



Forelesning XI og X

IMAT2150: Høsten 2023

Kent Holing, NTNU (26. og 27. september 2023)

Læringsmål

- Kjenne til indreprodukt mellom funksjoner definert på et intervall.
- Ortogonal (uendelig) basis av trigonometriske funksjoner.
- Kjenne definisjonen av trigonometriske rekker.
- Kjenne til at enhver stykkvis glatt funksjon definert på et intervall kan skrives som en trigonometrisk rekke.
- Kunne regne ut koeffisientene til en trigonometrik rekke.
- Fourierrekker av jevne og odde funksjoner.
- Sinus- og cosinus-rekker

Trigonometriske rekker

- Indreprodukt mellom funksjoner definert på et intervall

- Periodiske funksjoner

- Indreprodukt mellom sinus og cosinus-funksjoner

- Trigonometriske rekker

Odde og jevne funksjoner

- Odde og jevne funksjoner

- Odde og jevne periodiske utvidelser

- Sinus- og cosinusrekker

Definisjon (Indreprodukt)

Et indreprodukt på et reelt vektorrom V er et produkt $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ som tilfredstiller at

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
2. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.
3. $\langle tu, v \rangle = t \langle u, v \rangle$.
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ og $\langle u, u \rangle = 0$ hvis og bare hvis $u = 0$

for alle $u, v, w \in V$ og $t \in \mathbb{R}$.

Kreves ikke til eksamen.¹

Definisjon 9.1 (Vektorrom). En mengde V med operasjonene addisjon og skalar multiplikasjon kalles et **vektorrom** hvis følgende *aksiomer* er oppfylt for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i V og alle skalarer a og b i $\mathbb{R}$.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Kommutativ lov)
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Assosiativ lov)
4. Det finnes en $\mathbf{0}$ i V slik at $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in V$.
5. For hver $\mathbf{v}$ i V så finnes en $-\mathbf{v}$ i V slik at $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
6. $a\mathbf{v} \in V$.
7. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$. (Distributiv lov)
8. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$. (Distributiv lov)
9. $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$.
10. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

¹Dette ble etterspurt på forrige forelesning,

Kreves ikke til eksamen

Dette gir mere **abstrakte rom** (eksempler) enn dere kjenner til fra tidligere som $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Med nye eksempler mener vi ikke at de er fra i år eller nylig. Vi mener at de er nye for studenter som leser om vektorrom beskrevet gjennom aksiomer. De gamle eksemplene er planet, det tredimensjonale rommet og mengden $\mathbb{R}^n$ av alle n -tupler $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Her følger en liste av noen vektorrom.

- $\mathbb{R}^n$ er et vektorrom når $n \geq 1$.
- Mengden $\mathbb{P}_n$ av alle polynomer med grad mindre eller lik n danner et vektorrom.
- Mengden av alle reelle funksjoner definert på $\mathbb{R}$ danner et vektorrom.
- Mengden $M_{m \times n}$ av alle $m \times n$ matriser danner et vektorrom.
- Mengden av alle kontinuerlige reelle funksjoner definert på intervallet $[0, 1]$ danner et vektorrom.
- Mengden av alle uendelige følger.
- Mengden av alle konvergente uendelige følger.

Definisjon

Indreproduktet $\langle f, g \rangle$ mellom funksjonene f og g definert på intervallet $[a, b]$ er gitt ved integralet

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \, dx.$$

Eksempel

La $f(x) = 1$ og $g(x) = x$, begge definert på intervallet $[-1, 1]$. Indreproduktene $\langle f, g \rangle$, $\langle f, f \rangle$ og $\langle g, g \rangle$ er

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 xdx = 0$$

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 f(x)^2dx = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$\langle g, g \rangle = \int_{-1}^1 g(x)^2dx = \int_{-1}^1 x^2dx = 2/3$$

Fra eksempelet i forrige foil så vi at $\langle f, g \rangle = 0$. Vi definerer

Definisjon

To funksjoner f og g definert på et intervall $[a, b]$ kalles **ortogonale** hvis $\langle f, g \rangle = 0$.

Definisjon

En mengde $S = \{f_1, f_2, \dots\}$ av funksjoner definert på et intervall $[a, b]$ kalles for en **innbyrdes ortogonal familie** av funksjoner på $[a, b]$ hvis

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0, \text{ når } i \neq j \text{ hvis } \langle f_i, f_i \rangle \neq 0 \forall i, j = 1, 2, 3, \dots$$

Perioden er den minste T som oppfyller definisjonen nedenfor.

Kjente eksempler:

Cosinus og sinus har begge perioden 2π mens tangens har perioden π .

Periodiske funksjoner

Definisjon

En funksjon definert på $\mathbb{R}$ kalles for periodisk med periode T hvis $f(x + T) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Indreproduktet mellom to periodiske funksjoner f og g med periode $T = 2L$ er definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x) \, dx.$$

Viktig eksempel

Her er det $\sin \times \cos$, $\sin \times \sin$ og $\cos \times \cos$ kombinasjoner av $n\pi x/L$ i $[-L, L]$.

Indreprodukt mellom sinus og cosinus-funksjoner

Setning

Funksjonene

$$1, \cos \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \dots,$$
$$\sin \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{L}, \dots$$

danner en familie av inbyrdes ortogonale funksjoner på intervallet $[-L, L]$.

Funksjonene er ortogonale når vi kombinerer to av funksjonene med ulike indekser.

Sjekk av setningen

En trigonometrisk identitet (se tabell i kompendiet) gir

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{(n-m)\pi x}{L} \right) + \cos \left(\frac{(n+m)\pi x}{L} \right) \right] dx \end{aligned}$$

- I spesialtilfellet der $m = n$ blir svaret lik L
- I spesialtilfellet der $m \neq n$ blir svaret lik 0

Sjekk av setningen

En trigonometrisk identitet (se tabell i kompendiet) gir

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{(n-m)\pi x}{L} \right) + \cos \left(\frac{(n+m)\pi x}{L} \right) \right] dx \end{aligned}$$

- I spesialtilfellet der $m = n$ blir svaret lik L
- I spesialtilfellet der $m \neq n$ blir svaret lik 0

Tilfellene følger av omskrivingen av integranden og at sinus har perioden 2π eller at $\sin k\pi = 0$ for k heltallig.

Resten av setningen følger av **tilsvarende trigonometriske identiteter for produkter av to sinus uttrykk og cosinus $\times$ sinus uttrykk** fra funksjonsfamilien definert på forrige lysark.

Trigonometriske rekker

Definisjon (Trigonometriske rekker)

En **trigonometrisk rekke** er en uendelig rekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (1)$$

der $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ er konstante koeffisienter og der L er en reell konstant.

Enkelt eksempel

En trigonometrisk rekke kan ha uendelig mange ledd men det er ikke noe i veien fra at kun et endelig antall ledd er forskjellig fra null

Eksempel

$$1 + \sin x - \cos 2x + \sin 3x$$

er en trigonometrisk rekke der $L = \pi$. Alle koeffisienter bortsett fra $a_0 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = -1$ og $b_3 = 1$ er lik null.

Definisjon av fourierekken til en funksjon

Vær sikker på at $f(x)$ oppfyller **alle betingelsene** i setningen når du skal bestemme rekka (stykkevis kontinuert og periodisk funksjon med periode $2L$)!

Definisjon (Fourierrekken til funksjonen f)

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuert, periodisk funksjon med periode $2L$. Dens **Fourierrekke** er definert ved

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

der

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} f(x) dx, \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots \text{ og}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} f(x) dx, \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots$$

VIKTIG når vi kommer til randkrav til partielle differentialligninger

Setning (Formler for koeffisientene til en Trig. rekke)

Hvis en funksjon $f(x)$ er lik en trigonometrisk rekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

så kan vi regne ut verdiene til koeffisientene ved hjelp av formelene

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx.$$

En nyttig snarvei.

a) La $f(x) = 13 + 3 \sin^2 \pi x$ være definert på intervallet $[0, 1]$. Finn cosinusrekken til $f(x)$.

Løsning: Vi skriver først om $\sin^2 \pi x$ ved hjelp av formelarket.

$$\sin^2 \pi x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi x)$$

Vi setter det inn i $f(x)$:

$$f(x) = 13 + 3 \sin^2 \pi x = 13 + \frac{3}{2} (1 - \cos 2\pi x) = \frac{29}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\pi x.$$

Siden lengden av intervallet er $L = 1$ så er cosinusrekken til $f(x)$ en rekke på formen.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Vi kunne ha brukt integralformlene til å finne a_0 , a_1 , etc, men vi ser av forenklingen av $f(x)$ at den allerede er på cosinus-rekkeformat. Vi ser at $a_0 = \frac{29}{2}$ og $a_2 = -\frac{3}{2}$. De resterende koeffisientene er lik 0. Her bruker vi teoremet om at cosinusrekke-representasjonen er unik.

Bestem **enklest mulig** sinus-rekka til $f(x) = 2 \sin x (\cos x - 2 \sin^2 x)$.

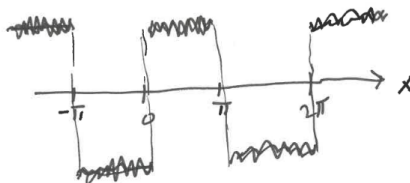
Svar: $b_0 = 0$, $b_1 = -3$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$ og $b_j = 0$ for $j \geq 4$.¹

¹Vis at $f(x) = -3 \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

Eksempler

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



Her er $L = \pi$ så $n\pi x/L = nx$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$h(x) = f(x) \cos nx$$

$$h(-x) = f(-x) \cos nx$$

$$h(-x) = -f(x) \cos nx = -h(x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx = 0 \quad \checkmark$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$h(x) = f(x) \sin nx$$

$$h(-x) = \dots f(x) \sin nx = h(x)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \overbrace{f(x)}^u \sin nx \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{k \cos nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi]$$

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{uodd } n \\ 1 & \text{jævn } n \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad \text{etc.}$$

$$b_2 = b_4 = \dots = 0$$

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

Konv. p.
 $x = \pi/2$

$$f(\pi/2) = k$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \pi/4$$

(LEIBNIZ: 1673)

VIKTIG!

Merk at oppfyller $f(x)$ betingelsene i setningen, så konvergerer alltid dens fourierrekke.

Fundamentalt teorem for fourierrekker

Setning

Fourierrekken til en periodisk stykkvis glatt funksjon $f(x)$ med periode $2L$ konvergerer mot f i alle punkter x , bortsett fra punkter der f er diskontinuerlig. I et slikt punkt, $x = x_0$, konvergerer f mot gjennomsnittet av høyre- og venstre-sidegrensene til $f(x)$.

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

Beviset utelates.

Eksempel - Sagtannfunksjonen

*Sagtann-funksjonen med periode $T = 2L$, definert ved $f(x) = x$ for alle $x \in (-L, L]$.
For alle heltall k er $f(x) = f(x - kT)$ når $x \in (-L + 2kL, L + 2kL]$.*

Sagtann-funksjonen med periode $T = 2L$, definert ved $f(x) = x$ for alle $x \in (-L, L]$.
For alle heltall k er $f(x) = f(x - kT)$ når $x \in (-L + 2kL, L + 2kL]$.

Eksempel (Fourier til sagtann med periode $T=2$)

Finn Fourierrekken til sagtannfunksjonen med periode $T=2$.

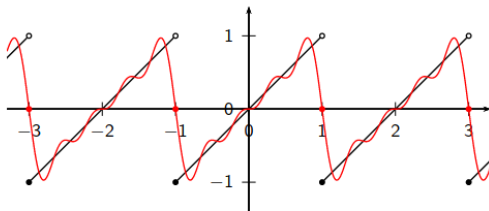
Løsning: Perioden er 2. Derfor er $L = 1$. Koeffisientene er $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = 0$,

$$a_n = \int_{-1}^1 t \cos n\pi t dt = \left[t \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \right]_{-1}^1 - \frac{1}{n\pi} \int_{-1}^1 \sin n\pi t dt = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 t \sin n\pi t dt = \left[-t \frac{1}{n\pi} \cos n\pi t \right]_{-1}^1 + \frac{1}{n\pi} \int_{-1}^1 \cos n\pi t dt \\ &= \left[-1 \frac{1}{n\pi} \cos n\pi - 1 \frac{1}{n\pi} \cos(-n\pi) \right] = \frac{2}{n\pi} (-1)^n. \end{aligned}$$

Fourierrekken til $f(t)$ er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^n \sin n\pi x$

Figur til eksempel (tilnærming med 4 sinusledd)



Figur: De 4 første sinus leddene i rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^n \sin n\pi t$ tilnærmer den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $1 \leq t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.

IMAT2150:

Eksempel - Sagtannfunksjonen



Det ser ut som om fourierrekkja konvergerer (ref. setningen om konvergens).

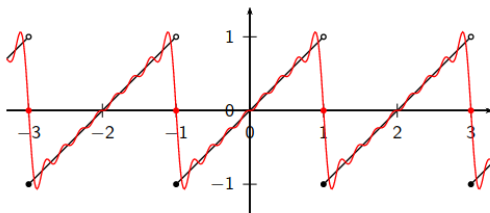
Merk hva som skjer der funksjonen er diskontinuerlig.

IMAT2150:

Eksempel - Sagtannfunksjonen

Det ser ut som om fourierrekkja konvergerer (ref. setningen om konvergens).
Merk hva som skjer der funksjonen er diskontinuerlig.

Figur til eksempel (tilnærming med 8 sinusledd)



Figur: De 8 første sinus leddene i rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^n \sin n\pi t$ tilnærmer den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $1 \leq t < 2$, $f(t+2) = f(t)$.

Viktige spesialtilfeller

Odde og jevne funksjoner

Definisjon

En funksjon $f(x)$ kalles **jevn** hvis $f(-x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. En funksjon $f(x)$ kalles **odde** hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Merk at $\omega > 0$.

Eksempler på jevne og odde funksjoner

- $\sin \omega x$ er en odde funksjon
- $\cos \omega x$ er en jevn funksjon
- $1 + x$ er hverken jevn eller odde
- Sagtannfunksjonen er en odde funksjon

VIKTIG

Sinus- og cosinusrekker

Definisjon

La f være definert på $[0, L]$. Fourierrekken til f_{odde} kalles for **sinusrekken** til f

Definisjon

La f være definert på $[0, L]$. Fourierrekken til f_{jevn} kalles for **cosinusrekken** til f

VIKTIG!

Fourier av odde og jevne funksjoner

Setning (Fourier for odde funksjoner)

For odde funksjoner er alle a -ene null. Dvs $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$.

Setning (Fourier for jevne funksjoner)

For jevne funksjoner er alle b -ene null. Dvs $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0$.

Dette følger av at produktet av en odde og jamn funksjon er en odde funksjon.

Fourierrekker av odde funksjoner

VIKTIG!

Odde funksjoner $\rightarrow$ sinus-rekker.

Fourierrekken for odde funksjoner

Setning

*La $f(x)$ være en stykkvis kontinuertlig periodisk funksjon.**Hvis $f(x)$ er **odde** så er*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

der

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} f(x) \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Merk faktoren $2/L$.

VIKTIG!

Jamne funksjoner $\rightarrow$ cosinus-rekker.

Fourierrekken for jevne funksjoner

Setning

La $f(x)$ være en stykkvis kontinuert periodisk funksjon.

Hvis $f(x)$ er **jevn** så er

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

der

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \text{ og } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} f(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Merk faktoren $2/L$.

VIKTIG

Odde og jevne periodiske utvidelser

En funksjon definert på et intervall $[0, L]$ kan utvides til en periodisk funksjon med periode $2L$ på to fornuftige måter. De to måtene kalles for en **jevn periodiske utvidelse**

$$f_{\text{jevn}}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

og en **odde periodisk utvidelse**.

$$f_{\text{odde}}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

Intervall skal være $-L < x < 0$, ikke $-L < x < 1$.

Periodiske utvidelser

Fjernutvidelse

$f(x)$ def på $[0, L]$

$$f_{\text{fjrn}}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

$$0 < x < L$$

$$f_j(x) = f(x)$$

$\therefore f_j$ ^{sammen} ~~den~~ samme funksjon

$$\boxed{f_j(-x)} = f(-x) = \boxed{f_j(x)}$$

Odde utvidelse

$$f_{\text{odde}}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

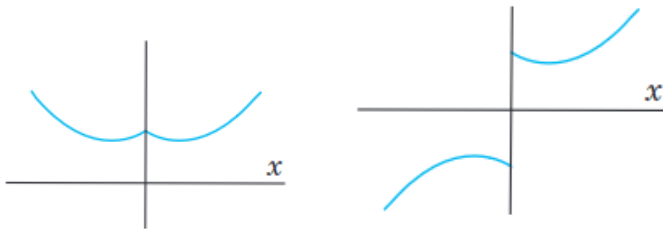
$$0 < x < L$$

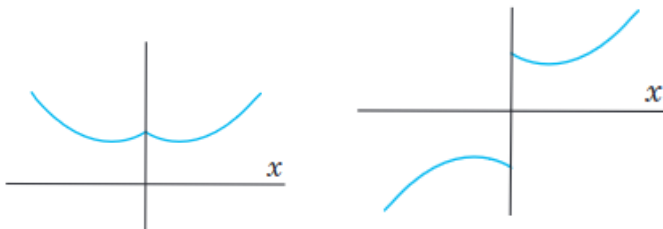
$$f_0(x) = f(x)$$

$$f_0(-x) = -f(x)$$

$$f_0(-x) = -f_0(x)$$

) : f_0 odde
funksjon

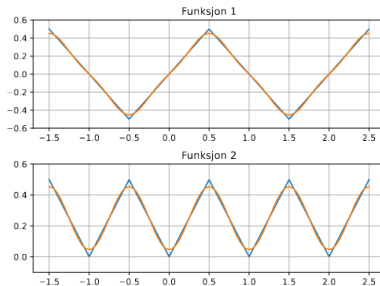




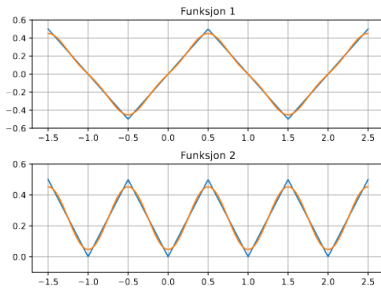
$$(a) \quad \int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx \quad \text{for even } g$$

$$(b) \quad \int_{-L}^L h(x) dx = 0 \quad \text{for odd } h$$

Eksempler på sinus- og cosinusrekker (fra eksamen)



Eksempler på sinus- og cosinusrekker (fra eksamen)



- a) Forklar hvordan du ved å se på figurene kan bestemme hvilken fourierrekke F eller G som tilhører hvilken periodisk funksjon 1 eller 2

Løsning: Vi ser at fourierrekken til F er en *cosinus*-rekke, da er funksjonen *jevn* - altså funksjon 2 ($F(a) = F(-a)$)
Vi ser at fourierrekken til G er en *sinus*-rekke, da er funksjonen *odde* - altså funksjon 1 ($G(a) = -G(-a)$)

- b) Fourierrekken til de to periodiske funksjonene kan finnes ved å gjøre periodiske utvidelser av en funksjon på et intervall $[0, L]$. Velg en passende verdi for L , skisser denne funksjonen og sett opp uttrykkene du trenger for å finne koeffisientene til hver av fourierrekken (du trenger ikke gjøre utregningene).

Eksempler på sinus- og cosinusrekker (fra eksamen)

Løsning: Vi kan lage funksjonene over ved å gjøre en jevn- eller odde- utvidelse av trekant-funksjonen:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1-x & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Den vil se akkurat ut som grafene på figuren (mellom 0 og 1)

En jevn utvidelse gir:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ a_n &= 2 \int_0^{1/2} x \cos n\pi x \, dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \cos n\pi x \, dx \\ a_0 &= 2 \int_0^{1/2} x \, dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \, dx \end{aligned}$$

En odde utvidelse gir:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ b_n &= 2 \int_0^{1/2} x \sin n\pi x \, dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin n\pi x \, dx \end{aligned}$$

Skrivefeil: I formelen for b_n (første linje) skal $\cos n\pi x/L$ erstattes med $\sin n\pi x/L$ (som gjort i andre linje).

Eksempel

Eksempel

Finn **cosinusrekken** til funksjonen $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$.

Merk at selv om $\sin x$ er odde er det den **jevne** funksjonen

$$f_{\text{jevn}}(x) = \begin{cases} \sin(x), & 0 < x < \pi \\ -\sin(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

vi skal finne Fourierrekken til. Da vet vi at $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ og så videre. Vi skal derfor kun regne ut a_0 og a_1 , a_2 og så videre.

For $0 < x < \pi$ er her $f(x) = \sin x$.

Finne a_0 til f_{jevn} fra forrige foil

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(-\cos \pi - (-\cos 0) \right) = \frac{2}{\pi}$$

For $0 < x < \pi$ er her $f(x) = \sin x$.

Integranden for a_n til høyre følger av 11.3 (s. 186) i kompendiet. (Gjengitt nederst.)

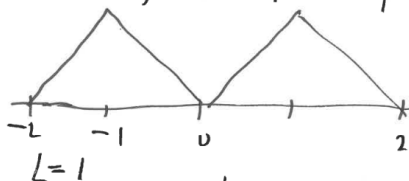
Finne a_n til f_{jevn}

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} (\sin(1-n)x - \sin(1+n)x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1-n} \cos(1-n)x + \frac{1}{1+n} \cos(1+n)x \right]_0^\pi \\ &= \begin{cases} 0, & \text{når } n \text{ er odde} \\ \frac{4n}{(1-n^2)\pi}, & \text{når } n \text{ er jevn} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \, dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{(n-m)\pi x}{L} \right) - \sin \left(\frac{(n+m)\pi x}{L} \right) \right] \, dx \quad (11.3)$$

EKS 11.4 fra kompendiet

Bestem FR til den janne periodiske
 $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ med period $T=2$



$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$(partiell \text{ int.}) \quad a_n = 2 \left[\frac{1}{n\pi} \times \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_0^1$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \sin n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{2}{n^2\pi^2}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2} \cos 5\pi x + \dots$$

Eksempel 11.4. Vi skal finne Fourierrekken til den jevne periodiske funksjonen gitt ved $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ med periode $T = 2$.

Løsning: Vi har $L = 1$ og $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3 \dots$ fordi $f(x)$ er jevn. Vi regner ut

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = 2 \left[\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{2}{n^2\pi^2}. \quad (11.5) \end{aligned}$$

For alle heltallige n er $\sin n\pi = 0$ For odde n har vi at $\cos n\pi = -1$ og for jevne n har vi $\cos n\pi = 1$. Derfor har vi

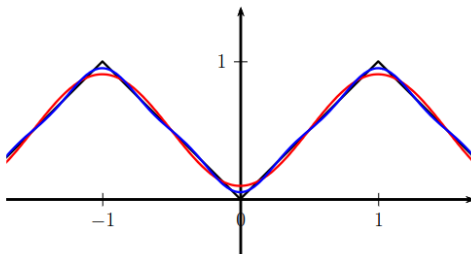
$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1).$$

Fourier rekken til $f(x)$ er

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2} \cos 5\pi x - \dots$$

Illustrasjon på punktkonvergens av fourierekker

Vi ser at funksjonen vi nettopp har bestemt fourierrekka til er **kontinuerlig**, og vi har derfor **punktkonvergens** for fourierrekka.



Illustrasjon på punktkonvergens av fourierekker

Vi setter $x = 1$ og bruker at $f(1) = 1$.

Dette gir følgende identitet for π :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} + \frac{4}{25\pi^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Dette er en kjent identitet for π , som ikke er enkel å vise uten bruk av fourierekker.¹

¹Det vrirmler av slike identiteter for π , og det er skrevet tjukke bøker om π ! Vi har allerede sett en slik identitet av Leibnitz fra 1673.

VIKTIG

Merk betingelsene i setningen!

Setning (Derivasjon av fourierrekke)

Gitt en funksjonen $f(x)$ og la denne ha Fourierrekke

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

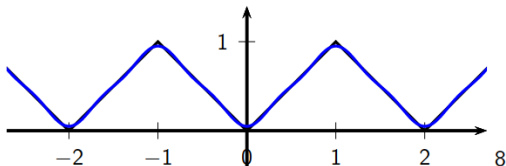
Hvis $f(x)$ periodisk med periode $T = 2L$, $f(x)$ er kontinuert og $f'(x)$ er stykkvis kontinuert så er

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(-a_n \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right).$$

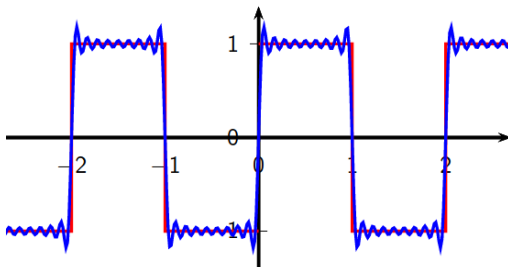
Vi kan altså derivere rekka leddvis med konvergens!

Her er en variant av sagtannfunksjonen som oppfyller kravet til gyldig leddvis av fourierrekkja.

Grafen til $f(x)$ i eksempelet



Grafen til $f'(x)$ i eksempelet



Vi lager en **odde periodisk utvidelse** av $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L < x < 0 \\ f(x), & 0 < x < L \end{cases},$$

$$f(x + 2L) = f(x).$$

Vi regner ut $b_1, b_2, b_3, \dots$ ved hjelp av formlene i setning 11.3.

Eksempel 11.5. Vi vil finne sinusrekken til funksjonen $f(x) = 1$ definert på intervallet $[0, 1]$.

Løsning: Vi utvider $f(x)$ til en odde periodisk funksjon som vist i figuren.



Vi regner ut koeffisientene $b_1, b_2, \dots$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^1 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 2 \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} (-\cos n\pi + 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ jevn} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ odde} \end{cases}.$$

Vi får derfor

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sin \pi x + \frac{4}{3\pi} \sin 3\pi x + \frac{4}{5\pi} \sin 5\pi x + \frac{4}{7\pi} \sin 7\pi x + \dots$$

Vi skal bruke eksemplet ovenfor til å vise at derivasjon av fourierrekkja bærer her galt av sted.

Eksemplet viser at **kontinuitet av funksjonen er nødvendig (men ikke tilstrekkelig)** for at leddvis derivasjon skal være gyldig.

Vi skal bruke eksemplet ovenfor til å vise at derivasjon av fourierrekkja bærer her galt av sted.

Eksemplet viser at **kontinuitet av funksjonen er nødvendig (men ikke tilstrekkelig)** for at leddvis derivasjon skal være gyldig.

Merk at **funksjonen er stykkevis derivert med derivert lik 0, men ikke kontinuerlig.**

Vi skal bruke eksemplet ovenfor til å vise at derivasjon av fourierrekkas bærer her galt av sted.

Eksemplet viser at **kontinuitet av funksjonen er nødvendig (men ikke tilstrekkelig)** for at leddvis derivasjon skal være gyldig.

Merk at **funksjonen er stykkevis derivert med derivert lik 0, men ikke kontinuert**.

Leddvis derivasjon gir

$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi} \sin \pi x + \frac{4}{3\pi} \sin 3\pi x + \frac{4}{5\pi} \sin 5\pi x + \dots$$

$$0 = 4 \sin \pi x + 4 \sin 3\pi x + 4 \sin 5\pi x + \dots$$

Ovenfor skal sin byttes ut med cos, men påstanden nedenfor er fremdeles riktig.

Vi skal bruke eksemplet ovenfor til å vise at derivasjon av fourierrekkja bærer her galt av sted.

Eksemplet viser at **kontinuitet av funksjonen er nødvendig (men ikke tistrekkelig)** for at leddvis derivasjon skal være gyldig.

Merk at **funksjonen er stykkevis derivert med derivert lik 0, men ikke kontinuertlig.**

Leddvis derivasjon gir

$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi} \sin \pi x + \frac{4}{3\pi} \sin 3\pi x + \frac{4}{5\pi} \sin 5\pi x + \dots$$

$$0 = 4 \sin \pi x + 4 \sin 3\pi x + 4 \sin 5\pi x + \dots$$

Ovenfor skal sin byttes ut med cos, men påstanden nedenfor er fremdeles riktig.

Dette viser at dette fører til **selvmotsigelsen** på siste linje ovenfor.

VIKTIG når vi kommer til randkrav til partielle differentialligninger

Setning (Formler for koeffisientene til en Trig. rekke)

Hvis en funksjon $f(x)$ er lik en trigonometrisk rekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

så kan vi regne ut verdiene til koeffisientene ved hjelp av formelene

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Hvordan bevise dette?

Et mer presist bevis følger på de neste lysarkene

Bevis at koeffisientene
til en TR er korrekte

$$\text{Anta } f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x/L + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x/L$$

Vi bruker den ortogonale familien
 $\{1, \cos j\pi x/L, \sin j\pi x/L\} \quad j=1(1)\dots$

$$\langle 1, f(x) \rangle = a_0 \langle 1, 1 \rangle$$

$$a_0 \int_{-L}^L 1 dx = \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad \checkmark$$

Et mer presist bevis følger på de neste lysarkene

$$\begin{aligned}
 \left\langle \cos \frac{j\pi x}{L}, f(x) \right\rangle &= a_j \left\langle \cos \frac{j\pi x}{L}, \cos \frac{j\pi x}{L} \right\rangle \\
 \int_{-L}^L \cos \frac{j\pi x}{L} f(x) dx &= a_j L \\
 \underline{a_j} &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{j\pi x}{L} f(x) dx \\
 \text{Tilsv. vis at} \\
 \underline{b_j} &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{j\pi x}{L} dx
 \end{aligned}$$

Se Kreyzig: Advanced Engineering Mathematics. (10. utgave, s. 474.)

$$(5) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

and call (5) the **Fourier series** of $f(x)$. We shall prove that in this case the coefficients of (5) are the so-called **Fourier coefficients** of $f(x)$, given by the **Euler formulas**

$$(6) \quad \begin{aligned} (0) \quad a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ (a) \quad a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & n = 1, 2, \dots \\ (b) \quad b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Application of Theorem 1 to the Fourier Series (5)

We prove (6.0). Integrating on both sides of (5) from $-\pi$ to π , we get

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx.$$

We now assume that termwise integration is allowed. (We shall say in the proof of Theorem 2 when this is true.) Then we obtain

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right).$$

The first term on the right equals $2\pi a_0$. Integration shows that all the other integrals are 0. Hence division by 2π gives (6.0).

We prove (6a). Multiplying (5) on both sides by $\cos mx$ with any **fixed** positive integer m and integrating from $-\pi$ to π , we have

$$(10) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx \, dx.$$

We now integrate term by term. Then on the right we obtain an integral of $a_0 \cos mx$, which is 0; an integral of $a_n \cos nx \cos mx$, which is $a_n \pi$ for $n = m$ and 0 for $n \neq m$ by (9a); and an integral of $b_n \sin nx \cos mx$, which is 0 for all n and m by (9c). Hence the right side of (10) equals $a_m \pi$. Division by π gives (6a) (with m instead of n).

We finally prove (6b). Multiplying (5) on both sides by $\sin mx$ with any **fixed** positive integer m and integrating from $-\pi$ to π , we get

$$(11) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \, dx.$$

Integrating term by term, we obtain on the right an integral of $a_0 \sin mx$, which is 0; an integral of $a_n \cos nx \sin mx$, which is 0 by (9c); and an integral of $b_n \sin nx \sin mx$, which is $b_n \pi$ if $n = m$ and 0 if $n \neq m$, by (9b). This implies (6b) (with n denoted by m). This completes the proof of the Euler formulas (6) for the Fourier coefficients. ■