



Løsninger av tidligere eksamensett

IMAx2150: Høsten 2023

Kent Holing, NTNU (14. november 2023)

Løsning er også tilgjengelig på fagets hjemmeside.

Kontinuasjonseksamen 2023

Oppgave 1 (4 poeng) Gitt matrise A ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

finn ei permutasjonsmatrise P slik at det finns LU -faktorisering for matrisa PA , og så finn denne faktoriseringa.

Legg merke til at i den **publiserte løsningen**¹ er matrisen L **ikke** som den vi brukte i forelesningene.

I forelesningene brukte vi matriser L med **bare 1-ere på diagonalen**, og det skal vi også bruke nedenfor og vi skal også bruke **delvis pivotering**.

Dette tilsvarer fremgangsmåten vi brukte i **eksemplet 2.16** i SAUER, som ble gjennomgått på forelesningen i uke 36. (Gjengitt også her for enkelthets skyld.)

¹Denne løsningen er tilgjengelig på fagets nettside.

Legg merke til at i den **publiserte løsningen**¹ er matrisen L **ikke** som den vi brukte i forelesningene.

I forelesningene brukte vi matriser L med **bare 1-ere på diagonalen**, og det skal vi også bruke nedenfor og vi skal også bruke **delvis pivotering**.

Dette tilsvarer fremgangsmåten vi brukte i **eksemplet 2.16** i SAUER, som ble gjennomgått på forelesningen i uke 36. (Gjengitt også her for enkelthets skyld.)

Vi anbefaler eksemplet som en god repetisjon av metoden for å bestemme $PA = LU$ faktoriseringer.

Vår løsning gir en forskjellig LU faktorisering av PA da **vår P er forskjellig** fra P i den publiserte løsningen.

¹Denne løsningen er tilgjengelig på fagets nettside.

Vi starter med P og A henholdsvis til venstre og høyre ($\longleftrightarrow$ indikerer radbytte).
Pivotelementene nedenfor er uthevet i **blått**.

$$\text{Bestem } PA = LU \text{ faktoriseringen av } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \textcolor{blue}{4} & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] & R_1 \longleftrightarrow R_2 \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] & R_2 - \frac{1}{2}R_1 \text{ (}\textcolor{red}{x} = \textcolor{red}{\frac{1}{2}}\text{)} \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & x & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] & R_3 - \frac{1}{4}R_1 \text{ (}\textcolor{red}{y} = \textcolor{red}{\frac{1}{4}}\text{)} \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & x & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & y & \textcolor{blue}{2} & 2 \end{array} \right] & R_2 \longleftrightarrow R_3 \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & y & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & x & -1 & 7 \end{array} \right] & R_3 + \frac{1}{2}R_2 \text{ (}\textcolor{red}{z} = \textcolor{red}{-\frac{1}{2}}\text{)} \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & y & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & x & z & 8 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Med } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Oppgave 1

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot 1/2 \\ \Delta = -1/2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ 1/2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \square = -1/2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \triangle 0 & \square 0 & -1 & 7 \end{array} \right]^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \triangle 0 & \square 0 & \boxed{0} & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \square = 1 \end{array}$$

P U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = -1/2$$

$$\square = -1/2$$

$$\star = 1$$

Sjekk selv at $PA = LU!$

(Sjekk det også med python!)

Hvis vi sjekker LU faktoriseringen vår med følgende python program, så vil vi se at den stemmer.

```
1 import scipy.linalg
2 import numpy as np
3 A=np.array([[0,0,-1,2],[-1,-1,1,2],[2,1,-3,6],[0,1,-1,4]])
4 P,L,U=scipy.linalg.lu(A)
5 print('A:')
6 print(A)
7 print('P:')
8 print(P)
9 print('L:')
10 print(L)
11 print('U:')
12 print(U)
13 print('LU:')
14 print(L@U)
15 print('PA:')
16 print(P@A)
```

```
1 A:
2 [[ 0  0 -1  2]
3  [-1 -1  1  2]
4  [ 2  1 -3  6]
5  [ 0  1 -1  4]]
6
7 P:
8 [[ 0.  0.  1.  0.]
9  [ 0.  0.  0.  1.]
10 [ 1.  0.  0.  0.]
11 [ 0.  1.  0.  0.]]
12
13 L:
14 [[ 1.  0.  0.  0.]
15 [ 0.  1.  0.  0.]
16 [ 0.  0.  1.  0.]
17 [-0.5 -0.5  1.  1.]]
18
19 U:
20 [[ 2.  1. -3.  6.]
21 [ 0.  1. -1.  4.]
22 [ 0.  0. -1.  2.]
23 [ 0.  0.  0.  5.]]
```

Oppgave 2 (4 poeng)

- a) Vis at vektorsettet $\{[2, 3, 1], [-1, 1, -1]\}$ er ortogonal.
- b) Finn projeksjonen av vektor $\mathbf{b} = [2, 1, 4]$ på $W = \text{span}([2, 3, 1], [-1, 1, -1])$.

Tips: opplysninger fra deloppgave a kan forenkle utregninger i b.

Oppg. 2

a) Vis at $[2, 3, 1] \perp [-1, 1, -1]$

Ren utregning gir

$$[2, 3, 1] \cdot [-1, 1, -1] = 0 \quad \checkmark$$

b) $\vec{b} = [2, 1, 4]$

$$W = \text{Span} \left(\overset{w_1}{[2, 3, 1]}, \overset{w_2}{[-1, 1, -1]} \right)$$

Teorem 8.2 i kompendiet
kan brukes.

$$\text{Proj}_W(\vec{b}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{w}_1}{(\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1)} \vec{w}_1 + \frac{\vec{b} \cdot \vec{w}_2}{(\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2)} \vec{w}_2$$

$$\begin{aligned} \text{Proj}_W(\vec{b}) &= \frac{11}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 134 \\ 29 \\ 103 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oppgave 3 (4 poeng) Finn en ortogonal basis til $\mathbb{R}^3$ som inneholder vektoren $[1, 1, 1]$.
(Tips: Gram-Schmidt-algoritme kan hjelpe deg.)

Merk at det **ikke** etterspørres en **ortonormal** basis.

Oppg. 3

$$V = \{[1, 1, 1]\}$$

Vi skal utvides V
til en LU mengde av
3 vektorer i $\mathbb{R}^3$

$$\bar{V} = \{[1, 1, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 0]\}$$

$\bar{V}$ oppfyller kravet.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$a(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$(a+b)\vec{e}_1 + (a+c)\vec{e}_2 + a\vec{e}_3 = \vec{0}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ LU

$$): a = 0$$

$$a+b=0): b=0$$

$$a+c=0): c=0$$

): $\vec{V}$ inneholder 3 LU vektorer
i $\mathbb{R}^3$!

$$\text{La } \bar{V} = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ (LU)}$$

(65)

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 - \frac{(x_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1$$

$$v_3 = x_3 - \frac{(x_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(x_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2$$

$$v_1 = [1, 1, 1]$$

$$v_2 = [1, 0, 0] - \frac{[1, 0, 0] \cdot [1, 1, 1]}{3} [1, 1, 1]$$

$$v_2 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right]$$

Vi får på samme måte at

$$v_3 = [0, 1/2, -1/2], \text{ og vi}$$

$$\text{kan velge } v_3 = [0, 1, -1],$$

og v_1, v_2, v_3 er parvis ortogonale

- 3] (2 poeng) En normal kubisk spline som interpolerer punktene $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$ og $(5, 5)$ er definert ved

$$\begin{aligned}S_1(x) &= 1 + A(x-1) - (x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \\S_2(x) &= 4 + 1(x-2) + B(x-2)^2 + (x-2)^3, & 2 \leq x \leq 4 \\S_3(x) &= 2 + 1(x-4) + 3(x-4)^2 + C(x-4)^3, & 4 \leq x \leq 5\end{aligned}$$

a) Bestem verdiene av A , B og C .

Løsning: For å bestemme verdiene A , B og C , bruker man egenskapene til funksjonene S_1 , S_2 og S_3 . Eksempelvis er S_1 definert fra startpunktet $(1, 1)$ til endepunktet $(2, 4)$ og vil derfor gi y -verdien til startpunktet for x -verdien til startpunktet, og y -verdien til endepunktet for x -verdien til endepunktet. Det vil si at $S_1(1) = 1$ og $S_1(2) = 4$. Setter man $x = 2$ inn i S_1 , og setter det lik 4, får man:

$$S_1(2) = 1 + A(2-1) - (2-1)^3 = 1 + A - 1 = 4 \Rightarrow A = 4.$$

14. august 2023

Side 2 av 9

eksamen i IMAA2150,IMAG2150 og IMAT2150Host 2022

Tilsvarende for S_2 og S_3 :

$$S_2(4) = 4 + 1(4-2) + B(4-2)^2 + (4-2)^3 = 4 + 2 + 4B + 8 = 14 + 4B = 2 \Rightarrow B = -3,$$

$$S_3(5) = 2 + 1(5-4) + 3(5-4)^2 + C(5-4)^3 = 2 + 1 + 3 + C = 6 + C = 5 \Rightarrow C = -1.$$

Verdiene blir da $A = 4$, $B = -3$ og $C = -1$.

Dette er å betrakte som en veldig grei (les enkel) eksamensoppgave hvis en kan de riktige definisjonene, som finnes i formelarket.

b) Finn et uttrykk for Bezierkurven som har startpunkt i $(1, 1)$, første kontrollpunkt i $(2, 4)$, andre kontrollpunkt i $(4, 2)$ og endepunkt i $(5, 5)$.

Løsning: For å finne et uttrykk for Bezierkurven gitt punkter, bruker man formelen for Bezierkurver fra formelarket:

$$P(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4.$$

Setter man inn punktene

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1-t)^3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} 3 \cdot t(1-t)^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} 3 \cdot t^2(1-t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} t^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1-3t+3t^2-t^3 \\ 1-3t+3t^2-t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 \cdot (t-2t^2+t^3) \\ 4 \cdot 3 \cdot (t-2t^2+t^3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 \cdot (t^2-t^3) \\ 2 \cdot 3 \cdot (t^2-t^3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot t^3 \\ 5 \cdot t^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+3t+3t^2-2t^3 \\ 1+9t-15t^2+10t^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dette er å betrakte som en veldig grei (les enkel) eksamensoppgave hvis en kan de riktige definisjonene, som finnes i formelarket.

Oppgave 5 (x poeng)

- a) Skriv om desimaltallet 21.50 til binært.

I standarden IEEE754 halv-presisjon er 16 bit brukt til å presentere et flyttall. En bit brukes til fortegnet, 5 bit til eksponenten og 10 bit brukes til mantissaen. Tallet $1.b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10} \cdot 2^e$ er lagret som

s	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	----------

der $s = 0$ for positive tall og $s = 1$ for negative tall, og $(e_1e_2e_3e_4e_5)_2 = e + 15$.

- b) i) Hvordan lagres desimaltallet 21.50 i IEEE754 halv-presisjon?
ii) Hva er maskin- ϵ i IEEE754 halv-presisjon?

Oppg. 5

s	BE	M
1	(5)	(10)

$$BE = 2^4 - 1 + E = E + 15$$

$$21.5 = 2^4 + 2^2 + 1 + 1/2$$

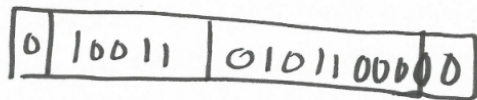
$$21.5 = (10101.1)_2$$

$$21 = 16 + 4 + 1$$

$$BE \neq 1.01011 \times 2^4$$

$$BE = 2^4 - 1 + 4 = 15 + 4 = 19$$

$$19 = 10011$$



$$\epsilon_M = (1.000000000001) - 1$$

$$\epsilon_M = 2^{-10}$$

Oppgave 6

Vi har ei følge som er gjeve av differanslikninga:

$$\begin{aligned}a_n &= 2a_{n-1} + 3, \quad \forall n \geq 2 \\ a_1 &= 2\end{aligned}$$

- a) Bruk iterasjonsmetoden til å finna eit eksplisitt uttrykk for a_n
- b) Verifiser at løysinga di stemmer ved matematisk induksjon

Vi har en følge gitt ved differanslikningen:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3, \quad \forall n \geq 2$$

$$a_1 = 2$$

a) Bruk iterasjonsmetoden til å finne et eksplisitt uttrykk for a_n

Løsning: Vi setter opp itererer over følgen og forsøker å se et mønster:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 = 2 \cdot (2) + 3$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2 \cdot a_2 + 3 = 2 \cdot (2 \cdot 2 + 3) + 3 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= 2 \cdot a_3 + 3 = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3) + 3 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \end{aligned}$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 + 3 = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3) + 3$$

$$a_5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3$$

$$a_5 = 2^5 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^0$$

Det ser ut som vi kan gjette på følgende løsning:

$$a_n = 2^n + \sum_{i=0}^{n-2} 3 \cdot 2^i$$

Oppg. 6 (forts.)

DEF av følge

$$a_n = 2a_{n-1} + 3, n \geq 2$$

$$a_1 = 2$$

Hypoteserkl. hjelp av
iterasjonsmetoden:

$$a_n = 2^n + \sum_{i=0}^{n-2} 3 \cdot 2^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-2} 3 \cdot 2^i = 3 \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} 2^i}_{\text{GR } n-1 \text{ kull}} = 3 \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$$

GR $n-1$ kull
koeffisient 2

Fra forrige lysark hadde vi $a_n = 2^n + 3 \times 2^{n-1} - 3$.

$$a_n = \cancel{2} \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - 3$$

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3$$

Skal vise at dette
er riktig for $n \geq 1$
ved induksjonsbevis

Induktionsbevis

$$(*) \text{ Vis at } a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3, n \geq 1$$

$$\textcircled{\text{DEF}} \quad a_n = 2a_{n-1} + 3, n \geq 2$$

$$a_1 = 2$$

$$n=1:$$

$$VS \text{ av } (*) = a_1 = 2$$

$$HS \text{ - 11 - } = 5 \cdot 1 - 3 = 2$$

$$HS = VS \checkmark$$

$$\text{Anta } a_k = 5 \cdot 2^{k-1} - 3 \quad (1A)$$

Da er

$$a_{k+1} = 2a_k + 3 \quad (\text{pga DEF})$$

$$a_{k+1} = 2[5 \cdot 2^{k-1} - 3] + 3$$

$$a_{k+1} = 5 \cdot 2^k - 6 + 3$$

$$a_{k+1} = 5 \cdot 2^k - 3$$

$$a_{k+1} = 5 \cdot 2^{(k+1)-1} - 3$$

(*) OK for $n = k+1$ $\Rightarrow$ OK
for $n = k$

Oppg ve 7

Vi har følgende pythonprogram

```
1 import numpy as np
2 def mystisk_metode(A, x0, b, tol):
3     n = b.size
4     err = np.linalg.norm(b-A*x0)
5     while (err > tol):
6         x = np.zeros_like(x0)
7         for i in range(n):
8             x[i] = b[i]
9             for j in range(n):
10                 if i==j:
```

```
11                 continue
12                 x[i] = x[i] - A[i,j]*x0[j]
13                 x[i] = x[i]/A[i,i]
14             x0 = x
15             err = np.linalg.norm(b-A*x)
16         return x
17
18
19 A = np.array([[ 5,2,1],
20               [1,5,2],
21               [2,1,5]]);
22 b = np.array([1,2,3]).reshape((3,1))
23 x0 = np.zeros_like(b)
24 x = mystisk_metode(A,x0,b,1e-3)
25
```

Oppgave 7

Vi har følgende pythonprogram

```
1 import numpy as np
2 def mystisk_metode(A, x0, b, tol):
3     n = b.size
4     err = np.linalg.norm(b-A*x0)
5     while (err > tol):
6         x = np.zeros_like(x0)
7         for i in range(n):
8             x[i] = b[i]
9             for j in range(n):
10                 if i==j:
```

```
11                 continue
12                 x[i] = x[i] - A[i,j]*x0[j]
13                 x[i] = x[i]/A[i,i]
14             x0 = x
15             err = np.linalg.norm(b-A*x)
16         return x
17
18
19 A = np.array([[ 5,2,1],
20               [1,5,2],
21               [2,1,5]]);
22 b = np.array([1,2,3]).reshape((3,1))
23 x0 = np.zeros_like(b)
24 x = mystisk_metode(A,x0,b,1e-3)
25
```

Merk at hvis b defineres med heltallsverdier som i oppgaveteksten her, så fungerer ikke programmet (det går i evig loop): Bruker vi **float** i definisjonen av b -verdiene, så vil programmet fungere korrekt.

- a) Kva gjer programmet, og kva for ein numerisk metode blir implementert i funksjonen `mystisk_metode`

Me har følgjande to likningssystem som er ekvivalente (har samme løysing).

$$1. \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- b) Kva for eit av dei ville du brukt om du skulle løysa det ved bruk av Gauss-Seidels metode direkte, og kvifor?
- c) Utfør to iterasjonarr av Gauss-Seidel på systemet i b) med startvektor $x_0 = [0, 0, 0]^T$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dersom du valgte system 1 i stedet for 2 vil det ikke bli poengtrekk i denne deloppgaven, men Gauss-Seidel vil altså ikke konvergere om man fortsatte iterasjonene Startverdi $x_0 = [u_0, v_0, w_0]^T = [0, 0, 0]^T$. Iterasjonene blir som følger

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2 - 2v_n - w_n}{5} \\ v_{n+1} &= \frac{3 + u_{n+1} - w_n}{3} \\ w_{n+1} &= \frac{1 + 2u_{n+1} - v_{n+1}}{-4} \end{aligned}$$

Vi regner ut første iterasjon:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2 - 0 - 0}{5} = \frac{2}{5} \\ v_1 &= \frac{3 + 2/5 - 0}{3} = \frac{17}{15} \\ w_1 &= \frac{1 + 2 \cdot 2/5 - 17/15}{-4} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Merk for å sikre konvergens med koeffisientmatrisa være **strengt diagonaldominant**.

(Metodene kan konvergere hvis ikke matrisa oppfyller dette, men vi kan ikke garantere at metodene da konvergerer.)

Andre iterasjon:

$$u_2 = \frac{2 - 2 \cdot 17/15 + 1/6}{5} = -1/50$$

$$v_2 = \frac{3 - 1/50 + 1/6}{3} = 236/225$$

$$w_2 = \frac{1 + 2 \cdot (-1/50) - 236/225}{-4} = 1/45$$

Oppgave 8 Vi har eit overbestemt inkonsistent likningssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- a) Finn $\tilde{x}$ som minimerer feilen ved minste kvadraters metode
- b) Beregn RMSE feilen til $\tilde{x}$

Oppgave 8

$$a) \quad \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} \cdot \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Inkonsistent LS

Normaltilgning

$$A^T A x = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Merk at ligningssystemet $Ax = b$ har **ingen løsning**.

Fra forrige lysark har vi

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \text{ og}$$

$$A^T b = [4 \ 1]^T$$

Gausseliminering gir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 8 & 4 \\ 0 & 3/7 & -9/7 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{): } \underline{x_2} &= \underline{-3} \\ \underline{x_1} &= \frac{4 + 8 + 3}{14} = \underline{2} \end{aligned}$$

Merk vi skal ha $x_1 = (4 + 8 \times 3)/14 = 2$.

b) RMSE feilen

$$\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2}{m}}$$

$$r = b - Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{RMSE: } \sqrt{\frac{1+4+1}{3}} = \sqrt{2}$$