



Forelesning XII og XIII

IMAT2150: Høsten 2023

Kent Holing, NTNU (3. og 4. oktober 2023)

FLERE EKSEMPLER PÅ FOURIERREKKER

Vi bestemmer **sinusrekka** til cosinus (hva er cosinusrekka?):

Vi bestemmer **sinusrekka** til cosinus (hva er cosinusrekka?):

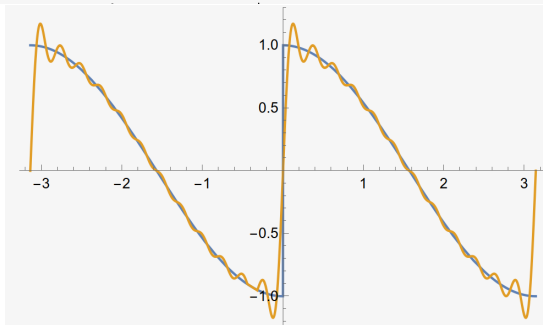
```
f[x_]:=Cos[x];  
g[x_]:=If[x>0,Return[Cos[x]],Return[-Cos[x]]];  
FR=FourierSinSeries[f[x],x,25]  
Plot[{g[x],*},{x,-Pi,Pi}]
```

$$\frac{8 \sin[2x]}{3\pi} + \frac{16 \sin[4x]}{15\pi} + \frac{24 \sin[6x]}{35\pi} + \frac{32 \sin[8x]}{63\pi} + \frac{40 \sin[10x]}{99\pi} + \frac{48 \sin[12x]}{143\pi} + \frac{56 \sin[14x]}{195\pi} + \frac{64 \sin[16x]}{255\pi} +$$

Vi bestemmer **sinusrekka** til cosinus (hva er cosinusrekka?):

```
f[x_] := Cos[x];  
g[x_] := If[x > 0, Return[Cos[x]], Return[-Cos[x]]];  
FR = FourierSinSeries[f[x], x, 25]  
Plot[{g[x], %}, {x, -Pi, Pi}]
```

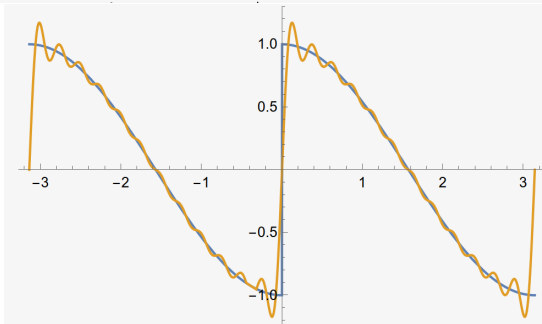
$$\frac{8 \sin[2x]}{3\pi} + \frac{16 \sin[4x]}{15\pi} + \frac{24 \sin[6x]}{35\pi} + \frac{32 \sin[8x]}{63\pi} + \frac{40 \sin[10x]}{99\pi} + \frac{48 \sin[12x]}{143\pi} + \frac{56 \sin[14x]}{195\pi} + \frac{64 \sin[16x]}{255\pi} +$$



Vi bestemmer **sinusrekka** til cosinus (hva er cosinusrekka?):

```
f[x_]:=Cos[x];  
g[x_]:=If[x>0,Return[Cos[x]],Return[-Cos[x]]];  
FR=FourierSinSeries[f[x],x,25]  
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]
```

$$\frac{8 \sin[2x]}{3\pi} + \frac{16 \sin[4x]}{15\pi} + \frac{24 \sin[6x]}{35\pi} + \frac{32 \sin[8x]}{63\pi} + \frac{40 \sin[10x]}{99\pi} + \frac{48 \sin[12x]}{143\pi} + \frac{56 \sin[14x]}{195\pi} + \frac{64 \sin[16x]}{255\pi} +$$



Vi viser de 25 første leddene i rekka og ser at den tilnærmer funksjonen $g(x)$ (den **odde utvidelsen** til cosinus) meget godt, men vi ser også det såkalte **Gibbs fenomenet**. (Svingningene rundt diskontinuiteten.) Hva skjer for $x = 0$ og $x = \pi/2$?

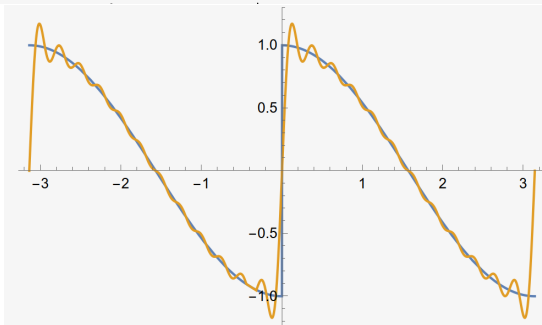
IMAT2150:

Sinusrekka til cosinus

Vi bestemmer **sinusrekka** til cosinus (hva er cosinusrekka?):

```
f[x_]:=Cos[x];  
g[x_]:=If[x>0,Return[Cos[x]],Return[-Cos[x]]];  
FR=FourierSinSeries[f[x],x,25]  
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]
```

$$\frac{8 \sin[2 x]}{3 \pi} + \frac{16 \sin[4 x]}{15 \pi} + \frac{24 \sin[6 x]}{35 \pi} + \frac{32 \sin[8 x]}{63 \pi} + \frac{40 \sin[10 x]}{99 \pi} + \frac{48 \sin[12 x]}{143 \pi} + \frac{56 \sin[14 x]}{195 \pi} + \frac{64 \sin[16 x]}{255 \pi} +$$



Vi viser de 25 første leddene i rekka og ser at den tilnærmer funksjonen $g(x)$ (den **odde utvidelsen** til cosinus) meget godt, men vi ser også det såkalte **Gibbs fenomenet**. (Svingningene rundt diskontinuiteten.) Hva skjer for $x = 0$ og $x = \pi/2$?

Vi bestemmer **cosinusrekka** til sinus.¹

Vi viser summen av noen av de første leddene (med henholdsvis 1 og 2 ledd) i rekka.

Rask konvergens da funksjonen er glatt.

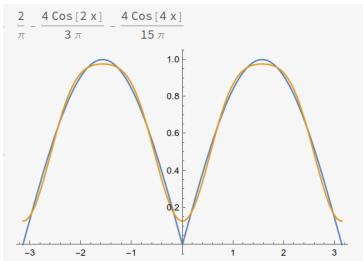
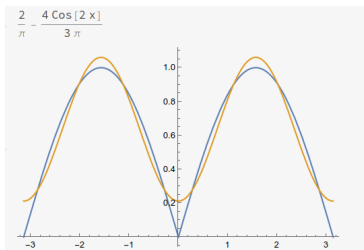
¹Dvs. dens **jamne** utvidelse.

Vi bestemmer **cosinusrekka** til sinus.¹

Vi viser summen av noen av de første leddene (med henholdsvis 1 og 2 ledd) i rekka.

Rask konvergens da funksjonen er glatt.

```
f[x_]:=Sin[x];  
g[x_]:=If[x>0,Return[Sin[x]],Return[Sin[-x]]]; (** even extension **)  
FR[m]:=FourierCosSeries[f[x],x,m]  
FR[2]  
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]  
FR[4]  
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]
```



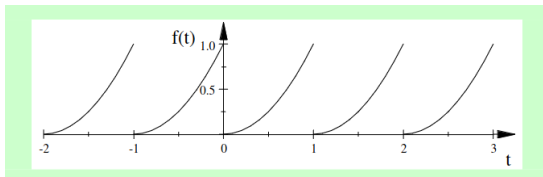
¹Dvs. dens **jamne** utvidelse.

Enda et fourierrekke-eksempel 1 (8)

Eksempel 3.3: Finn Fourier-rekka til funksjonen f gitt ved

$$f(t) = t^2 \text{ når } 0 \leq t < 1, \quad f(t+1) = f(t).$$

Bruk resultatet til å finne summen av den uendelige rekka som framkommer når $t = 0$.



Enda et fourierrekke-eksempel 2 (8)

Løsning: Denne funksjonen har periode

$$p = 2L = 1 \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}.$$

Dette fører til at

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

og

$$n \frac{\pi}{L} t = n \cdot \frac{\pi}{\frac{1}{2}} t = 2n\pi t.$$

Da blir

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_0^1 f(t) \cdot \cos\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt = 2 \int_0^1 t^2 \cdot \cos(2n\pi t) dt \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4\pi^3 n^3} \left[2\pi n t \cos(2n\pi t) - \sin(2n\pi t) + 2\pi^2 n^2 t^2 \sin(2n\pi t) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\pi^3 n^3} (2\pi n \cos(2n\pi) - \sin(2n\pi) + 2\pi^2 n^2 \sin(2n\pi) - 0 + \sin 0 - 0) \\ &= \frac{1}{2\pi^3 n^3} (2\pi n \cdot 1) = \underline{\underline{\frac{1}{\pi^2 n^2}}} \end{aligned}$$

Enda et fourierrekke-eksempel 3 (8)

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{L} \int_0^1 f(t) \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt = 2 \int_0^1 t^2 \cdot \sin(2n\pi t) dt \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{4\pi^3 n^3} \left[\cos(2n\pi t) + 2n\pi t \sin(2n\pi t) - 2\pi^2 n^2 t^2 \cos(2n\pi t) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2\pi^3 n^3} (\cos(2n\pi) + 2\pi n \sin(2n\pi) - 2\pi^2 n^2 \cos(2n\pi) - \cos 0 - 0 + 0) \\
 &= \frac{1}{2\pi^3 n^3} (1 + 0 - 2\pi^2 n^2 \cdot 1 - 1) = \frac{1}{2\pi^3 n^3} (-2\pi^2 n^2) = -\frac{1}{\pi n}
 \end{aligned}$$

Altså blir Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{\pi}{L} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} t\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2n\pi t) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\pi t).$$

Når $t = 0$, blir alle sinus-leddene lik null mens alle cosinus-faktorene blir lik 1. Da blir

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot 1 = \frac{1}{2}(1+0) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Merk både cosinus- og sinusledd i fourierrekka!

Enda et fourierrekke-eksempel 4 (8)

Fra det ovenfor har vi at $a_n = 1/(n\pi)^2$ og $b_n = -1/(n\pi)$, dvs. $a_n = b_n^2$ for $n = 1, 2, \dots$, som stemmer med det Mathematica® gir,

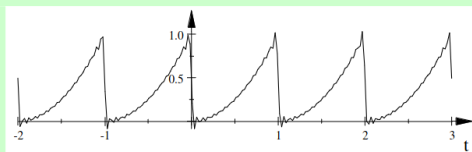
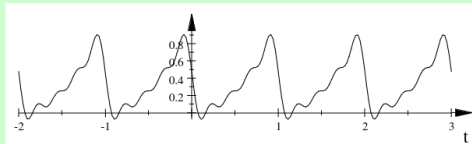
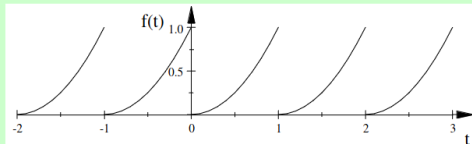
```
an[n_]:=2Integrate[x^2 Cos[2 n Pi x],{x,0,1}];
bn[n_]:=2Integrate[x^2 Sin[2 n Pi x],{x,0,1}];

an@Range[5]
{-2, 1, 1, 1, 1}
{Pi^2, 1/9 Pi^2, 1/16 Pi^2, 1/25 Pi^2, 1/36 Pi^2}

bn@Range[5]
{-1/Pi, 1/2 Pi, -1/3 Pi, 1/4 Pi, -1/5 Pi}
```

Enda et fourierrekke-eksempel 5 (8)

Nedenfor vises den periodiske versjonen av $f(t) = t^2$ og henholdsvis 2 og 15 ledd av fourierrekka. (Senere konvergens enn i det forrige eksemplet. Hvorfor?)



Enda et fourierrekke-eksempel 6 (8)

Nedenfor har vi den periodiske versjonen av $f(t) = t^2$ og med periode 2 mens eksemplet ovenfor hadde periode 1.

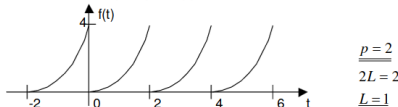
Gitt funksjonen

$$f(t) = t^2 \text{ når } 0 \leq t < 2, \quad f(t+2) = f(t).$$

- 1) Skisser grafen til funksjonen, og angi perioden p .
- 2) Finn Fourier-rekka til funksjonen.
- 3) Bruk resultatet ovenfor til å finne summen av rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$f(t) = t^2 \text{ når } 0 \leq t < 2, \quad f(t+2) = f(t).$$

1)



2) Rekka er av formen

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \cdot t) \\ a_0 = \frac{1}{2L} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2 \cdot 1} \int_0^2 t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}. \\ a_n = \frac{1}{L} \int_0^2 f(t) \cdot \cos\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt = \frac{1}{1} \int_0^2 t^2 \cos(n\pi t) dt \\ = \frac{2(2n \cos(2n\pi)\pi + (2n^2\pi^2 - 1)\sin(2n\pi))}{n^3 \pi^3} = \frac{2(2n \cdot 1 \cdot \pi + 0)}{n^3 \pi^3} = \frac{4}{n^2 \pi^2} \\ b_n = \frac{1}{L} \int_0^2 f(t) \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt = \frac{1}{1} \int_0^2 t^2 \sin(n\pi t) dt \\ = \frac{-2((2n^2\pi^2 - 1)\cos(2n\pi) - 2n \sin(2n\pi)\pi + 1)}{n^3 \pi^3} \\ = \frac{-2((2n^2\pi^2 - 1) \cdot 1 - 0 + 1)}{n^3 \pi^3} = \frac{-2(2n^2\pi^2 - 1 + 1)}{n^3 \pi^3} = \frac{-4}{n\pi} \end{aligned}$$

Enda et fourierrekke-eksempel 8 (8)

3) Vi får rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ når $\cos(n\pi t) = 1$ samtidig som $\sin(n\pi t) = 0$, altså når $t = 0$.

Da blir rekka

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Når $t = 0$ konvergerer rekka mot $\frac{4+0}{2} = 2$, slik at vi får

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} \left(2 - \frac{4}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}.$$

Hva er **sammenhengen** mellom koeffisientene i fourierrekka i de to siste eksemplene?

Kunne vi ha sett dette uten å beregne eksplisitt koeffisientene i det siste eksemplet?

Å beregne fourierrekker fører ofte (som vi har sett) til mange (og ofte) kompliserte integraler å beregne hvis det gjøres for hånd, men det finnes dataverktøy som gjør dette.

Å beregne fourierrekker fører ofte (som vi har sett) til mange (og ofte) kompliserte integraler å beregne hvis det gjøres for hånd, men det finnes dataverktøy som gjør dette.

Jeg viser en 3-minutters demo av et slikt verktøy, som jeg enkelt og raskt installerte på min private laptop for en rimelig penge.

Å beregne fourierrekker fører ofte (som vi har sett) til mange (og ofte) kompliserte integraler å beregne hvis det gjøres for hånd, men det finnes dataverktøy som gjør dette.

Jeg viser en 3-minutters demo av et slikt verktøy, som jeg enkelt og raskt installerte på min private laptop for en rimelig penge.

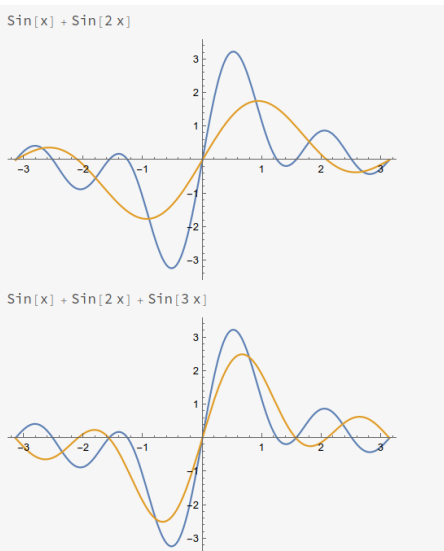
Slike hjelpemidler (det er flere alternativer) kan være svært viktige i en travel ingeniørs hverdag.


```
f[x_]:=Sin[x] + 2*Cos[x]*Sin[x] + 3*Cos[x]^2*Sin[x] + 4*Cos[x]^3*Sin[x] - Sin[x]^3 - 4*Cos[x]*Sin[x]^3;  
g[x_]:=If[x>0,Return[f[x]],Return[-f[-x]]];  
FR[m]:=FourierSinSeries[f[x],x,m]  
FR[2]  
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]  
FR[3]  
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]  
FR[4]  
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]  
FR[10]  
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]
```

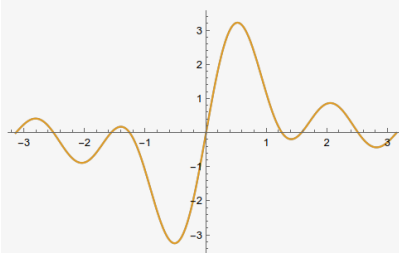
```
f[x_]:=Sin[x] + 2*Cos[x]*Sin[x] + 3*Cos[x]^2*Sin[x] + 4*Cos[x]^3*Sin[x] - Sin[x]^3 - 4*Cos[x]*Sin[x]^3;
g[x_]:=If[x>0,Return[f[x]],Return[-f[-x]]];
FR[m]:=FourierSinSeries[f[x],x,m]
FR[2]
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]
FR[3]
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]
FR[4]
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]
FR[10]
Plot[{g[x],%},{x,-Pi,Pi}]
```

Her er $f(x)$ ekvivalent med $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$.

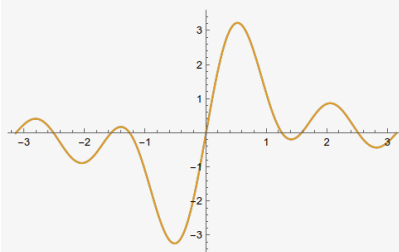
La oss se om sinusrekka gjensker denne odde utvidelsen $g(x)$ av $f(x)$.



$$\sin[x] + \sin[2x] + \sin[3x] + \sin[4x]$$



$$\sin[x] + \sin[2x] + \sin[3x] + \sin[4x]$$



PARTIELLE DIFFERENTIALLIGNINGER

Important (one-dimensional) Examples

The (1D) heat equation. Given some heat source $q(x, t)$ and some α , find the temperature $u(x, t)$ which fulfils

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t)$$

The (1D) wave equation. Find u that fulfils

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

where c is the wave speed.

Vibration of an elastic beam (bar). Let $q(x, t)$ denote some mechanical load of the bar. Find u which fulfils

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = q(x, t),$$

Important (2D/3D) Examples

The (2D) wave equation. Find $u = u(t, x, y)$ that fulfils

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

where c is the wave speed

The (2D) Laplace equation. Find $u = u(t, x, y)$ that fulfils

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Introducing $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ we can write this in short as

$$\Delta u = 0$$

The (2D) Poisson equation. given some $f = f(x, y)$, find $u(x, y)$ such that

$$\Delta u = f.$$

Det er svært viktig at differentialligningen **suppleres med velegnede (riktige) tilleggsbetingelser** for å sikre at vi har (entydig) løsning i det tid- og romspennet vi er interessert i å modellere.

Det er svært viktig at differentialligningen **suppleres med velegnede (riktige) tilleggsbetingelser** for å sikre at vi har (entydig) løsning i det tid- og romspennet vi er interessert i å modellere.

La en $D(u) = 0$ være en gitt partiell differentialligning.

Hvis (*) $D(au + bv) = a D(u) + b D(v)$ for alle u og v og konstanter a og b , så sies ligningen å være **lineær** (med konstante koeffisienter).

Det er svært viktig at differentialligningen **suppleres med velegnede (riktige) tilleggsbetingelser** for å sikre at vi har (entydig) løsning i det tid- og romspennet vi er interessert i å modellere.

La en $D(u) = 0$ være en gitt partiell differentialligning.

Hvis (*) $D(au + bv) = a D(u) + b D(v)$ for alle u og v og konstanter a og b , så sies ligningen å være **lineær** (med konstante koeffisienter).

For eksempel vil den partielle differentialligningen $u_t = c^2 u_{xx}$ oppfylle (*), og den er derfor lineær. (Vis selv dette!)

Det er svært viktig at differentialligningen **suppleres med velegnede (riktige) tilleggsbetingelser** for å sikre at vi har (entydig) løsning i det tid- og romspennet vi er interessert i å modellere.

La en $D(u) = 0$ være en gitt partiell differentialligning.

Hvis (*) $D(au + bv) = a D(u) + b D(v)$ for alle u og v og konstanter a og b , så sies ligningen å være **lineær** (med konstante koeffisienter).

For eksempel vil den partielle differentialligningen $u_t = c^2 u_{xx}$ oppfylle (*), og den er derfor lineær. (Vis selv dette!)

Vi skal bare se på lineære partielle differentialligninger i dette faget.

Merk: Differentialligningen er (må være) både **linære** og **homogene**.
(Det siste betyr null høyreside).

Merk: Differentialligningen er (må være) både **linære** og **homogene**.

(Det siste betyr null høyreside).

Superposisjonsprinsippet

Setning (Superposisjonsprinsippet)

Hvis $f(x, y, z, t)$ og $g(x, y, z, t)$ begge er løsninger av samme homogene lineære partielle differensiallikning, så er summen

$$a f(x, y, z, t) + b g(x, y, z, t)$$

også en løsning av den samme likningen for hvilket som helst par av konstanter a og b .

Bevis for $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$:

Merk: Differentialligningen er (må være) både **linære** og **homogene**.

(Det siste betyr null høyreside).

Superposisjonsprinsippet

Setning (Superposisjonsprinsippet)

Hvis $f(x, y, z, t)$ og $g(x, y, z, t)$ begge er løsninger av samme homogene lineære partielle differensiallikning, så er summen

$$a f(x, y, z, t) + b g(x, y, z, t)$$

også en løsning av den samme likningen for hvilket som helst par av konstanter a og b .

Bevis for $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$:

La $v(x, t) = a f(x, t) + b g(x, t)$.

Da er $v_{tt} - c^2 v_{xx} = a (f_{tt} - c^2 f_{xx}) + b (g_{tt} - c^2 g_{xx}) = a \times 0 + b \times 0 = 0$, så $v(x, t)$

er en løsning av $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ hvis $f(x, t)$ og $g(x, t)$ er løsninger.

Rektangulær rand $[a, b] \times [c, d]$ ($x \in [a, b]$ og $y \in [c, d]$).

Dirichletproblem

I et Dirichletproblem er verdien til den ukjente funksjonen gitt for randen til området.
Et spesialtilfelle er en rektangulær rand:

$$f(a, y) = W(y)$$

$$f(b, y) = E(y)$$

$$f(x, c) = S(x)$$

$$f(x, d) = N(x).$$

Rektangulær rand $[a, b] \times [c, d]$ ($x \in [a, b]$ og $y \in [c, d]$).
(Fysisk tolkning: Null fluks over randen.)

Neumannproblem

I et Neumannproblem er verdier til de deriverte av den ukjente funksjonen gitt på randen. For eksempel kan en slik randbetingelse være

$$f_x(a, y) = 0$$

$$f_x(b, y) = 0$$

$$f_y(x, c) = 0$$

$$f_y(x, d) = 0.$$

LINEÆRE PDEr

$L_n D(u) = 0$ være en
PDE

Def. $D(u) = 0$ er en
linear lign. hvis

$$D(au + bv) = aD(u) + bD(v)$$

a, b konstanter

Eks. $D(u) = u_{tt} - u_{xx} = 0$

$$\begin{aligned}
 \underline{D(au+bv)} &= \\
 (au+bv)_{tt} - (au+bv)_{xx} \\
 &= au_{tt} - au_{xx} \\
 &\quad + bv_{tt} - bv_{xx} \\
 &= a(u_{tt} - u_{xx}) \\
 &\quad + b(v_{tt} - v_{xx}) \\
 &= \underline{aD(u) + bD(v)}
 \end{aligned}$$

Dette gir oss ~~SPP~~ SPP
(superposisjonsprinsippet).

Hvorfor følger
SPP?

Vi har

$$D(an + bv) = aD(u) + bD(v)$$

Hvis u og v er løsninger
av både $Du^2 = 0$ og $Dv = 0$
som er det ovenfor
gir

$$\begin{aligned} D(an + bv) &= a \cdot 0 + b \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ $an + bv$ er også

løsning av $D(\cdot) = 0$

Metoden med **separasjon av variable** er en meget viktig og anvendbar metode som bruker teorien om fourierrekker når det kommer til randkrav.

Metoden med **separasjon av variable** er en meget viktig og anvendbar metode som bruker teorien om fourierrekker når det kommer til randkrav.

Metoden overfører den partielle differensialligningen til **to ordinære differentialligninger**.

Metoden med **separasjon av variable** er en meget viktig og anvendbar metode som bruker teorien om fourierrekker når det kommer til randkrav.

Metoden overfører den partielle differensialligningen til **to ordinære differentialligninger**.

Vi vil finne løsningen av varmelikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

med initialbetingelse $T(x, 0) = \sin^2 \pi x$ og randbetingelse $T(0, t) = T(1, t) = 0$.

Metoden med **separasjon av variable** er en meget viktig og anvendbar metode som bruker teorien om fourierrekker når det kommer til randkrav.

Metoden overfører den partielle differensialligningen til **to ordinære differentialligninger**.

Vi vil finne løsningen av varmelikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

med initialbetingelse $T(x, 0) = \sin^2 \pi x$ og randbetingelse $T(0, t) = T(1, t) = 0$.

Merk at vi her har **både** en initialbetingelse og en randbetingelse, som overføres til initialbetingelser for de to ordinære differentialligningene.

SEPARASJON AV VARIABLE

Vi løser ligningen $T_t = T_{xx}$.

Sett inn $T(x, t) = F(x)G(t)$ i likningen:

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t).$$

og separer

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Hver side av likningen er konstant lik k fordi VS er funksjon av t og HS er funksjon av x
Derfor har vi

$$G'(t) = k G(t) \text{ og } F''(x) = k F(x)$$

SEPARASJON AV VARIABLE

Vi løser ligningen $T_t = T_{xx}$.

Sett inn $T(x, t) = F(x)G(t)$ i likningen:

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t).$$

og separer

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Hver side av likningen er konstant lik k fordi VS er funksjon av t og HS er funksjon av x
Derfor har vi

$$G'(t) = k G(t) \text{ og } F''(x) = k F(x)$$

Merk at vi her får to enkle og kjente ordinære differentialligninger å løse (én i t og én i x).¹

¹Disse ligningene er vel kjent allerede fra VG skole, men se "crash-kurset" for disse på neste lysark.

SEPARASJON AV VARIABLE

Vi løser ligningen $T_t = T_{xx}$.

Sett inn $T(x, t) = F(x)G(t)$ i likningen:

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t).$$

og separer

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Hver side av likningen er konstant lik k fordi VS er funksjon av t og HS er funksjon av x
Derfor har vi

$$G'(t) = k G(t) \text{ og } F''(x) = k F(x)$$

Merk at vi her får to enkle og kjente ordinære differentialligninger å løse (én i t og én i x).¹

Hvorfor må påstanden om k være riktig?²

¹Disse ligningene er vel kjent allerede fra VG skole, men se "crash-kurset" for disse på neste lysark.

²La $g(t) = \dot{G}(t)/G(t)$ og $f(x) = F''(x)/F(x)$. Både den deriverte av $g(t) = f(x)$ og $f(x) = g(t)$ (mhp. henholdsvis de uavhengige t og x) er begge 0 (dvs. $\dot{g}(t) = \dot{f}(x) = 0$ og $f'(x) = g'(t) = 0$). M.a.o. er begge disse funksjonene konstanter, og når funksjonene er like, må disse konstantene også være like.

Ligningen $\dot{G}(t) = k G(t)$ er enda enklere å løse enn ligningene nedenfor, og har løsning $C e^{k t}$.

Løsningsmetode for difflikningen $y'' + by' + cy = 0$:

- 1) Difflikningen gir opphav til en ny likning

$$r^2 + br + c = 0 \quad (3.11)$$

som kalles *den karakteristiske likningen* til difflikningen.

- 2) Løsningene til difflikningen vil avhenge av løsningene til andregradslikningen (3.11), hvorav vi har følgende tre tilfeller:

- a) To reelle røtter r_1 og r_2 (for eksempel $r^2 + 2r - 3 = 0$, der røttene er 1 og -3). Da har vi løsningsformel

$$y(x) = C e^{r_1 x} + D e^{r_2 x}, \quad C, D \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

- b) En reell rot r_1 (for eksempel $r^2 + 2r + 1 = 0$ der $r_1 = -1$). Løsningsformelen viser seg nå å bli

$$y(x) = C e^{r_1 x} + D x e^{r_1 x}, \quad C, D \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

- c) To komplekse røtter r_1 og $\bar{r}_1$, $r_1 \neq \bar{r}_1$. La oss kalle røttene vi får i dette tilfellet for $a + id$ og $a - id$ (for eksempel likningen $r^2 + 2r + 3 = 0$ gir røttene $-1 + i\sqrt{2}$ og $-1 - i\sqrt{2}$, dvs. $a = -1$ og $d = \sqrt{2}$). Løsningene av difflikningen viser seg nå å være gitt ved formelen

$$y(x) = e^{ax} (C \cos(dx) + D \sin(dx)), \quad C, D \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Oppsummering hjelpeligningene i metoden med separasjon av variable

IMAT2150:

Oppsummering hjelpeligningene i metoden med separasjon av variable

Vi har (1) $G'(t) = kG(t)$ og (2) $F''(x) = kF(x)$.

Løsning av (1): $G(t) = C e^{kt}$.

(2) har karakteristisk ligning $r^2 = k$ ($b = 0$ og $c = -k$, se skjema).

IMAT2150:

Oppsummering hjelpeligningene i metoden med separasjon av variable

Vi har (1) $G'(t) = kG(t)$ og (2) $F''(x) = kF(x)$.

Løsning av (1): $G(t) = C e^{kt}$.

(2) har karakteristisk ligning $r^2 = k$ ($b = 0$ og $c = -k$, se skjema).

For $k > 0$ er $r_{1,2} = \pm\sqrt{k}$ med løsning $F(x) = A e^{\sqrt{k}x} + B e^{-\sqrt{k}x}$.

For $k = 0$ er $r_1 = r_2 = 0$ (dobbelrot) med løsning $F(x) = A + Bx$.

IMAT2150:

Oppsummering hjelpeligningene i metoden med separasjon av variable

Vi har (1) $G'(t) = kG(t)$ og (2) $F''(x) = kF(x)$.

Løsning av (1): $G(t) = C e^{kt}$.

(2) har karakteristisk ligning $r^2 = k$ ($b = 0$ og $c = -k$, se skjema).

For $k > 0$ er $r_{1,2} = \pm\sqrt{k}$ med løsning $F(x) = A e^{\sqrt{k}x} + B e^{-\sqrt{k}x}$.

For $k = 0$ er $r_1 = r_2 = 0$ (dobbelrot) med løsning $F(x) = A + Bx$.

For $k < 0$ er $r^2 = k = -\omega^2$ ($\omega > 0$), dvs. $r_{1,2} = \pm\sqrt{k} = \pm\omega i$.
($r_{1,2} = a \pm di$; altså $a = 0$ og $d = \omega$ i skjema.)

Her er da derfor $F(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ ($\pm\sqrt{k} = \pm\omega i$).

$k > 0$ tilfelle

Uinteressant tilfelle (kun trivielle løsninger)

$k > 0$ tilfelle

Uinteressant tilfelle (kun trivielle løsninger)

For positive verdier av k får vi

$$F(x) = A e^{\sqrt{k}x} + B e^{-\sqrt{k}x}.$$

- Randbetingelser $T(0, t) = 0$ og $T(1, t) = 0$ gir $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$.
- Enten $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller $F(0) = F(1) = 0$.
- Tilfellet $G(t) = 0$ (konstant lik 0) er uinteressant.
- Enden på "visen" er at $A = B = 0$.

$k > 0$ tilfelle

Uinteressant tilfelle (kun trivielle løsninger)

For positive verdier av k får vi

$$F(x) = A e^{\sqrt{k}x} + B e^{-\sqrt{k}x}.$$

- Randbetingelser $T(0, t) = 0$ og $T(1, t) = 0$ gir $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$.
- Enten $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller $F(0) = F(1) = 0$.
- Tilfellet $G(t) = 0$ (konstant lik 0) er uinteressant.
- Enden på "visen" er at $A = B = 0$.

$F(0) = F(1) = 0$ er ekvivalent med $A + B = 0$ og $A e^{\sqrt{k}} + B e^{-\sqrt{k}} = 0$, og vi får $(e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}}) A = 0$. Da den første faktoren er 0 hvis $k = 0$,¹ må den andre faktoren være 0. Men, da må $A = B = 0$, som påstått.

¹Hvis $e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}} = 0$, så er $e^{2\sqrt{k}} = 1$, og derfor $k = 0$.

$k = 0$ tilfelle

Uinteressant tilfelle (kun trivielle løsninger)

$k = 0$ tilfelle

Uinteressant tilfelle (kun trivielle løsninger)

For $k = 0$ får vi $F(x) = Ax + B$

- Randbetingelser $T(0, t) = 0$ og $T(1, t) = 0$ gir $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$.
- Enten $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller $F(0) = F(1) = 0$.
- Tilfellet $G(t) = 0$ (konstant lik 0) er uinteressant.
- Enden på "visen" er at $A = B = 0$.

$k < 0$ tilfelle

Uendelig mange løsninger:

$$e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$k < 0$ tilfelle

Uendelig mange løsninger:

$$e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

For negative verdier $k = -\omega^2$ får vi løsninger

$$F(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

$$\text{og } G(t) = Ce^{-\omega^2 t}.$$

- Randbetingelser $T(0, t) = 0$ og $T(1, t) = 0$ gir $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$.
- Enten $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller $F(0) = F(1) = 0$.
- Tilfellet $G(t) = 0$ (konstant lik 0) er uinteressant.
- Da er $F(0) = A = 0$ og
- $F(1) = B \sin \omega = 0$. Det betyr at $\omega = n\pi$ der n er et heltall.
- Uendelig mange løsninger.

$$e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Superposisjonsprinsippet kommer til nå anvendelse!
(Merk uendelig summering.)

Superposisjonsprinsippet: (generell løsning)

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Initialbetingelse

$$T(x, 0) = \sin^2 \pi x$$

Fra generell løsning

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x.$$

- Skriver om $\sin^2 \pi x = 1 - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x$.
- Finner B_n -ene i sinus-rekken.
- Da er løsningen lik

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)((2n-1)^2 - 4)\pi}.$$

- Skriver om $\sin^2 \pi x = 1 - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x$.
- Finner B_n -ene i sinus-rekken.
- Da er løsningen lik

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)((2n-1)^2 - 4)\pi}.$$

B_n er koeffisientene i sinus-rekken til $\sin^2 \pi x$.

- Skriver om $\sin^2 \pi x = 1 - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x$.
- Finner B_n -ene i sinus-rekken.
- Da er løsningen lik

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)((2n-1)^2 - 4)\pi}.$$

B_n er koeffisientene i sinus-rekken til $\sin^2 \pi x$.

Detaljert utledning av formelen for $T(x, t)$ følger på neste lysark.
(Formelen trenger ikke huskes til eksamen!)

IMAT2150:

Varmeligningen - separasjon av variable (**behandling av randkravet**)

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 \sin n\pi x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\sin n\pi x - \frac{1}{2} \sin(n-2)\pi x - \frac{1}{2} \sin(n+2)\pi x \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{1}{2(n-2)\pi} \cos(n-2)\pi x + \frac{1}{2(n+2)\pi} \cos(n+2)\pi x \right]_0^1 \\ &= \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{1}{2(n-2)\pi} \cos(n-2)\pi x + \frac{1}{2(n+2)\pi} \cos(n+2)\pi x \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2(n-2)\pi} + \frac{1}{2(n+2)\pi} \right) ((-1)^n - 1) = \frac{4}{n(n^2 - 4)\pi} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

for $n \neq 2$.

Merk at nevneren er 0 når $n = 2$.

Dersom f er *jamn*, blir Fourier-koeffisientene:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Vi sier at vi får ei *Fourier-cosinus-rekke*.

Dersom f er *odde*, blir Fourier-koeffisientene:

$$a_n = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} t\right) dt \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Vi sier at vi får ei *Fourier-sinus-rekke*.

Ved bruk av et programsystem for symbolsk matematikk som Mathematica® er integralene ovenfor trivielle:¹

¹Merk unntakstilfellet $n = 2$ (pga. divisjon med 0 i formelen). Nevneren i uttrykket er jo lik $n \times (n - 2) \times (n + 2)\pi$.

IMAT2150:

The power of Mathematica

Ved bruk av et programsystem for symbolsk matematikk som Mathematica® er integralene ovenfor trivielle:¹

```
2Integrate[Sin[n Pi x] Sin[Pi x]^2,{x,0,1}]  
  
4 (-1 + Cos[n Pi])  
-----  
          3  
(-4 n + n ) Pi  
  
n=2;2Integrate[Sin[n Pi x] Sin[Pi x]^2,{x,0,1}]  
  
0
```

¹Merk unntakstilfellet $n = 2$ (pga. divisjon med 0 i formelen). Nevneren i uttrykket er jo lik $n \times (n - 2) \times (n + 2)\pi$.

Ved bruk av et programsystem for symbolsk matematikk som Mathematica® er integralene ovenfor trivielle:¹

```
2Integrate[Sin[n Pi x] Sin[Pi x]^2,{x,0,1}]  
  
4 (-1 + Cos[n Pi])  
-----  
          3  
(-4 n + n ) Pi  
  
n=2;2Integrate[Sin[n Pi x] Sin[Pi x]^2,{x,0,1}]  
  
0
```

Merk også at $\cos \pi n = (-1)^n$.

¹Merk unntakstilfellet $n = 2$ (pga. divisjon med 0 i formelen). Nevneren i uttrykket er jo lik $n \times (n - 2) \times (n + 2)\pi$.

IMAT2150:

Varmeligningen - separasjon av variable (**behandling av randkravet**)

Varmeligningen - separasjon av variable (behandling av randkravet)

$$B_2 = \frac{2}{1} \int_0^1 \sin 2\pi x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x \right) dx = \int_0^1 \left(\sin 2\pi x - \frac{1}{2} \sin 0\pi x - \frac{1}{2} \sin 4\pi x \right) dx = 0.$$

Vi har dermed

$$\sin^2 \pi x \sim -\frac{8}{-3\pi} \sin \pi x - \frac{8}{15\pi} \sin 3\pi x - \dots - \frac{8}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi} \sin(2n-1)\pi x - \dots^3$$

og løsningen av initialverdiproblemet er

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x. \quad (11.6)$$

$$B_2 = \frac{2}{1} \int_0^1 \sin 2\pi x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x \right) dx = \int_0^1 \left(\sin 2\pi x - \frac{1}{2} \sin 0\pi x - \frac{1}{2} \sin 4\pi x \right) dx = 0.$$

Vi har dermed

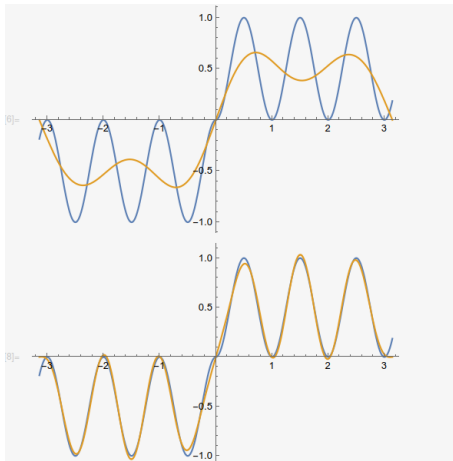
$$\sin^2 \pi x \sim -\frac{8}{-3\pi} \sin \pi x - \frac{8}{15\pi} \sin 3\pi x - \dots - \frac{8}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi} \sin(2n-1)\pi x - \dots^3$$

og løsningen av initialverdiproblemet er

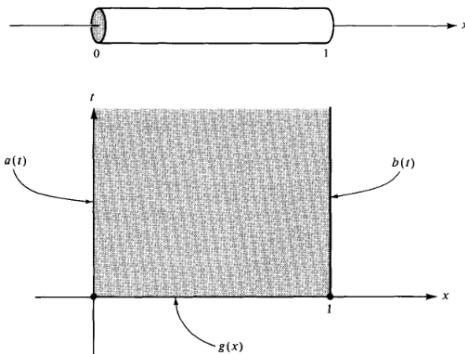
$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x. \quad (11.6)$$

³En konsekvens av formelen er at $\pi = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{(2n-1)((2n-1)^2-4)}$.

Summen av henholdsvis 4 og 8 ledd i fourierrekkja (konvergens av rekka indikert):



$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & (t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1) \\ u(x, 0) = g(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ u(0, t) = a(t) & (t \geq 0) \\ u(1, t) = b(t) & (t \geq 0) \end{cases}$$



IMAT2150:

Varmeligningen- sjekk av løsningen med derivasjon av den tilhørende fourierrekk

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn^2\pi^2}{L^2} B_n e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{L^2} B_n e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Dvs. $u_t = k u_{xx}$, som det skal være (pr. konstruksjon).¹

¹For et randkrav som gjør at fourierrekk kan deriveres leddvis.

Vi har nå behandlet varmeligningen $u_t = u_{xx}$, men hva med varianter som for eksempel $u_t = 2u_{xx}$ og $u_t = 4u_{xx} - 3u$?

$$u_t = 2u_{xx}$$

$$\begin{aligned}
 & u_t = 2u_{xx} \\
 & t > 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\
 & u(t, x) = G(t) F(x) \\
 & \hookrightarrow F''(x) = k \cdot F(x) \\
 & \quad G'(t) = \boxed{2k} \cdot G(t) \\
 & (*) \text{ Vi skal ha } u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0 \\
 & \quad \text{(Neumann)} \\
 & \xrightarrow{\quad} \text{Isoleret keramisk materiale,} \\
 & \quad \text{og/eller endene er isolerte (*).}
 \end{aligned}$$


$$u_t = 2u_{xx}$$

$$(*) \text{ gir } f'(0) = f'(1) = 0 \\ (A_n C'(L) \neq 0)$$

$k > 0$: Triviell lrsn.

$$k = 0: f(x) = B \quad (\text{Visseliv!})$$

$$k < 0: f(x) = A \cos wx + B \sin wx$$

$$f'(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow \sin w = 0 \\ w = n\pi \quad n \geq 1$$

$$f(x) = A_n \cos n\pi x, \quad n \geq 0$$

$$u_t = 2u_{xx}$$

$$\begin{aligned}
 G'(t) &= 2k G(t) \\
 \hookrightarrow u_n(t, x) &= c_n e^{-2n^2 \pi^2 t} \cos n \pi x \\
 \textcircled{SPP}: u_n(t, x) &= a_0 + \sum_1^{\infty} a_n e^{-2n^2 \pi^2 t} \cos n \pi x \\
 u(0, x) &= 13 + 3 \sin^2 \pi x \\
 \text{Kommer FR her.} \\
 \text{Entydighet m FR gir} \\
 S^2 \\
 u(t, x) &= \frac{29}{2} - \frac{3}{2} e^{-8\pi^2 t} \cos 2\pi x
 \end{aligned}$$

$$u_t = 2u_{xx}$$

$$\begin{aligned}
 G'(t) &= 2u_x(t) \\
 \hookrightarrow u_n(t, x) &= c_n e^{-2n^2 \pi^2 t} \cos n \pi x \\
 \text{(SPP): } u_n(t, x) &= a_0 + \sum_1^{\infty} a_n e^{-2n^2 \pi^2 t} \cos n \pi x \\
 u(0, x) &= 13 + 3 \sin^2 \pi x \\
 \text{Kjerner FR her.} \\
 \text{Entydighet m FR gir} \\
 S_L^2 \\
 u(t, x) &= \frac{29}{2} - \frac{3}{2} e^{-8\pi^2 t} \cos 2\pi x
 \end{aligned}$$

Merk at FR her er cosinusrekke til $u(0, x)$, som vi tidligere har sett er $29/2 - 3/2 \cos 2\pi x$.¹

¹Vi brukte formelen $\sin^2 \pi x = (1 - \cos 2\pi x)/2$ til å omskrive uttrykket for $f(x) = 13 + 3 \sin^2 \pi x$.

$$u_t = 4u_{xx} - 3u$$

$$u_t = 4u_{xx} - 3u$$

$$u(t, 0) = u(t, b) = 0$$

$$u(t, x) = G(t) \cdot F(x)$$

$$G'(t)/G(t) = \underbrace{4F''(x)/F(x)}_k - 3$$

$$F''(x) = kF(x)$$

$$F(0) = F(b) = 0$$

Merk at differentialligningen gir $G'(t)F(x) = 4G(t)F''(x) - 3G(t)F(x)$, som etter deling med $G(t)F(x)$ gir $G'(t)/G(t) = 4F''(x)/F(x) - 3$. Men, $F''(x)/F(x)$ er en konstant, si k , og vi får at $G'(t)/G(t) = 4k - 3$.

$$u_t = 4u_{xx} - 3u$$

$$G'(t) = (4k-3)G(t) \quad k=0; \text{ trivial løsning}$$

$$\boxed{G^*(t) = Ce^{-w^2 t}}$$

$$k > 0; \quad -// \quad k = -w^2 < 0 \quad (w > 0)$$

$$f(x) = A \cos wx + B \sin wx$$

$$bw = n\pi, \quad n = 1(1)\dots$$

$$f(x) = B \sin \frac{n\pi x}{b}, \quad n = 1(1)\dots$$

$$G'(t) = (4k-3) = -\frac{\pi^2 n^2}{9} - 3$$

$$G(t) = e^{(-\pi^2 n^2/9 - 3)t}$$

$$u_n(t, x) = B e^{(-\pi^2 n^2/9 - 3)t} \sin \frac{\pi n x}{6}, \quad n = 1(1)\dots$$

(SPP)

$$\begin{aligned}
 & \text{BC} \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0 \end{cases} \\
 & \text{IC} \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L \end{cases} \\
 & u(x,t) = f(x)G(t)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 f'' &= -k f = 0 \\
 \ddot{G} - \omega^2 G &= 0 \\
 k &= \omega^2
 \end{aligned}
 } \quad \begin{array}{l} \text{Hjelp lign.} \\ \text{ODE} \end{array}$$

$$f(0) = 0, \quad f(L) = 0 \quad (\text{fra BC})$$

Kun $k < 0$ er av interesse
(smått)

$$\begin{aligned} \text{BC} \quad & \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0 \end{cases} \\ \text{IC} \quad & \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L \end{cases} \end{aligned}$$

$$u(x,t) = f(x)G(t)$$

$f'' = -k f = 0$	Hjelp lign. ODE
$\ddot{G} - c^2 k G = 0$	
$k = \frac{\omega^2}{c^2}$	

$$f(0) = 0, \quad f(L) = 0 \quad (\text{fra BC})$$

Kun $k < 0$ er av interesse
(smått)

$$\underline{k = -w^2 / w > 0}$$

$$f(x) = A \cos wx + B \sin wx$$

$$wL = n\pi \quad / \quad n \geq 1 \quad (BC \rightarrow$$

$A = 0,$
 $\text{så } B \neq 0;$
 $\text{så } B = 1)$

$$f(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\ddot{G} + c^2 n^2 \pi^2 / L^2 G = 0$$

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t$$

$$\lambda_n = cn\pi/L$$

$$(*) \quad u_n(x, t) = \left(B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) \text{ FR sinus av} \\ f(x) \\ b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ u_t(x, 0) \text{ derivert FR (x)} \\ \text{leddvis og } f'' \\ \sum b_n^2 \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x) \end{array} \right.$$

$$b_n^* \lambda_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$B_n^* = \frac{2}{(n\pi)} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Spesiell tilfelle $g(x) = 0$
 initial velocity of string
 $\rightarrow B_n^* = 0$

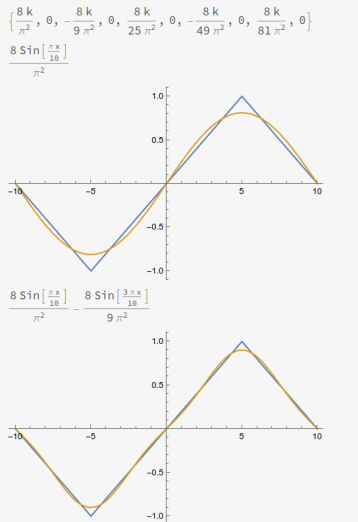
Løsn. (a) blir da

$$\left[\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \lambda_n &= \frac{n\pi}{L} \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L} x & 0 < x < L/2 \\ \frac{2k}{L} (L-x) & L/2 < x < L \end{cases} \\ g(x) = 0 \\ \rightarrow B_n = \end{array} \right.$$

$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi c}{L} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3\pi c}{L} t + \dots \right]$$

```
bn[n_]:=2/L (Integrate[2k/L x Sin[n Pi x/L],{x,0,L/2}]+Integrate[2k/L (L-x) x
Sin[n Pi x/L],{x,L/2,L}]);
bn@Range[10]
f[x_]:=Module[{ },L=10;k=1;If[x<L/2,Return[2k/L x],Return[2k/L (L-x)]];
g[x_]:=If[x>0,Return[f[x]],Return[-f[-x]]];
L=10;k=1;
FR[m_]:=Sum[bn[n] Sin[n Pi x/L],{n,1,m}];
FR[1]
Plot[{g[x],%},{x,-L,L}]
FR[3]
Plot[{g[x],%},{x,-L,L}]
```



Orienteringsstoff.

IKKE PENSUM!

Løsning av en 3D Laplace-ligning for en terning:

<https://www.youtube.com/watch?v=xmGYZBbfEe8>

<https://www.youtube.com/watch?v=LNErOuQxmIY>