (1 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot -\frac{2}{8})\right) = \frac{25}{48}$$

$$r_2 = b - Ax_2 = \begin{bmatrix} 13/80 & -277/120 & 89/120 \end{bmatrix}^T$$

Bakoverfeil : $|r_2|_2 \approx 2.4$

Jacobi: Eksempel

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 89/187 & -12/187 & 4/11 \end{bmatrix}^T$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

$$u_1 = \frac{1}{3}(1 - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)) = 1/3$$

$$v_1 = -\frac{1}{5}(2 - (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)) = -2/5$$

$$w_1 = \frac{1}{8}(3 - (1 \cdot 0 + 6 \cdot 0)) = 3/8$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(1 - (1 \cdot -\frac{2}{5} - 1 \cdot \frac{3}{8})\right) = \frac{71}{120}$$

$$v_2 = -\frac{1}{5}\left(2 - (2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{3}{8})\right) = -\frac{5}{12}$$

$$w_2 = \frac{1}{8}\left(3 - (1 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot -\frac{2}{8})\right) = \frac{25}{48}$$

$$r_2 = b - Ax_2 = \begin{bmatrix} 13/80 & -277/120 & 89/120 \end{bmatrix}^T$$

Bakoverfeil : $|r_2|_2 \approx 2.4$

Residual

Som et mål på hvor nærme vi er riktig løsning i iterative metoder, bruker vi ofte en norm av *residualen*

$$r = b - Ax_*$$

$$e_r = ||r||$$

Gauss-Seidel

Vi kan gjøre et lite med virkningsfullt grep for å øke konvergenshastigheten til Jacobi-metoden:

Gauss-Seidel

Vi kan gjøre et lite med virkningsfullt grep for å øke konvergenshastigheten til Jacobi-metoden:

- Løs likning k med hensyn på ukjent nr k

Gauss-Seidel

Vi kan gjøre et lite med virkningsfullt grep for å øke konvergenshastigheten til Jacobi-metoden:

- Løs likning k med hensyn på ukjent nr k
- Iterer som i jacobi/fikspunktiterasjon

Gauss-Seidel

Vi kan gjøre et lite med virkningsfullt grep for å øke konvergenshastigheten til Jacobi-metoden:

- Løs likning k med hensyn på ukjent nr k
- Iterer som i jacobi/fikspunktiterasjon
- Alle nye verdier brukes så fort de er klare

Gauss-Seidel

Vi kan gjøre et lite med virkningsfullt grep for å øke konvergenshastigheten til Jacobi-metoden:

- Løs likning k med hensyn på ukjent nr k
- Iterer som i jacobi/fikspunktiterasjon
- Alle nye verdier brukes så fort de er klare

Eksempel, startvektor $[0, 1]$:

$$
\begin{aligned}
5x + y &= 1 \\
-x + 3y &= 2
\end{aligned}
$$

$$x_1 = \frac{1 - y_0}{5} = 0$$

Gauss-Seidel

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Vi kan gjøre et lite med virkningsfullt grep for å øke konvergenshastigheten til Jacobi-metoden:

- Løs likning k med hensyn på ukjent nr k
- Iterer som i jacobi/fikspunktiterasjon
- Alle nye verdier brukes så fort de er klare

Eksempel, startvektor $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} 5x + y &= 1 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - y_0}{5} = 0 \\ y_1 &= \frac{2 + x_1}{3} = \frac{2+0}{3} = 2/3 \end{aligned}$$

Gauss-Seidel

Vi kan gjøre et lite med virkningsfullt grep for å øke konvergenshastigheten til Jacobi-metoden:

- Løs likning k med hensyn på ukjent nr k
- Iterer som i jacobi/fikspunktiterasjon
- Alle nye verdier brukes så fort de er klare

Eksempel, startvektor $[0, 1]$:

$$
\begin{aligned}
5x + y &= 1 \\
-x + 3y &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1 - y_0}{5} = 0 \\
y_1 &= \frac{2 + x_1}{3} = \frac{2 + 0}{3} = 2/3 \\
x_2 &= \frac{1 - y_1}{5} = \frac{1 - 2/3}{5} = 1/15
\end{aligned}
$$

Gauss-Seidel

Vi kan gjøre et lite med virkningsfullt grep for å øke konvergenshastigheten til Jacobi-metoden:

- Løs likning k med hensyn på ukjent nr k
- Iterer som i jacobi/fikspunktiterasjon
- Alle nye verdier brukes så fort de er klare

Eksempel, startvektor $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} 5x + y &= 1 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - y_0}{5} = 0 \\ y_1 &= \frac{2 + x_1}{3} = \frac{2 + 0}{3} = 2/3 \\ x_2 &= \frac{1 - y_1}{5} = \frac{1 - 2/3}{5} = 1/15 \\ y_1 &= \frac{2 + x_2}{3} = \frac{2 + 1/15}{3} = 31/45 \end{aligned}$$

Gauss-Seidel

Tregere konvergens

Men: parallelliserbar

Konvergere raskere

Jacobi-metoden

$$x_0 = \text{startvektor}$$
$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

Gauss-Seidel-metoden

$$x_0 = \text{startvektor}$$
$$x_{k+1} = D^{-1}(b - Lx_{k+1} + Ux_k)$$

Konvergens

En matrise kalles **strengt diagonal dominant** dersom *absoluttverdien* til hvert element på hoveddiagonalen er større en summen av absoluttverdiene av de øvrige elementene i samme rad

Teorem

Om A er strengt diagonal dominant så konvergerer Gauss-Seidel- og Jacobi-metoden

Teoremet over kan fortelle oss om GS/Jacobi vil konvergere, men ikke at det *ikke* konvergerer.

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Matrisen over er strengt diagonal dominant fordi:

$3 > 1+1$

$5 > 2+2$

$8 > 1+6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisen over er *ikke* strengt diagonal dominant fordi:

$1 < 2$

$1 < 3$

Successive over-relaxtion

Ikke pensum

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Gauss-Seidel-metoden

$$x_0 = \text{startvektor}$$
$$x_{k+1} = D^{-1}(b - Lx_{k+1} + Ux_k)$$

SOR

SOR vil øke konvergenshastigheten til GS ved å sette neste løsning x_{k+1} som et vektet snitt av nåværende løsning x_k og løsningen gitt av Gauss-Seidel, $x_{(k+1)_{GS}}$

$$x_{k+1} = (1-\omega)x_k + \omega x_{(k+1)_{GS}}$$
$$x_{k+1} = x_k(1-\omega) + \omega D^{-1}(b - Lx_{k+1} - Ux_k)$$

Parameteren ω angir hvordan vi vekter de to løsningene, og når $\omega > 1$ kaller vi metoden for *successive over-relaxtion*

Case: Poisson/Laplace-ligningen

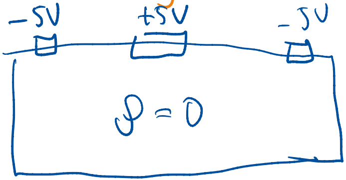
$$\boxed{\nabla^2 \cdot \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Poisson lign

PDE

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

krumning



$$\boxed{\nabla^2 \cdot \varphi = 0}$$

Laplace

∇: nabla

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right]$$

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]$$

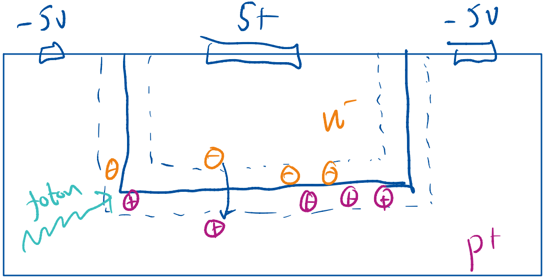
φ = Elektriske potensialet

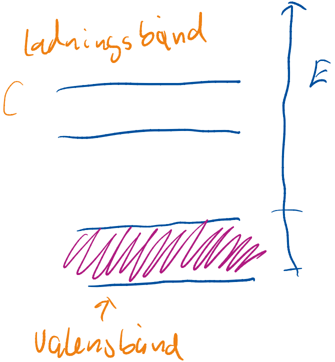
ρ = ladningstetthet

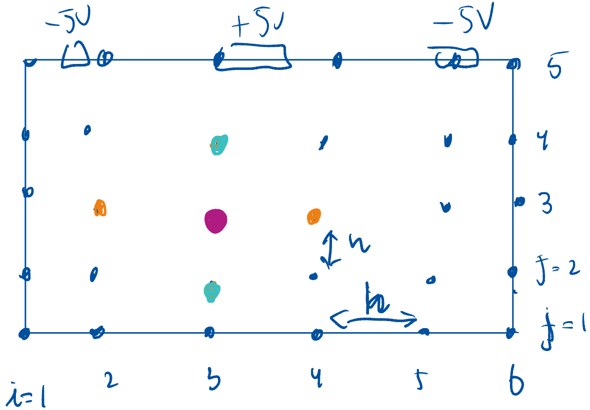
ε = elektrisk permittivitet

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

Fotoskreddiode





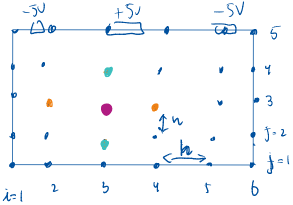


$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{4\varphi_{ij} - \varphi_{i+1} - \varphi_{i-1} - \varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{h^2} = 0$$

$\varphi_{ij} = \varphi_{3,3}$

aproksimasjon av $\dfrac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial x^2} = \dfrac{2\varphi_{ij} - \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{h^2}$



I tillegg: Grensebetingelser

Dirichlet på kontakter

Von Neumann ellers:

$$E_\perp = 0$$ langs sidene