Forelesning X

IMAT2150: Høsten 2023

Kent Holing, NTNU (20. september 2023)

LÆRINGSMÅL for dagens forelesning

Bezier kurver (S: 3.5)

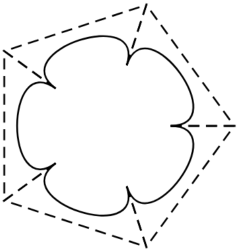
- Kjenne til Bezier-kurver og deres anvendelser
- Kunne algoritme for Bezier-kurver

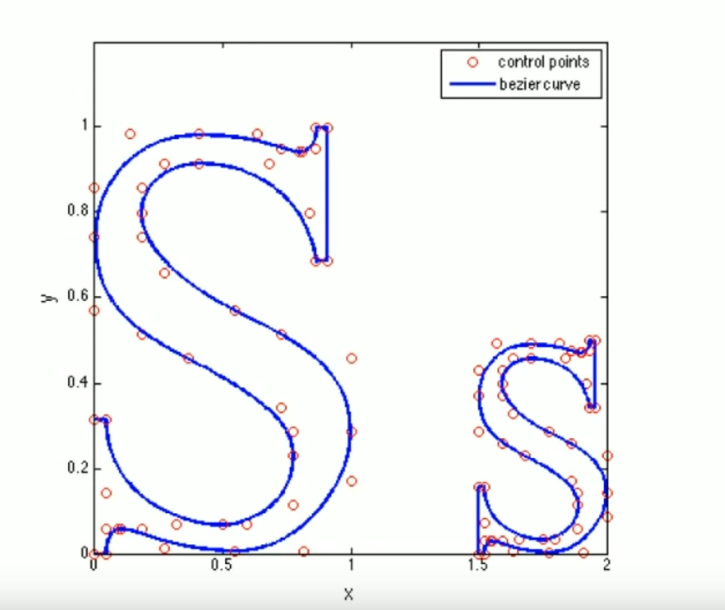
Anvendelser

- Postscript fonter — i PDF- og PS-filer
- 2D — Grafikk
- 3D — versjon for kurver i rommet.
- n-D — versjon for bevegelser av robot-armer med n frihetsgrader.

Når det gjelder fonter, tenk på Latex!

En blomst. (Her kunne vi lett ha lagt på farger og andre visuelle effekter.)

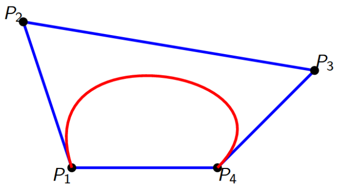



control points
bezier curve
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
y
0
0.5
1
1.5
2
x

Kontrollpunkter

En Bezier-kurve kan beskrives ved hjelp av et startpunkt, et endepunkt og to kontrollpunkter. Ideen er vi starter i P_1, stopper i P_4 og lar de to andre punkene styre.

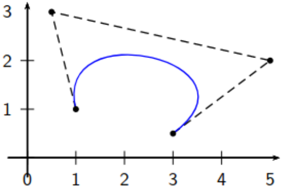
- Kurven skal altid være inne i boksen.
- Den skal tangere kantene i start- og sluttpunktene.



Kurven er en tredjegradskurve, såkalt kubisk Bezier-kurve, som er en parametiserbar plan kurve.

Eksempel

Linjene mellom punktene virker som styrelinjer.

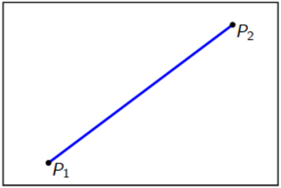


Figur: Bezierkurve

Rette linjer mellom par av punkter

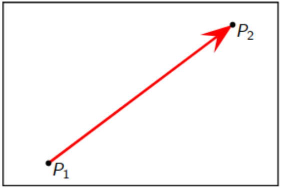
Vi har følgende formel for et rett linjestykke mellom to punkter P_1 og P_2

$$L(t) = (1-t)\,P_1 + t\,P_2.$$



Den deriverte av $P(t)$ er

$$L'(t) = -P_1 + P_2 = \overrightarrow{P_1P_2}.$$



Bezier kurve

Vi har følgende formel for en kurve mellom to punkter P_1 og P_4 som er "styrt" av punktene P_2 og P_3

$$P(t) = (1-t)^3\, P_1 + 3\, t\, (1-t)^2\, P_2 + 3\, t^2 (1-t)\, P_3 + t^3\, P_4.$$

Egenskaper

- $P(0) = P_1$
- $P(1) = P_4$
- $P'(0) = 3(P_2 - P_1)$
- $P'(1) = 3(P_4 - P_3)$

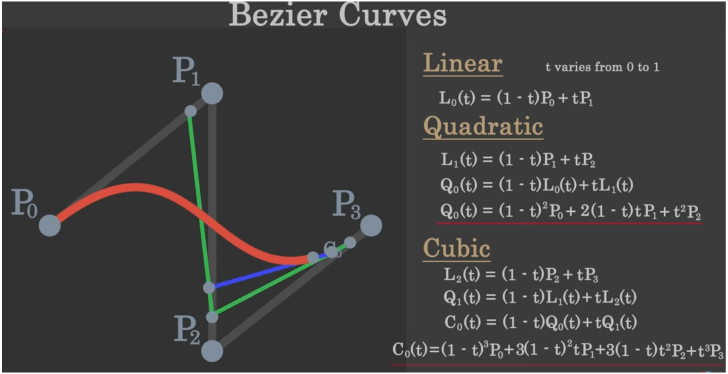
Merk at formlene for $P'(0)$ og $P'(1)$ gir oss en måte å beregne kontrollpunktene P_2 og P_3 på når vi kjenner P_1 og P_4.

Huskeregel for parametiseringsformelen ovenfor:
$\boldsymbol{(1-t+t)^3 = (1-t)^3 + 3t\,(1-t)^2 + 3t^2\,(1-t) + t^3}$, som gir koeffisientene i formelen.[1]

[1] For lineær Bezierkurver får vi koeffisientene av $(1-t+t)^1$ og for kvadratiske Bezierkurver får vi koeffisientene av å ekspandere $(1-t+t)^2$.

Matriseform for parametrisering av den kubiske Besier-kurven

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$



(Her er P_0, P_1, P_2 og P_3 brukt i stedet for P_1, P_2, P_3 og P_4 på forrige lysark.)

Denne tre-minutters videosnutten er så god at jeg viser den!

Bezier-kurver

Standardform

Gitt kontrollpunkter $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ og $P_4(x_4, y_4)$. Gitt

$$
\begin{aligned}
a_x &= x_1 & \qquad a_y &= y_1 \\
b_x &= 3(x_2 - x_1) & \qquad b_y &= 3(y_2 - y_1) \\
c_x &= 3(x_3 - 2x_2 + x_1) & \qquad c_y &= 3(y_3 - 2y_2 + y_1) \\
d_x &= x_4 - 3x_3 + 3x_2 - x_1 & \qquad d_y &= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1
\end{aligned}
$$

Da er

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_x + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3 \\
y(t) &= a_y + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3
\end{aligned}
$$

Prove that the Bézier spline with $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ and $(x_3, y_3) = (x_4, y_4)$ is a line segment.

The Bézier formulas show that the equations are

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + 3(x_4 - x_1)t^2 - 2(x_4 - x_1)t^3 = x_1 + (x_4 - x_1)t^2(3 - 2t) \\ y(t) &= y_1 + 3(y_4 - y_1)t^2 - 2(y_4 - y_1)t^3 = y_1 + (y_4 - y_1)t^2(3 - 2t) \end{aligned}$$

for $0 \le t \le 1$. Every point in the spline has the form

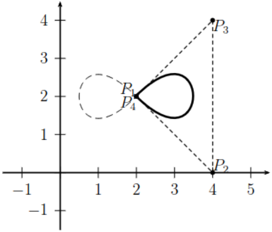
$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= (x_1 + r(x_4 - x_1), y_1 + r(y_4 - y_1)) \\ &= ((1 - r)x_1 + rx_4, (1 - r)y_1 + ry_4), \end{aligned}$$

where $r = t^2(3 - 2t)$. Since $0 \le r \le 1$, each point lies on the line segment connecting (x_1, y_1) and (x_4, y_4). ◀

Oppgave 6 (10%)
Figur 1 viser to bezierkurver som til sammen fremstiller et ∞-tegn.

a) Bezierkurven til høyre i figur 1 er bestemt av punktene $P_1(2,2)$, $P_2(4,0)$, $P_3(4,4)$ og $P_4(2,2)$. Bestem parametriseringen $(x(t), y(t))$ til kurven.

b) Angi kontrollpunktene for den stiplede tynne bezierkurven.



$\boxed{6}$ **a)** Vi bruker formelen gitt på forelesning i stedet for den i boka.

$$B(t) = (1-t)^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ekspansjon gir

$$B(t) = \begin{bmatrix} 2 + 6t - 6t^2 \\ 2 - 6t + 18t^2 - 12t^3 \end{bmatrix}$$

b) Speilingen av kurven er gitt ved å speile x-vediene om linjen verdien 2. Det fås ved å translatere 2 til 0, skifte fortegn for så å translatere fra 0 til 2

$$x \mapsto x - 2 \mapsto -(x-2) \mapsto -(x-2) + 2 = 4 - x.$$

Formel for speilet $B(t)$ er

$$C(t) = \begin{bmatrix} 4-(2+6t-6t^2) \\ 2-6t+18t^2-12t^3 \end{bmatrix}$$

Vi deriverer for å finne kontrollpunktene

$$C'(t) = \begin{bmatrix} -6+12t \\ -6+36t-36t^2 \end{bmatrix}$$

Første kontrollpunkt er

$$C(0) + \frac{1}{3}C'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Andre kontrollpunkt er

$$C(1) - \frac{1}{3}C'(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Det gis også poeng for å si noe som for eksempel. Kontrollpunktene er også speilet om den vertikale linjen $x = 2$ slik som kurven. Det gir kontroll punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

b) Finn et uttrykk for Bezierkurven som har startpunkt i $(1,1)$, første kontrollpunkt i $(2,4)$, andre kontrollpunkt i $(4,2)$ og endepunkt i $(5,5)$.

Løsning: For å finne et uttrykk for Bezierkurven gitt punkter, bruker man formelen for Bezierkurver fra formelarket:

$$P(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4.$$

Setter man inn punktene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(1-t)^3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} 3\cdot t(1-t)^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} 3\cdot t^2(1-t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} t^3$$

$$= \begin{bmatrix} 1-3t+3t^2-t^3 \\ 1-3t+3t^2-t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot 3\cdot(t-2t^2+t^3) \\ 4\cdot 3\cdot(t-2t^2+t^3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\cdot 3\cdot(t^2-t^3) \\ 2\cdot 3\cdot(t^2-t^3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\cdot t^3 \\ 5\cdot t^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3t+3t^2-2t^3 \\ 1+9t+-15t^2+10t^3 \end{bmatrix}$$