



Løsninger av tidligere eksamensett

IMAx2150: Høsten 2023

Kent Holing, NTNU (15. november 2023)

Løsning er også tilgjengelig på fagets hjemmeside.

Eksamen august 2022

1 (2 poeng) Gitt at en følge oppfyller differenslikningen under, finn et eksplisitt uttrykk for følgen

$$r_k = 2r_{k-1} - r_{k-2}, \quad \forall k \geq 2$$

$$r_0 = 1$$

$$r_1 = 4$$

Løsning: Karakteristisk ligning:

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

Gir en dobbel rot:

$$t = \frac{2 + \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$t = 1$$

Differenslikningen har da generell løsning:

$$r_k = C \cdot 1^k + Dk \cdot 1^k$$

Merk dobbelroten!

Vi skriver dette som $r_k = Dk + C$.

Fra forrige lysark har vi: $r_k = Dk + C$.

Løsningen vår må stemme med initialverdiene, $r_0 = 1$ og $r_1 = 4$

$$r_0 = 1 = C \cdot 1^0 + D \cdot 0 \cdot 1^0$$

$$\implies C = 1$$

$$r_1 = 4 = 1 \cdot 1^1 + D \cdot 1 \cdot 1^1$$

$$\implies D = 3$$

Hvilket gir følgende løsning til differenslikningen:

$$r_k = 1^k + 3k \cdot 1^k$$

Vi skriver dette som $r_k = 3k + 1$.

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finn en øvre triangulær matrise U og en nedre triangulær matrise L på formen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix},$$

slik at $A = LU$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \begin{array}{l} \boxed{+} \\ \leftarrow \end{array} \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} 1/2 \\ + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -1/4 \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1/2 & 3 & 2 \\ 1/4 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \begin{array}{l} \boxed{+} \\ \leftarrow \end{array} \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} 1/2 \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1/2 & 3 & 2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

L , og U blir da:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b) Løs systemet

$$\begin{array}{rrcrcl} 4x & + & 2y & - & 2z & = & 8 \\ -2x & + & 2y & + & 3z & = & 12 \\ x & - & y & - & z & = & -5 \end{array}$$

ved hjelp av LU -transformasjonen til matrisen i punkt a).

Løsning: Systemet kan beskrives som $Ax = b$, hvor A er som i a) og:

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Fordi vi har LU -faktoriseringen av A , kan vi løse systemet ved først å løse $Lc = b$ og deretter $Ux = c$.

$$Ax = (LU)x = L(Ux) = b.$$

$$Lc = b$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 16 \\ -5 - \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 1 \end{bmatrix}$$

Deretter:

$$Ux = c$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi løser da likningssystemet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_3 &= 1 \implies x_3 = 2 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 16 \implies x_2 = \frac{16 - 4}{3} = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 8 \implies x_1 = \frac{8 - 8 + 4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Løsning:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- c) Vis at matrisen $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$ er en symmetrisk positiv definitt matrise. Finn en øvre triangulær matrise R slik at $R^T R = B$.

Løsning: Matrisen er symmetrisk fordi $A^T = A$, rad 1 er lik kolonne 1, og rad 2 er lik kolonne 2. Matrisen A er positiv definitt dersom $v^T A v \geq 0$ for alle $v \in \mathbb{R}^2$ og 0 kun for $v = 0$. Vi velger en tilfeldig vektor $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ og sjekker:

$$v^T A v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4x + 6y \\ 6x + 11y \end{bmatrix} \\ &= 4x^2 + 6xy + 6xy + 11y^2 \\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

Første kvadratsetning $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lar os skrive om siste likhet:

$$\begin{aligned} v^T A v &= (2x + 3y)^2 + 2y^2 \\ \implies v^T A v &\geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Matrisen er altså positiv definit (summen av to kvadrerte reelle tall vil alltid være større enn eller lik 0)

Siden A er symmetrisk positiv definit, vil det være mulig å finne en cholesky-faktorisering av matrisen. Fra formelsamlingen:

$$L^T = R = \begin{bmatrix} L_{00} & L_{10} \\ 0 & L_{11} \end{bmatrix}$$
$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_{00})^2 & L_{00}L_{10} \\ L_{00}L_{10} & (L_{10})^2 + (L_{11})^2 \end{bmatrix}$$

Det gir:

$$(L_{00})^2 = 4 \implies L_{00} = 2$$

$$L_{00}L_{10} = 2L_{10} = 6 \implies L_{10} = 3$$

$$(L_{10})^2 + (L_{11})^2 = 3^2 + (L_{11})^2 = 11 \implies L_{11} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$$

Altså:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

d) Vis at matrisen $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ikke er positiv definit.

Løsning: Matrisen C er positiv definit dersom $v^T C v \geq 0$ for alle $v \in \mathbb{R}^2$ og 0 kun for $v = 0$.

Vi velger en tilfeldig vektor $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ og sjekker:

$$\begin{aligned} v^T C v &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} \\ &= 2x^2 + 3xy + 3xy + 4y^2 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 + x^2 + 2xy \end{aligned}$$

Første kvadratsetning $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lar os skrive om siste likhet:

$$v^T C v = (x + 2y)^2 + x^2 + 2xy$$

Her ar vi ikke kun ledd av andre grad, slik at $v^T C v$ kan være negativ. Setter vi inn feks $x = 1, y = -1$ får vi $v^T C v$ lik 0. Altså enn annen vektor enn $v = \vec{0}$, det er nok til å si at C ikke er positiv definit. Setter vi inn $x = 1, y = -3/4$ får vi $v^T C v = -1/4$

3 (2 poeng)

Anta at vi har gjort følgende målinger av konsentrasjonen y av en medisin i blodet til en pasient t timer etter inntak.

t	y
1	3
2	4
3	5
4	5

Tilpass en modell $y = c_1 t e^{c_2 t}$, til dataene vha. minste kvadraters metode, og gi RMSE til tilpasningen.

Løsning: For å tilpasse modellen $y = c_1 t e^{c_2 t}$ må vi få det over på form $b = k_1 + k_2 t$ for å bruke minste kvadraters metode.

$$y = c_1 t e^{c_2 t}$$

$$\ln(y) = \ln(c_1 t e^{c_2 t})$$

$$\ln(y) = \ln(c_1) + \ln(t) + c_2 t$$

$$\ln(y) - \ln(t) = \ln(c_1) + c_2 t$$

$$b = k_1 + k_2 t$$

Betingelsene $k_1 \times 1 + k_2 t_i = y_i$ for $t = t_i$ ($i = 1(1)n$) gir A for normalsystemet $A^T A \cdot (k_1, k_2)^T = A^T (y_1, y_2, \dots, y_n)^T = A^T b$ med A og b definert som nedenfor.

der $b = \ln(y) - \ln(t)$, $k_1 = \ln(c_1)$, og $k_2 = c_2$.

Når systemet er på denne formen kan man bruke normalsystemet fra formelsamlingen $A^T A x = A^T b$, der A er en matrise satt opp av koeffisientene som er ganget med de ukjente vi er ute etter, k_1 og k_2 .

Da blir A -matrisen og b -vektoren som følger:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \ln(y_1) - \ln(t_1) \\ \ln(y_2) - \ln(t_2) \\ \ln(y_3) - \ln(t_3) \\ \ln(y_4) - \ln(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(3) - \ln(1) \\ \ln(4) - \ln(2) \\ \ln(5) - \ln(3) \\ \ln(5) - \ln(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(3) \\ \ln(2) \\ \ln(\frac{5}{3}) \\ \ln(\frac{5}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.10 \\ 0.69 \\ 0.51 \\ 0.22 \end{bmatrix}$$

Og normalsystemet vil være et likningssystem med:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$
$$A^T b = \begin{bmatrix} 2.53 \\ 4.91 \end{bmatrix}$$

altså

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.53 \\ 4.91 \end{bmatrix}$$

som gir at $k_1 = 1.33$ og $k_2 = -0.28$. Siden $k_1 = \ln(c_1)$ og $k_2 = c_2$ og det er c_1 og c_2 vi egentlig er ute etter vil $c_1 = e^{1.33}$ og $c_2 = -0.28$. Innsatt i modellen blir det

$$y = e^{1.33t} e^{-0.28t} = t e^{1.33-0.28t}$$

eventuelt

$$y = 3.8t e^{-0.28t}$$

For å finne RMSE, må man regne ut residualene først, der formelene for RMSE og residualene er som følger:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2}{m}}$$

$$r = b - A\bar{x}$$

her er b lik y -verdiene gitt i oppgaveteksten $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$, og

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 3.8 \cdot 1 \cdot e^{-0.28 \cdot 1} \\ 3.8 \cdot 2 \cdot e^{-0.28 \cdot 2} \\ 3.8 \cdot 3 \cdot e^{-0.28 \cdot 3} \\ 3.8 \cdot 4 \cdot e^{-0.28 \cdot 4} \end{bmatrix}$$

$$r = b - A\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 - 2.87 \\ 4 - 4.34 \\ 5 - 4.92 \\ 5 - 4.96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.13 \\ -0.34 \\ 0.08 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

Merk skrivefeil: $r = b - A\bar{x}$, ikke $b A\bar{x}$!

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{(0.13)^2 + (-0.34)^2 + (0.08)^2 + (0.04)^2}{4}} = 0.187$$

4 (3 poeng) La en Bezier kurve være gitt ved formelene

$$\begin{aligned}x(t) &= 8t^3 - 2t + 1 \\y(t) &= t^3 + 4t^2 + 2t\end{aligned}$$

a) Finn første og andre endepunkt til Bezier-kurven.

Løsning: For å finne første og andre endepunkt til Bezier-kurven setter man inn $t = 0$ og $t = 1$ i formelene for kurven. For $t = 0$ blir

$$x(0) = 8 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$y(0) = 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0,$$

så første endepunkt blir i $(1, 0)$ Det andre endepunktet blir for $t = 1$:

$$x(1) = 8 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 7$$

$$y(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 7,$$

så andre endepunkt blir i $(7, 7)$.

b) Finn de to kontrollpunktene til Bezier-kurven.

Løsning: Fra formelsamlingen har man at $P'(0) = 3(P_2 - P_1)$ og $P'(1) = 3(P_4 - P_3)$, dette kan brukes til å finne kontrollpunktene P_2 og P_3 . Formelen for å finne P_2 blir $P_1 + \frac{P'(0)}{3}$, og P_3 blir $P_4 - \frac{P'(1)}{3}$. Endepunktene har vi funnet, så det som mangler er den deriverte i 0 og 1, som vi kan finne ved å derivere formlene for kurven, og sette inn 0 og 1.

$$x'(t) = 24t^2 - 2 \implies x'(0) = -2, x'(1) = 22,$$

$$y'(t) = 3t^2 + 8t + 2 \implies y'(0) = 2, y'(1) = 13$$

. Innsatt i formelene for P_2 og P_3 får vi:

$$P_2 = P_1 + \frac{P'(0)}{3} = (1, 0) + \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

og

$$P_3 = P_4 - \frac{P'(1)}{3} = (7, 7) - \left(\frac{22}{3}, \frac{13}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Standard Bezieroppgave (relativt enkel, ren formelbruk som finnes i formelarket)

- c) Finn formelene som definerer den Bezier-kurven som danner den halvdelen som starter i $(x(0), y(0))$ og ender i $(x(1/2), y(1/2))$.

Løsning: Skal finne den Bezierkurven som begynner i $x(0) = 1, y(0) = 0 \implies (1, 0)$ og som avslutter i $x\left(\frac{1}{2}\right) = 1, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{8} \implies \left(1, \frac{17}{8}\right)$.

For å finne de ulike punktene man trenger kan man utnytte at hvis man finner midtpunktene mellom de ulike punktene, vist i figuren under, ender man opp med alle de fire punktene til den begge de halverte Bezierkurvene.

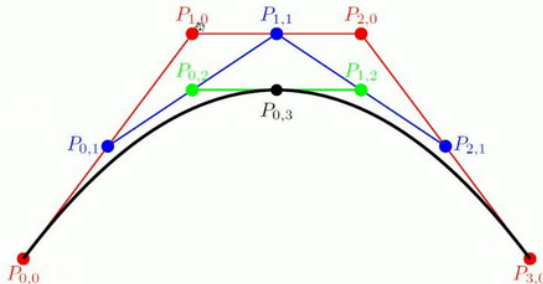
Dette oppgavepunktet krever mer inngående innsikt i hvordan en kubisk Bezierkurve genereres enn de de forutgående punktene.

STIKKORD: **Midpunktene** på de forskjellige Bezier-linjestykkene.

Cubic Bézier curve

- A cubic Bézier curve is defined by 4 control points: $P_{0,0}$, $P_{1,0}$, $P_{2,0}$ and $P_{3,0}$

$$P_{0,3} = (1-t)^3 P_{0,0} + 3t(1-t)^2 P_{1,0} + 3t^2(1-t) P_{2,0} + t^3 P_{3,0}.$$

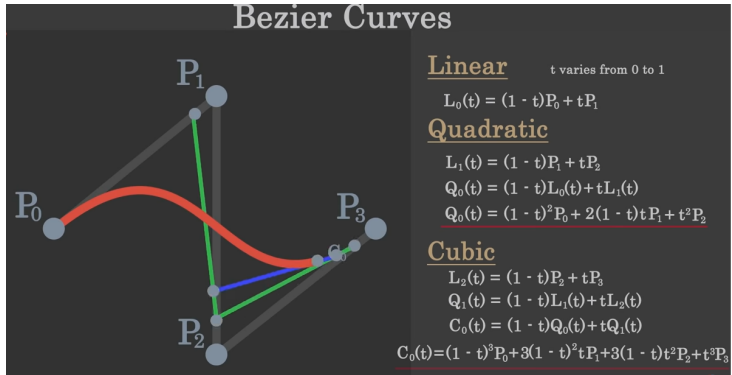


STIKKORD: **Midpunktene** på de forskjellige Bezier-linjestykkene.

OPPGAVE 4-5

Hvorfor er representasjonen riktig?

Fra forelesningen 20/9 (uke 38).



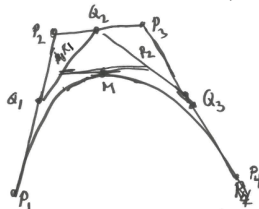
(Her er P_0 , P_1 , P_2 og P_3 brukt i stedet for P_1 , P_2 , P_3 og P_4 .)

Denne tre-minutters videosnutten er så god at jeg viser den!

[Bezier-kurver](#)

Opprinnelig B-kurve $P_1 P_2 P_3 P_4$
 Den nye B-kurven

$P_1 Q, R_1 M$



Q	mindtp. av $P_1 P_2$
Q_2	- - $P_2 P_3$
Q_3	- - $R_1 P_3 P_4$
R_1	- - $Q_1 Q_2$
R_2	- - $Q_2 Q_3$
M	- - $P_1 R_2$

Merk at M svarer til $t = 1$ i den nye Bezeierkurven.

$$Q_1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

$$R_1 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(P_2 + P_3)$$

$$M = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(Q_2 + Q_3)$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}(P_3 + P_4)$$

Da vil punktene som definerer den nedre halvdelen fra $t = 0$ til $t = \frac{1}{2}$ være gitt ved:

$$B_{P_1, Q_1, R_1, M}(t)$$

For denne oppgaven vil det bli

$$Q_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}, 2 \right)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \left(0, \frac{10}{3} \right)$$

$$M = \frac{1}{2} \left(2, \frac{51}{12} \right)$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3}, \frac{39}{6} \right)$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{20}{3}, \frac{29}{3} \right)$$

som gir at $P_1 = (1, 0)$, $Q_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $R_1 = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $M_1 = \left(1, \frac{17}{8}\right)$

Ved å bruke

$$P(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 Q_1 + 3t^2(1-t) R_1 + t^3 M_1$$

Merk at $M_1 = M$!

fra formelsamlingen med gjeldene punkter, kan man finne formelen for Bezierkurven.

$$P(t) = (1-t)^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{17}{8} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3 + 2t - 4t^2 + 2t^3 + t^2 - t^3 + t^3$$

$$x(t) = t^3 - t + 1$$

$$y(t) = t - 2t^2 + t^3 + 3t^2 - 3t^3 + \frac{17}{8}t^3$$

$$y(t) = \frac{1}{8}t^3 + t^2 + t$$

5 (3 poeng)

```
1 import numpy as np
2
3 def mystisk_metode(f, y0, n, h):
4     y = np.zeros(n)
5     y[0] = y0
6     for i in range(1,n):
7         y[i] = y[i-1]+h*f(y[i-1])
8     return y
9
10 f = lambda y: np.exp(y)
11 t0 = 0
12 tn = 1
13 n = 100
14 y0 = 0
15 y = mystisk_metode(f,y0,n,(tn-t0)/n)
```

Metoden er Eulers metode

a) Kodesnutten over tar for seg en differensiallikning:

$$y' = e^y$$

Forklar hva programmet og metoden `mystisk_metode` gjør

Løsning: Funksjonen `mystisk_metode` implementerer Eulers metode.

Programmet gir en tilnærmet løsning av differensiallikningen på tidsintervallet $t = [0, 1]$ med startverdi $y(t = 0) = 0$.

14. august 2023

Side 8 av 11

eksamen i IMAA2150,IMAG2150 og IMAT2150Høst 2022

Den gjør 99 iterasjoner av Eulers metode, gir 100 verdier av y inkludert startverdi og bruker steglengde $h = 1/100$

Merk da $n = 100$, er `range(1, n)` lik $\{1, \dots, 99\}$, altså 99 verdier.

Figur kommer på neste lysark.

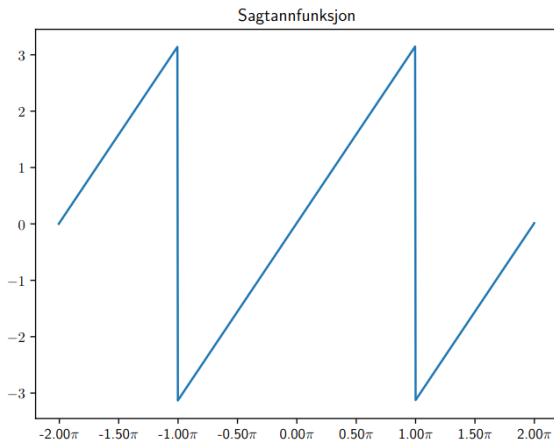
6 (2 poeng)

La funksjonen f være definert ved $f(x) = x$ for $-\pi < x < \pi$.

a) Skisser summen av Fourierrekken til $f(x)$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

Løsning: Se figur 5

b) Finn Fourierrekken til $f(x)$ og finn verdien til Fourierrekken til $f(x)$ i punktet $x = \pi$.



Figur 5: Plot av fourierrekken til $f(x)$. Perioden $T = 2\pi$ og $L = \pi$

Merk at $f(x)$ er diskontinuerlig for $x = \pi$.

Rekka konvergerer mot $(f(\pi-) + f(\pi+))/2 = (3 - 3)/2 = 0$ i $x = \pi$.

Løsning:

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Fourier-rekken til f er

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

fordi f er odde. Vi har at

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Fourier-rekken til f er altså

Delvis integrasjon brukt i beregningen av b_n med $u = -\cos nx/n$ og $v = x$.

Merk at $f(x)$ er diskontinuerlig for $x = \pi$.

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

som også er Fourer-rekken til den 2π -periodiske utvidelsen av f .

I punktet $x = \pi$ er verdien lik

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N 0 = 0.$$

Alternativt:

Diskontinuitet i $x = \pi$ med gjennomsnittsverdi 0.