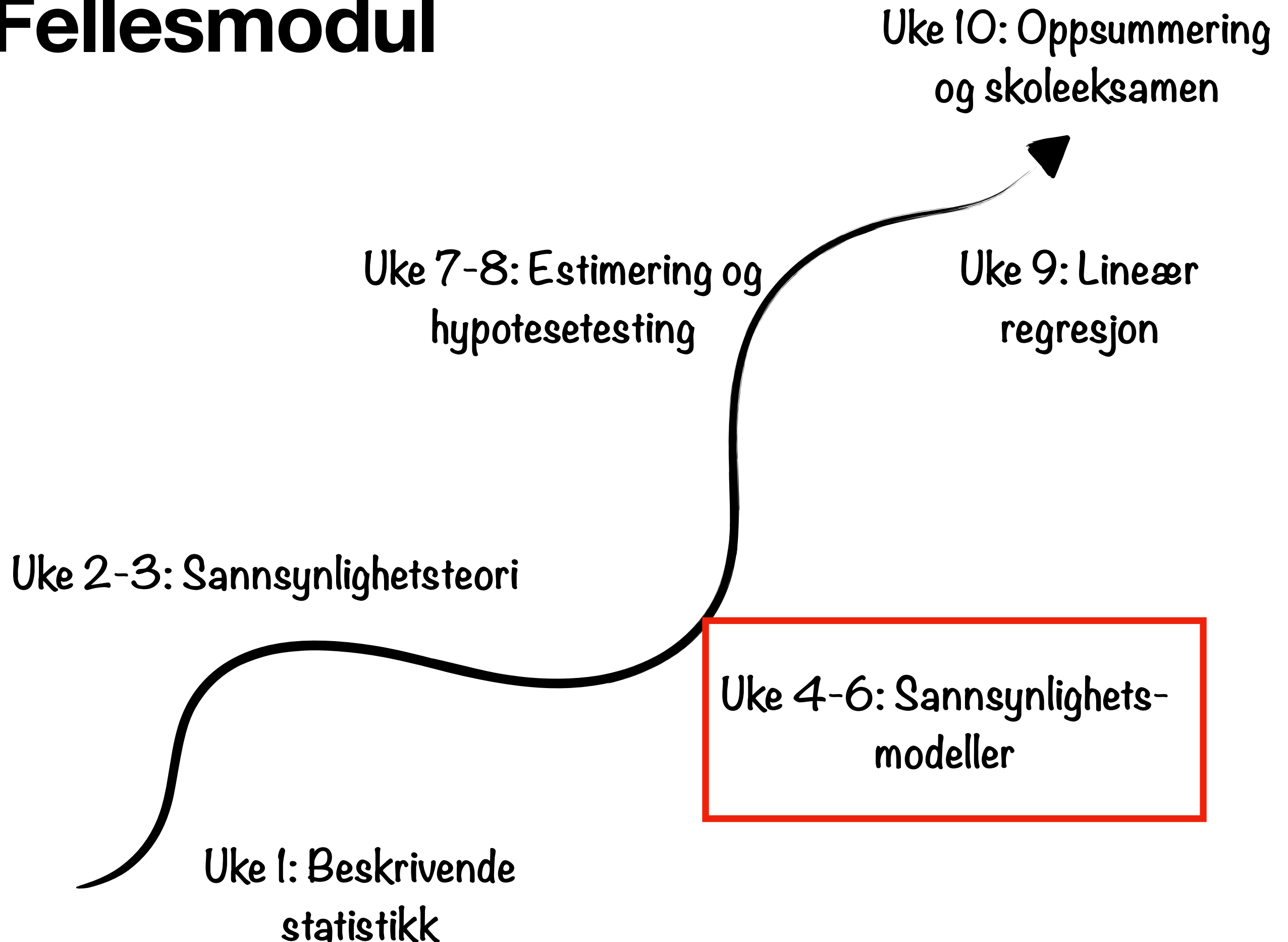


Statistikk for ingeniører

Digital plenumstime - uke 5 (20.09.2021)

Mette Langaas, Institutt for matematiske fag, NTNU

Fellesmodul



Plan for timen

**Uke 4: Binomisk forsøksrekke,
binomisk- og geometrisk fordeling**

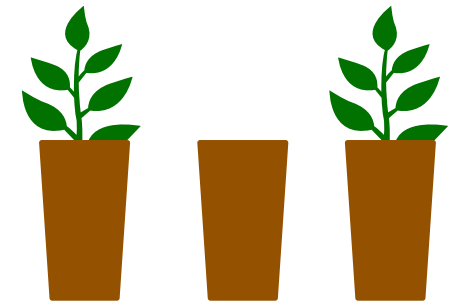
**Hvordan vet/bestemmer vi hvilken
fordeling $f(x)$ en stokastisk variabel X har?**

**Uke 5: Poissonprosess, poisson-
eksponential-, og weibullfordeling og
systempålitelighet**

Uke 3: Stokastiske variabler (hvis tid)

Ny info om STACK

Læringsmål uke 4



Gjengi betingelsene som må være oppfylt for at en stokastisk variabel X skal være binomisk fordelt (**binomisk forsøksrekke**).

Identifisere situasjoner der betingelsene for en binomisk forsøksrekke kan sies å gjelde, og der en binomisk sannsynlighetsmodell vil være en god modell.

Kunne beregne **forventningsverdi, varians og standardavvik** for en binomisk fordeling ut ifra modellparameterene.

Kunne beregne **binomiske punktsannsynligheter og kumulative sannsynligheter** ved hjelp av formelen for den binomiske **sannsynlighetsfordelingen**, ved å bruke **tabellen med kumulative binomiske sannsynligheter** (fra Formelark og tabeller i venstremenyen i Bb), og ved å bruke **Python** med hjelp fra ferdiglaget kode i Jupyter notatbøker.

Over til Mentimeter

Binomisk forsøksrekke

Det utføres n forsøk

Parametere i fordelingen: n og p

Hvert forsøk kan ende som suksess eller fiasko

Sannsynligheten for suksess, p , er den samme i alle forsøk

Forsøkene er uavhengige av hverandre

X : Diskret stokastisk variabel som teller antall suksesser i n slike forsøk

X er en **binomisk** fordelt stokastisk variabel

Binomisk fordeling

Parametere i fordelingen: n og p

X : Diskret stokastisk variabel som teller antall suksesser i binomisk forsøksrekke er binomisk fordelt

$$E(X) = n \cdot p$$

$$E(X)=5.5 \text{ hvis } n=11 \text{ og } p=\frac{1}{2}$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$E(X)$ trenger ikke være en verdi X kan ta.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n \quad \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$$

Regn $P(X)$ ved å sette inn i formel – bruk nCr på kalkulator for $\binom{n}{x}$

Informasjon

Informasjon om emnet

Arbeidskrav, pensum og
ressurserFagteam og
referansegruppe

Digital plenumstime

ISTA: Campus Ålesund

ISTG: Campus Gjøvik

ISTT1001/3: Campus
TrondheimISTT1002: Campus
Trondheim

Undervisning og øvinger

Fellesmodul

STACK-øvinger

Python/Jupyter

Digitalt forum

Eksamen

Informasjon om eksamen

Formelark og tabeller

Tidligere
eksamensoppgaverPrøveeksamen og
eksamensforberedelser

Formelark

Uke 4

4 Sannsynlighetsfordelinger

Binomisk fordeling

$$X \sim \text{Binom}(n, p)$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

$$\text{for } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Geometrisk fordeling

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1},$$

$$\text{for } x = 1, 2, \dots$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1 - p)^x$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Hvor er nCr på din
kalulator?

Over til Mentimeter

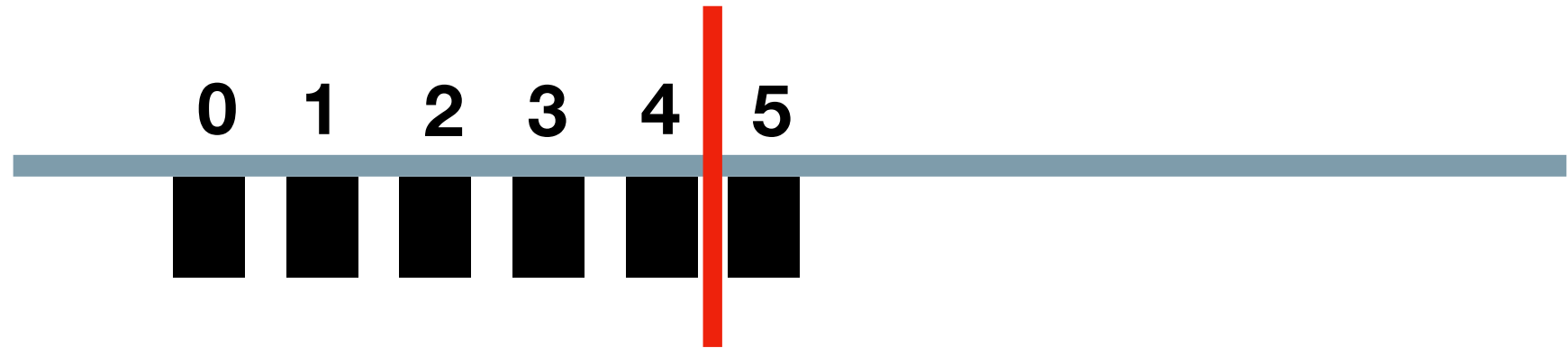
BINOMISK FORDELING: $P(X \leq x)$

 n	 x	p											
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	0	0.902	0.810	0.723	0.640	0.563	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010
	1	0.998	0.990	0.978	0.960	0.938	0.910	0.840	0.750	0.640	0.510	0.360	0.190
3	0	0.857	0.729	0.614	0.512	0.422	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001
	1	0.993	0.972	0.939	0.896	0.844	0.784	0.648	0.500	0.352	0.216	0.104	0.028
	2	1.000	0.999	0.997	0.992	0.984	0.973	0.936	0.875	0.784	0.657	0.488	0.271
4	0	0.815	0.656	0.522	0.410	0.316	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.002	0.000
	1	0.986	0.948	0.890	0.819	0.738	0.652	0.475	0.313	0.179	0.084	0.027	0.004
	2	1.000	0.996	0.988	0.973	0.949	0.916	0.821	0.688	0.525	0.348	0.181	0.052
	3	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.992	0.974	0.938	0.870	0.760	0.590	0.344
5	0	0.774	0.590	0.444	0.328	0.237	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.000	0.000
	1	0.977	0.919	0.835	0.737	0.633	0.528	0.337	0.187	0.087	0.031	0.007	0.000
	2	0.999	0.991	0.973	0.942	0.896	0.837	0.683	0.500	0.317	0.163	0.058	0.009
	3	1.000	1.000	0.998	0.993	0.984	0.969	0.913	0.812	0.663	0.472	0.263	0.081
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.990	0.969	0.922	0.832	0.672	0.410
6	0	0.735	0.531	0.377	0.262	0.178	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000
	1	0.967	0.886	0.776	0.655	0.534	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.002	0.000
	2	0.998	0.984	0.953	0.901	0.831	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.017	0.001
	3	1.000	0.999	0.994	0.983	0.962	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.099	0.016

Generelt: $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$ formel
tabell
Python

For diskret stokastiske variabler (0,1,2,3,...):

$$P(X \geq x) = P(X > x - 1) = 1 - P(X \leq x - 1) = 1 - F(x - 1)$$



$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4)$$

For kontinuerlige stokastiske variabler:

$$P(X \geq x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5)$$

Læringsmål uke 4

Forstå hvordan vi kan **modifisere den binomiske forsøksrekken** til å se på antall forsøk til først suksess, og få en stokastisk variable X som er **geometrisk fordelt**.

Identifisere situasjoner der geometrisk sannsynlighetsmodell vil være en god modell.

Kunne beregne **forventningsverdi, varians og standardavvik** for en geometrisk fordeling ut ifra modellparameter.

Kunne beregne **geometriske punktsannsynligheter** og kumulative sannsynligheter ved hjelp av **formler** og ved å bruke Python med hjelp fra ferdiglaget kode i Jupyter notatbøker.

Over til Mentimeter

Repetisjon: binomisk forsøksrekke

Det utføres ~~n~~ forsøk

Hvert forsøk kan ende som suksess eller fiasko

Sannsynligheten for suksess, p , er den samme i alle forsøk

Forsøkene er uavhengige av hverandre

Y : Antall forsøk frem til og med første suksess

$Y \sim \text{Geometrisk}(p)$ $y = 1, 2, 3 \dots$

$$P(Y = y) = p \cdot (1 - p)^{y-1}$$

Informasjon

Informasjon om emnet

Arbeidskrav, pensum og
ressurserFagteam og
referansegruppe

Digital plenumstime

ISTA: Campus Ålesund

ISTG: Campus Gjøvik

ISTT1001/3: Campus
TrondheimISTT1002: Campus
Trondheim

Undervisning og øvinger

Fellesmodul

STACK-øvinger

Python/Jupyter

Digitalt forum

Eksamen

Informasjon om eksamen

Formelark og tabeller

Tidligere

eksamensoppgaver

Prøveeksamen og
eksamensforberedelser

Formelark

Uke 4

4 Sannsynlighetsfordelinger

Binomisk fordeling

$$X \sim \text{Binom}(n, p)$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

$$\text{for } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Geometrisk fordeling

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1},$$

$$\text{for } x = 1, 2, \dots$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1 - p)^x$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Hvorfor har vi ikke
tabeller for $F(x)$ for
geometrisk
fordeling?

Bevis for $F(x)$, $E(X)$ og $\text{Var}(X)$

Eksempler på stokastiske variabler

Binomisk fordelt

Antall blomster fra n blomsterfrø

Antall pasienter med gitt bivirkning av vaksine

Antall produkter med feil (lakkeringsrobot)

Geometrisk fordelt

Antall terningkast for å få første 6er

Antall ganger man må ringe for å få svar

Antall forsøk før lakkeringsrobot lykkes

Binomisk forsøksrekke m/u modifikasjon, gjenkjenne situasjon, regne ut punktsannsynlighet, finne hvilken x har maksimal sannsynlighet, generell sannsynlighet $F(b)-F(a)$, betinget sannsynlighet, forventning, varians, standardavvik.

Informasjon

Informasjon om emnet

Arbeidskrav, pensum og
ressurserFagteam og
referansegruppe

Digital plenumstime

ISTA: Campus Ålesund

ISTG: Campus Gjøvik

ISTT1001/3: Campus
TrondheimISTT1002: Campus
Trondheim

Undervisning og øvinger

Fellesmodul

STACK-øvinger

Python/Jupyter

Digitalt forum

Eksamen

Informasjon om eksamen

Formelark og tabeller

Tidligere
eksamensoppgaverPrøveeksamen og
eksamensforberedelser

Uke 5: Poissonprosess, poisson-, eksponential- og weibullfordeling og systempålitelighet



Introduksjon

Velkommen til femte undervisningsuke! Da er vi HALVVEIS til eksamen i fellesmodulen!

Denne uka skal vi introdusere en ny prosess som heter poissonprosessen, og leder oss til en stokastisk tellevariabel som er poissonfordelt og en stokastisk målevariabel (kontinuerlig, ventetiden i prosessen) som er eksponensialfordelt.

En poissonprosess beskriver hendelser som skjer i tid eller rom. Når hendelser kan antas å skje ifølge en slik prosess, så vil antall hendelser i et visst tidsrom eller i et avgrenset område kunne modelleres med poissonfordeling, som er en diskret sannsynlighetsfordeling. Raten av hendelser er et sentralt begrep. Du husker kanskje at for binomiske forsøksrekker så vi på antall suksesser i et visst antall forsøk, mens for poissonprosessen så vi på antall hendelser (suksesser) i et visst tidsrom (eller område). Faktisk kan vi dele tidslinja (eller området) inn i mange bitte-små intervaller, og se på hvert intervall som et forsøk i binomisk forsøksrekke. Poissonfordelingen oppstår som et grensetilfelle av binomisk fordeling når antall forsøk går mot uendelig, samtidig sannsynligheten for suksess i hvert forsøk blir veldig liten.

Eksponensialfordelingen oppstår som ventetid i en poissonprosess, men er i seg selv en mye brukt fordeling for å modellere levetid. Det kan være levetid til et produkt, en komponent, en maskin, osv. En mer finleddet levetid får vi ved å anvende Weibullfordelingen. Denne står det ikke om i læreboka, men er såpass sentral i ingeniørfaget at vi har laget et ekstra notat (og temavideo, selvfølgelig!). I dette notatet kan du også lese om levetidsfordelingene og sentrale konsepter innenfor pålitelighetsanalyse. Her kommer seriekobling og parallellkobling av komponenter også inn.

Som i forrige uke kan det fort bli kjedelig å regne på f.eks. kumulative sannsynligheter i poisson-fordelingen der vi må legge sammen en haug med punktsannsynligheter. I praksis bruker vi stort sett statistisk programvare til å gjøre slike utregninger (for eksempel python), men det er også nyttig å lære seg hvordan vi kan lese av slike sannsynligheter fra tabeller (siden vi ikke kan bruke Python på eksamen). Tabeller finner du i fanen "Data" her i Blackboard.

Ukas aktiviteter:

1. Du har *muligheten* for å starte uka med å følge den digitale plenumsforelesningen som zoom-webinar på mandag 20.september kl 14.15-15.00 (se info under - samme lenke hele semestret).
2. I løpet av uka skal du se fire temavideoer. Disse finner du i Panopto, se lenke til mappe under.
3. Ukas øving i STACK: stack.math.ntnu.no
4. Denne uke er det to Jupyter-notatbøker du trenger for å gjøre øvingen. De finner du under Uke 5 på s.ntnu.no/isthub.
5. Du får hjelp med øvingen i øvingsveiledningen (se din tid under din campus) eller ved å stille spørsmål i forumet <https://mattelab.math.ntnu.no/> under kategorien ISTx100y og så underkategori for øving 5.
6. Campusforelesning er på fredag 24.09 kl 12.15-14.00 (se sted under din campus). Husk at du må se på temavideoene (og/eller lese de relevante kapitlene i læreboka) før du kommer i campusforelesningen.
7. Husk at innleveringsfristen for STACK øving 4 er fredag **24.09 kl 23.59** - og at du må ha minst 8 av 10 poeng for å få øvingen godkjent, fristen for øving 5 er **01.10 kl 23.59**.



Digital plenumstime

Zoom-webinar mandag 20.september kl 14.15-15.00.

Samme zoom webinar lenke i hele fellesdelen: <https://NTNU.zoom.us/j/99568542340?pwd=aGU2MUFPZzE0VFJ0b2ZUT2tLZU9pZz09>

Ved behov: Meeting ID: 995 6854 2340 og Passcode: 607831

Vi vil bruke mentimeter (studentresponssystem) i zoom webinar, og det deltar du på underveis ved å gå til www.menti.com og skrive inn en kode som vises under webinar.

Plan for timen:

- Kjernebegreper fra uke 4 - kan du dem?
- Litt mer om $X+Y$ og $2X$, og forventningsverdi og varians til en sum av stokastiske variabler (fra uke 3 og brukes resten av emnet).
- Uke 5: poissonprosessen, som leder til poissonfordelingen og eksponensialfordelingen - som igjen bringer oss over til pålitelighet og levetid.

Video fra timen finner du i [denne mappen](#)

Slides fra timen finner du i [denne mappen](#)



Pensum i læreboka og ekstra notat

Kapittel 5.5 og 5.6 i læreboka i tillegg til et notat om levetid og systempålitelighet ([pdf](#)). Dette notatet finner du også som en interaktiv jupyter notatbok i jupyter-huben under Uke5.



Pensum i læreboka og ekstra notat

Kapittel 5.5 og 5.6 i læreboka i tillegg til et notat om levetid og systempålitelighet ([pdf](#)). Dette notatet finner du også som en interaktiv presentasjon.

Anbefalte oppgaver i læreboka: 16, 17, 18, 21 [Løsningsforslag](#)



Læringsmål denne uken

Gjengi betingelsene som må være oppfylt for at en stokastisk variabel X skal være poissonfordelt (poissonprosess).

Identifisere situasjoner der betingelsene for en poissonprosess kan sies å gjelde, og der en poissonfordeling vil være en god sannsynlighetsmodell.

Kjenne til sammenhengen mellom forventningsverdi, varians og standardavvik for en poissonfordeling og kunne beregne disse fra forventningsverdi.

Kunne beregne punktsannsynligheter og kumulative sannsynligheter i poissonfordelingen ved hjelp av formel for sannsynlighetsfunksjon og tabeller i venstremenyen i Bb), og ved å bruke Python med hjelp fra ferdiglaget kode i Jupyter notatbøker.

Kjenne til at sammenhengen mellom binomisk fordeling og poissonfordeling.

Forstå hvordan vi fra poissonprosessen kan definere en stokastisk variabel X som er eksponensialfordelt.

Identifisere situasjoner der en eksponensialfordeling vil være en god sannsynlighetsmodell.

Kjenne til begrepene pålitelighetsfunksjon og sviktrate og hva disse er for eksponensial- og weibullfordeling.

Kunne beregne forventningsverdi, varians og standardavvik for en eksponensialfordeling og en weibullfordeling (med kalkulator, kun i Jupyter notatbok.)

For eksponensial- og weibullfordeling kunne beregne kumulative sannsynligheter ved hjelp av formel og tabeller.

For pålitelighet av systemer, kjenne til en seriekobling og en parallellkobling av komponenter, og kunne beregne pålitelighetsfunksjonen for disse (i Jupyter notatbøker).



Temavideoer

Denne uka har vi fire temavideoer som ligger i [denne Panopto-mappa](#)

NB fra 9.30 i videoen om Levetid og pålitelighet med eksponential- og weibullfordelingen så er det en liten feil i videoen under og kommentar på videoen.

4

1. Introduksjon til poissonprosess og poissonfordelingen ([pdf](#))
2. Sammenhengen mellom binomisk fordeling og poissonfordelingen ([pdf](#))
3. Eksponensialfordelingen ([pdf](#))
4. Levetid og pålitelighet med eksponensial- og weibullfordeling ([pdf](#))



Jupyter notatbøker og python-kode

Denne uka har vi to relevante notatbøker i jupyter-huben:

2

1. poissonfordeling.ipynb (for å regne på og visualisere sannsynligheter i poissonfordelingen)
2. Notat om levetid, weibullfordelingen og systempålitelighet.ipynb (for å regne på og visualisere levetidsforventning)



STACK-øving nr 5

Innleveringsfrist:

Husk at vi har tabeller for kumulative sannsynligheter i poissonfordeling i Bb).

Lenke til STACK: <https://stack.math.ntnu.no>. Har du tekniske problemer?

Mer info finner du i egen STACK-fane her på BB.

Se campussidene for informasjon om fysisk veiledning på campus og/eller online.

Husk også at du kan stille spørsmål på forumet under øving 5!



Campusforelesning

Campusforelesningene er på fredager kl 12.15-14.00.

Se Campussidene for sted og plan!



Noen tidligere eksamensoppgaver (med LF)

H2020 oppgave 1c, K2021 oppgave 3a.

TALM1005: Nov 19: 2, Mai 19: 4, Nov 18: 3a,b, Mai 18: 3

Læringsmål

Poissonprosess og poissonfordeling

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Gjengi betingelsene som må være oppfylt for at en stokastisk variabel X skal være poissonfordelt (**poissonprosess**).

Identifisere situasjoner der betingelsene for en poissonprosess kan sies å gjelde, og der en poissonfordeling vil være en god sannsynlighetsmodell.

Kjenne til sammenhengen mellom **forventningsverdi, varians og standardavvik** for en poissonfordeling og kunne beregne disse fra modellparametere.

Kunne beregne punktsannsynligheter og kumulative sannsynligheter i poissonfordelingen ved hjelp av formel for sannsynlighetsfordelingen, og ved å bruke tabellen med kumulative poisson-sannsynligheter (fra Formelark og tabeller i venstremenyen i Bb), og ved å bruke Python med hjelp fra ferdiglaget kode i Jupyter notatbøker.

Eksempler på poissonfordelt stokastisk variabel

Antall alfapartiler fra
radioaktiv kilde i 1 minutt

Antall vulkanutbrudd,
ulykker i løpet av et år

Antall kunder til butikk
mellom 9 og 10.

Antall trykkfeil på bokside

Antall nye innlegg på
diskusjonsforum i løpet av en
time

Poissonprosess



Antall hendelser i et tidsintervall (eller innen begrenset område)

X : antall hendelser i løpet av t tidsenheter

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengig
2. Forventet antall hendelser i et intervall av lengde t er alltid lik λt
3. Sannsynligheten for at mer enn én hendelse skjer i et lite intervall er *neglisjerbar*

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(X = x) \quad F(x) = P(X \leq x) \quad E(X) \quad \text{Var}(X)$$

Informasjon

Informasjon om emnet

Arbeidskrav, pensum og
ressurserFagteam og
referansegruppe

Digital plenumstime

ISTA: Campus Ålesund

ISTG: Campus Gjøvik

ISTT1001/3: Campus
TrondheimISTT1002: Campus
Trondheim

Undervisning og øvinger

Fellesmodul

STACK-øvinger

Python/Jupyter

Digitalt forum

Eksamen

Informasjon om eksamen

Formelark og tabeller

Tidligere
eksamensoppgaverPrøveeksamen og
eksamensforberedelser

Poissonfordeling

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t},$$

for $x = 0, 1, 2, \dots$

$$E(X) = \lambda t, \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

Eksponentialfordeling

$$T \sim \text{Eksponential}(\lambda)$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{for } t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Weibullfordeling

$$T \sim \text{Weibull}(\alpha, \lambda)$$

$$f(t) = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha}, \quad \text{for } t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$$

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} (\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})^2)$$

Formelark

Uke 5

4.2 Begreper fra levetidsanalyse

Pålitelighetsfunksjon

$$R(t) = 1 - F(t)$$

Sviktrate

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Systempålitelighet seriekobling

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t)$$

Systempålitelighet parallellkobling

$$R(t) = 1 - F_1(t) \cdot F_2(t) \cdots F_n(t)$$

Formelark og tabeller



Formelark og tabeller A↓

Formelark og tabeller er hjelpemidler du får tilgang til på eksamen, og som du skal bruke i øvingsopplegget.



Formelark A↓

Formelark for uke 1 - 9 av fellesmodulen finner du [her](#) A↓



Tabell: Kumulative sannsynligheter i binomisk fordeling for utvalgte verdier av n og p A↓



Tabell: Kumulative sannsynligheter i poissonfordeling for utvalgte parameterverdier A↓



Tabell: Kumulative sannsynligheter i standard normalfordelingen A↓



Kritiske verdier i standard normalfordelingen A↓



Kritiske verdier i t-fordelingen A↓

Sammenslått - Statistikk

ISTX1001 ISTX1002
ISTX1003 (2021 HØST)

ISTA/G/T 1001/2/3
Statistikk for ingeniører

Informasjon

Informasjon om emnet

Arbeidskrav, pensum og
ressurser

Fagteam og
referansegruppe

Digital plenumstime

ISTA: Campus Ålesund

ISTG: Campus Gjøvik

ISTT1001/3: Campus
Trondheim

ISTT1002: Campus
Trondheim

Undervisning og øvinger

Fellesmodul

STACK-øvinger

Python/Jupyter

Digitalt forum

Eksamen

Informasjon om eksamen

Formelark og tabeller

Tidligere
eksamensoppgaver

Prøveeksamen og
eksamensforberedelser

Læringsmål

Binomisk fordeling vs poissonfordeling

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Kjenne til at sammenhengen mellom binomisk fordeling og poissonfordeling.

Liker du teori, og vil se mer? Utleddning av poissonfordeling finner du her: [Video om poissonprosess og -fordeling fra TMA4240/45](#)

Læringsmål

Forstå hvordan vi fra poissonprosessen kan definere en stokastisk variabel X som er **eksponentialfordelt**.

Identifisere situasjoner der en eksponentialfordeling vil være en god sannsynlighetsmodell.

Kunne beregne **forventningsverdi, varians og standardavvik** for en eksponentialfordeling ut ifra modellparametre. Kunne beregne **kumulative sannsynligheter** ved hjelp av formler, og ved å bruke Python med hjelp fra ferdiglaget kode i Jupyter notatbøker.

Eksponentialfordeling

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Informasjon

Informasjon om emnet

Arbeidskrav, pensum og
ressurserFagteam og
referansegruppe

Digital plenumstime

ISTA: Campus Ålesund

ISTG: Campus Gjøvik

ISTT1001/3: Campus
TrondheimISTT1002: Campus
Trondheim

Undervisning og øvinger

Fellesmodul

STACK-øvinger

Python/Jupyter

Digitalt forum

Eksamen

Informasjon om eksamen

Formelark og tabeller

Tidligere
eksamensoppgaverPrøveeksamen og
eksamensforberedelser

Poissonfordeling

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t},$$

$$\text{for } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda t, \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

Eksponentialfordeling

$$T \sim \text{Eksponential}(\lambda)$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{for } t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Weibullfordeling

$$T \sim \text{Weibull}(\alpha, \lambda)$$

$$f(t) = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha}, \quad \text{for } t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$$

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} (\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})^2)$$

Formelark

Uke 5

4.2 Begreper fra levetidsanalyse

Pålitelighetsfunksjon

$$R(t) = 1 - F(t)$$

Sviktrate

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Systempålitelighet seriekobling

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t)$$

Systempålitelighet parallellkobling

$$R(t) = 1 - F_1(t) \cdot F_2(t) \cdots F_n(t)$$

Deskriptiv statistikk

Hendelser og sannsynlighet

Stokastiske variabler og fordelinger

Stokastisk variabel

Punktsannsynlighet

Sannsynlighetstetthet

Kumulativ fordeling

Kvantil

Simultanfordeling

Betinget fordeling

Uavhengige stokastiske variabler

Teorem: Sammenheng mellom $f(x)$ og $F(x)$

For en diskret stokastisk variabel X er det en en-til-en sammenheng mellom [kumulativ fordeling](#) $F(x)$ og [punktsannsynlighet](#) $f(x)$. Hvis de mulige verdier for X er $0, 1, 2, \dots$ har vi at

$$F(x) = \sum_{t=0}^x f(t)$$

og

$$f(x) = F(x) - F(x-1).$$

For en kontinuerlig stokastisk variabel X er det tilsvarende en en-til-en sammenheng mellom [kumulativ fordeling](#) $F(x)$ og [sannsynlighetstetthet](#) $f(x)$, og denne er gitt ved at

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

og

$$f(x) = F'(x).$$

Eksempler på stokastiske variabler

poissonfordelt

Antall alfapartiler fra radioaktiv kilde i 1 minutt

Antall vulkanutbrudd, ulykker i løpet av et år

Antall kunder til butikk mellom 9 og 10.

Antall trykkfeil på bokside

Antall nye innlegg på diskusjonsforum i løpet av en time

eksponensialfordelt

Levetid lyspære

Tid mellom utsendelse av alfapartikler

Tid mellom ulykker

Tid mellom kunder som ankommer butikk

Tid mellom nye innlegg på diskusjonsforum

Læringsmål

Kjenne til begrepene **pålitelighetsfunksjon** og **sviktrate** og hva disse er for **eksponential-** og **weibullfordelingen**. Kunne beregne disse fra formler og ved å bruke Python med hjelp fra ferdiglaget kode i Jupyter notatbøker.

Levetid og pålitelighet med eksponensial- og Weibullfordeling

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Kunne beregne **forventningsverdi**, **varians** og **standardavvik** for en **weibullfordeling** ut ifra modellparametere. Kunne beregne **kumulative sannsynligheter** ved hjelp av formler, og ved å bruke Python med hjelp fra ferdiglaget kode i Jupyter notatbøker. (For Weibull er en gammafunksjon med, og den antar vi ikke man skal kunne regne på kalkulator, kun i Jupyter notatbok.)

For pålitelighet av systemer, kjenne til en **seriekobling** og en **parallellkobling** av komponenter, og hvordan man regner ut **pålitelighetsfunksjon** ved hjelp av formler, og ved å bruke Python med hjelp fra ferdiglaget kode i Jupyter notatbøker.

Informasjon

Informasjon om emnet

Arbeidskrav, pensum og
ressurserFagteam og
referansegruppe

Digital plenumstime

ISTA: Campus Ålesund

ISTG: Campus Gjøvik

ISTT1001/3: Campus
TrondheimISTT1002: Campus
Trondheim

Undervisning og øvinger

Fellesmodul

STACK-øvinger

Python/Jupyter

Digitalt forum

Eksamen

Informasjon om eksamen

Formelark og tabeller

Tidligere
eksamensoppgaverPrøveeksamen og
eksamensforberedelser

Formelark

Uke 5

Poissonfordeling

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t},$$

$$\text{for } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda t, \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

Ekspontialfordeling

$$T \sim \text{Ekspontial}(\lambda)$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{for } t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Weibullfordeling

$$T \sim \text{Weibull}(\alpha, \lambda)$$

$$f(t) = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha}, \quad \text{for } t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$$

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} (\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})^2)$$

NYTT på pensum i år

4.2 Begreper fra levetidsanalyse

Pålitelighetsfunksjon

$$R(t) = 1 - F(t)$$

Sviktrate

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Systempålitelighet seriekobling

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t)$$

Systempålitelighet parallellkobling

$$R(t) = 1 - F_1(t) \cdot F_2(t) \cdots F_n(t)$$

Feil: på videoen er minus i eksponent Weibull $R(t)$ inne i parentes

Læringsmål uke 3

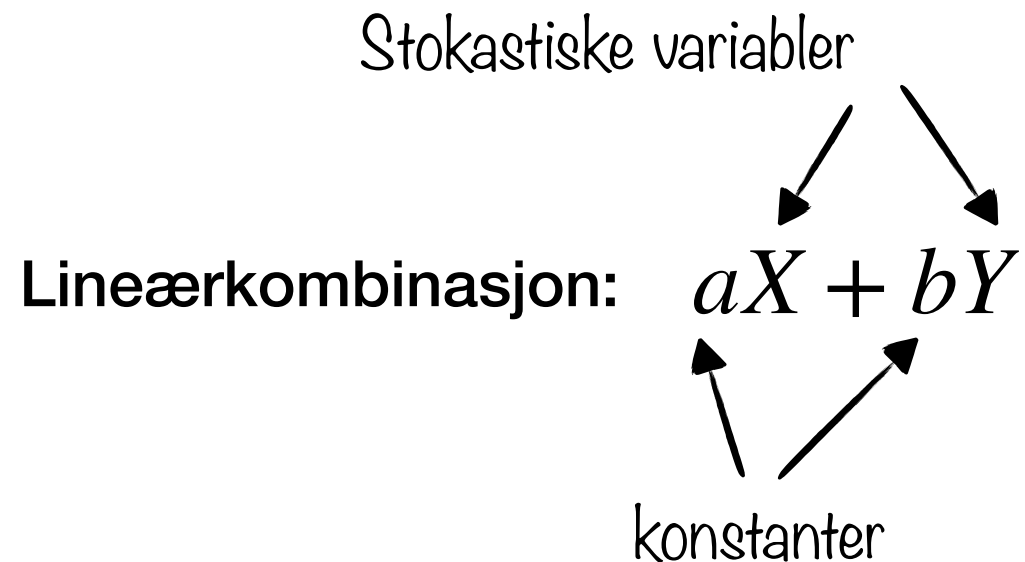
Bruke **regneregler** for **forventningsverdi** til å regne ut forventningsverdi til **lineærkombinasjoner av stokastiske variabler** (både avhengige og uavhengige variabler).

Bruke **regneregler** for **varians** til å beregne variansen til en **lineærkombinasjon** av uavhengige stokastiske variabler, og deretter beregne standardavviket til den samme transformasjonen.

Bruke regneregler for varians og kovarians til å beregne variansen til lineærkombinasjoner av stokastiske variabler (for eksempel en **sum** eller **differansen av to avhengige stokastiske variabler**), og deretter beregne standardavviket til den samme transformasjonen.

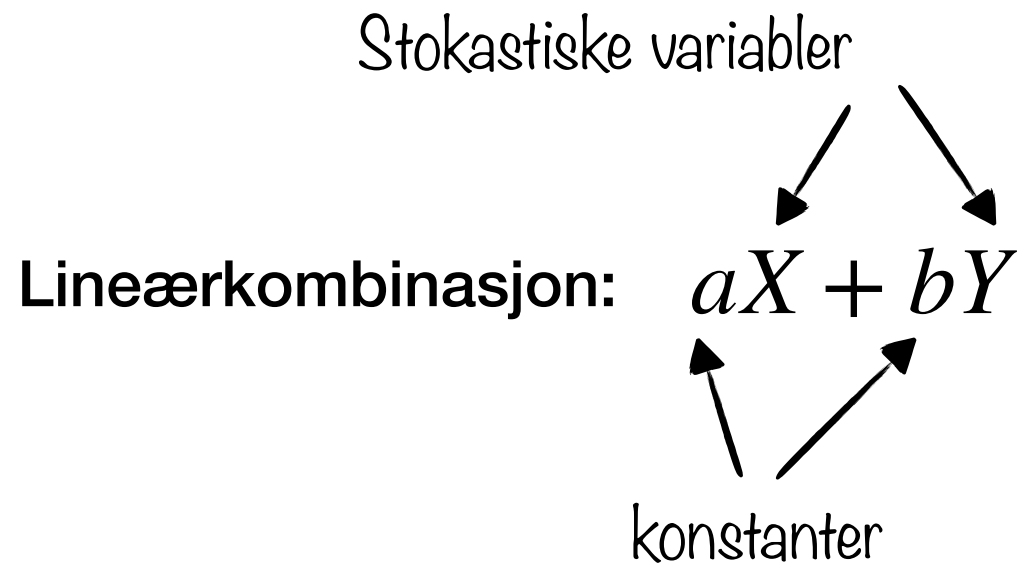
Over til Mentimeter

Regneregler for forventning og varians



$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Regneregler for forventning og varians



$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab \cdot Cov(X, Y)$$

Differanse:

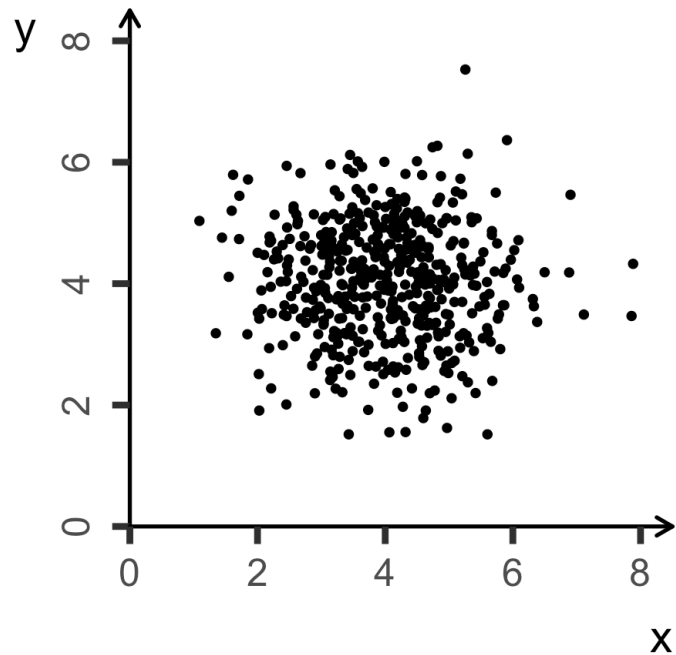
$$X - Y \quad Var(X - Y) = 1^2 \cdot Var(X) + (-1)^2 \cdot Var(Y) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot Cov(X, Y)$$

$$a = 1 \quad b = -1$$

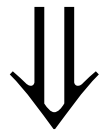
$$= Var(X) + Var(Y) - 2 \cdot Cov(X, Y)$$

$$= 0 \text{ når } Cov(X, Y) = 0$$

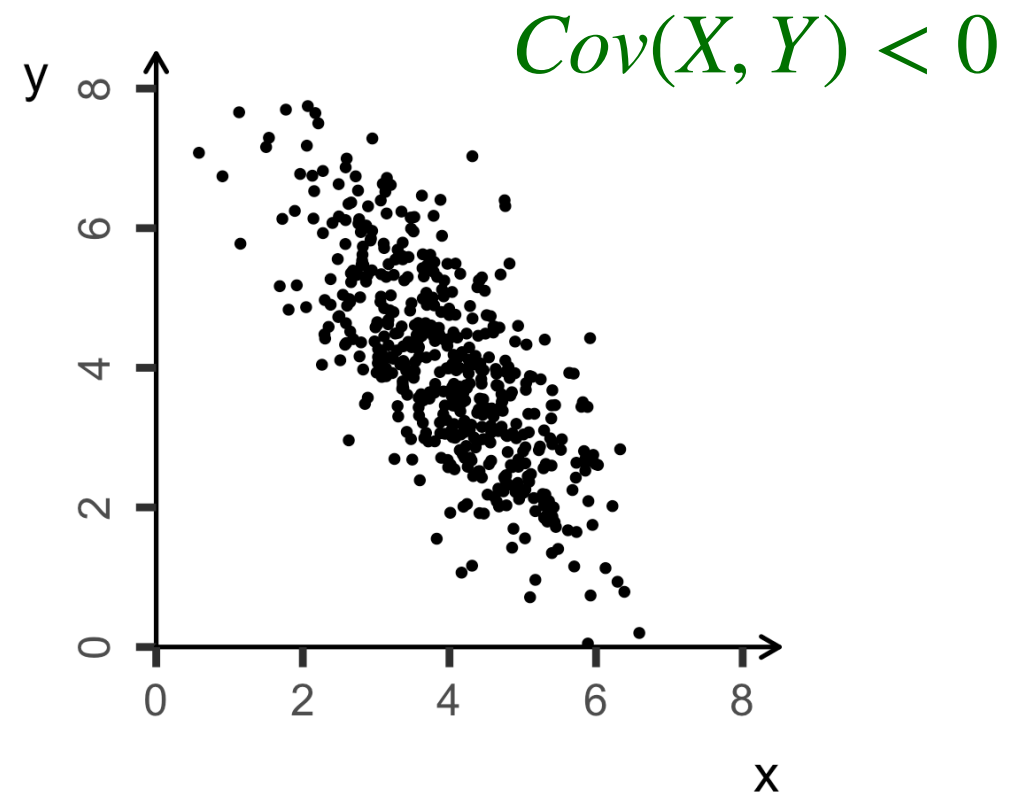
Uafhængighed og kovarians



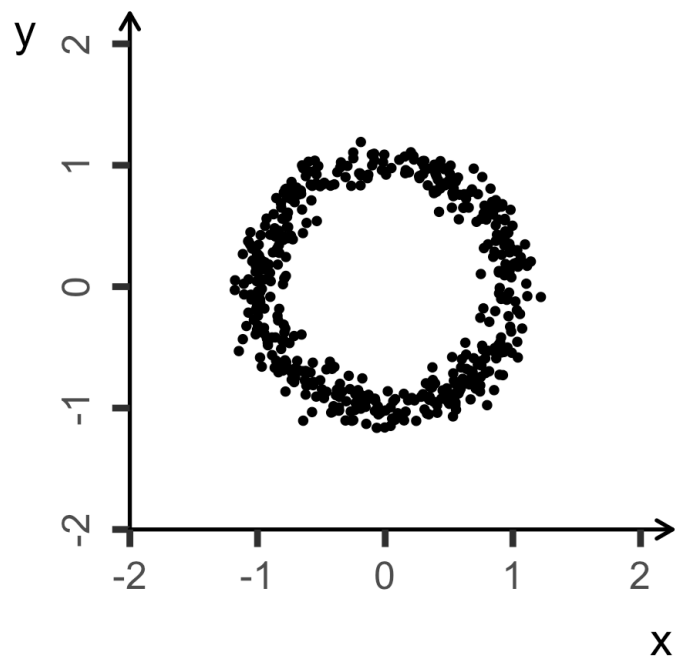
Uafhængige



$$Cov(X, Y) = 0$$



$$Cov(X, Y) < 0$$



Avhengige

$$Cov(X, Y) = 0$$



Uafhængige

3.4 Regneregler

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$$

Hva med flere enn to stokastiske variabler?

La $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ være uavhengige med samme forventningsverdi μ og samme varians σ^2 , da er

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu = n\mu \quad \text{og} \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n\sigma^2$$

Læringsressurser fra søsteremnet

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Dette emnet har et mer teoretisk fokus enn vårt emne, og pensum er litt annenledes fordi det kun er en felles del og mindre bruk av bereninger

Savner du mer teori? Det kan du finne på emnets temasider eller introduksjon- og temavidoer.

Lenke til temasidene: <https://tma4245.math.ntnu.no/>

Lenke til videoer: [Videolenke](#)

Informasjon

Informasjon om emnet

Arbeidskrav, pensum og
ressurser

Fagteam og
referansegruppe

Digital plenumstime

ISTA: Campus Ålesund

ISTG: Campus Gjøvik

ISTT1001/3: Campus
Trondheim

ISTT1002: Campus
Trondheim

Undervisning og øvinger

Fellesmodul

STACK-øvinger

Python/Jupyter

Digitalt forum

Eksamen

Informasjon om eksamen

Formelark og tabeller

Tidligere
eksamensoppgaver

Prøveeksamen og
eksamensforberedelser

STACK-øving



Siebe van Albada

Ålesund

STACK

på stack.math.ntnu.no!

Antall studenter som har godkjent

øving 1: 1065

øving 2: 1039

øving 3: 1015

Spørsmål fra chat



Takk for i dag - ha en produktiv uke!