1 2 3

ISTT100y

Uke 3:
Stokastiske variabler

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

1 2 3

ISTT100y uke 3

Stokastiske variabler

	Mandag 15:15-16:00	Tirsdag 14:15-16:00	Torsdag 14:15-16:00	Fredag 23:59
temavideoer (ca 3 x 10 min)	digital plenumstime	**campus-forelesning**	øvings-veiledning	frist obligatorisk øving 2

1: Diskrete variabler

2: Kontinuerlige var.

3: Simultanfordeling

Repetisjon / oppvarming

Terningkast

Hva er det stokastiske forsøket, hva er en passende definisjon av en stokastisk variabel og hvilke egenskaper har den?

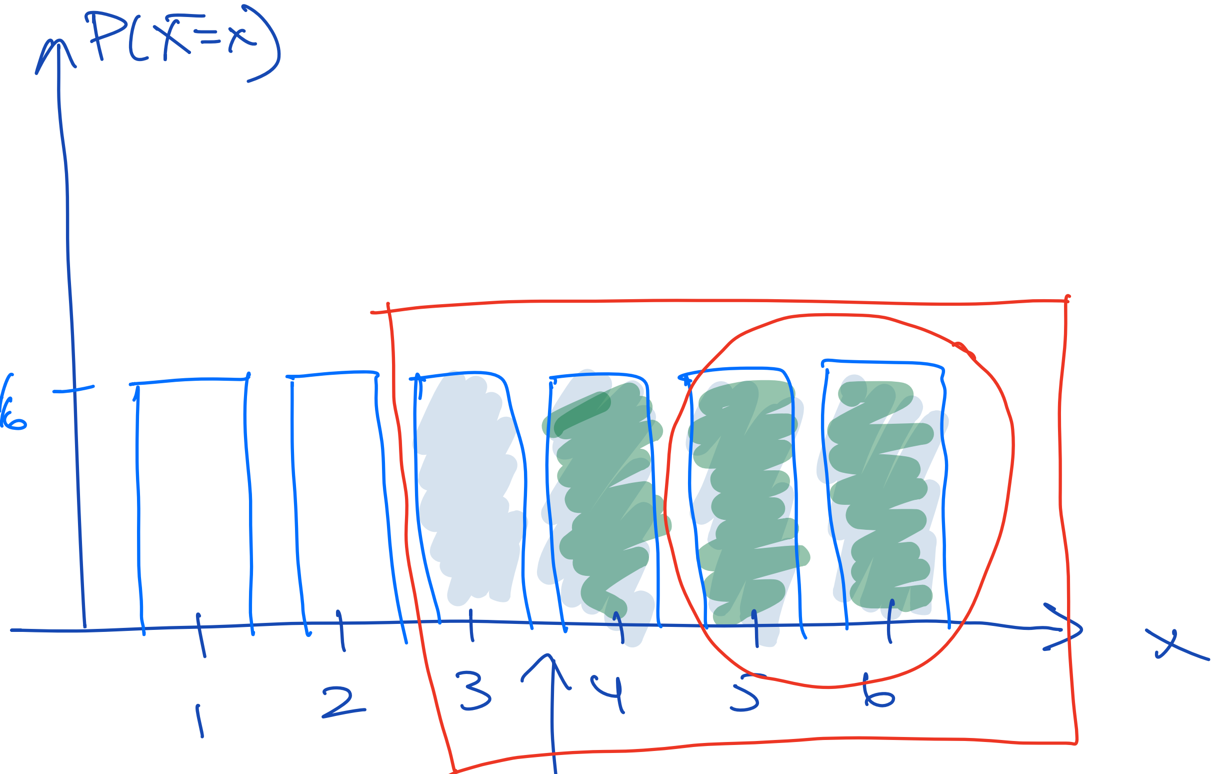
Stokastisk forsøk: kaste en terning

Stokastisk variabel X

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{utfall}}}{X(\boxed{\cdot})} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tall på tallinja}}}{1}$$

X kan ta verdiene $1, 2, 3, 4, 5, 6$

$P(X = x) = 1/6$ for alle $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Forventningsverdi

$E(X)$

$E(X) = 3{,}5$

Kumulative sannsynligheter:

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$

$= 4/6$

$P(X > 3) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$

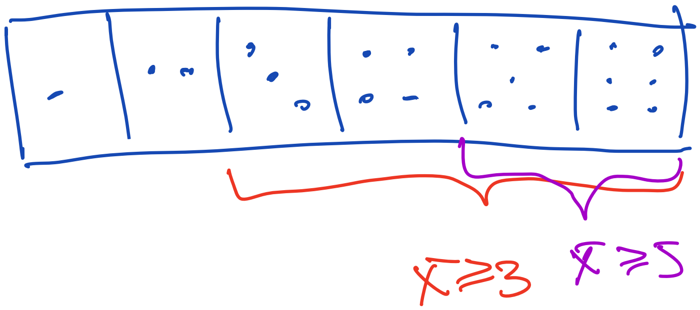
$= 3/6$

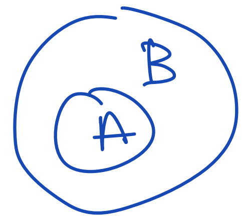
$$P(X \geq 5 \mid X \geq 3) = \frac{P(X \geq 5 \cap X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X \geq 5)}{P(X \geq 3)}$$

$$= \frac{2/6}{4/6} = 2/4 = 0.5$$

NB $\quad \bar{X} \geq 5 \cap \bar{X} \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \bar{X} \geq 5$

Tenk venndiagram





$A \cap B = A$

Oppgave 1

Terningspill: partall gir 2 poeng mens oddetall gir -1 poeng. Terningen kastes to ganger og poengene summeres.

Hva er det stokastiske forsøket, hva er en passende definisjon av en stokastisk variabel og hvilke egenskaper har den?

Stokastisk forsøk: kaste terning to ganger

Stokastisk variabel Y: poengsum etter to kast

Y(⚀ ⚂) = -2

Y(⚁ ⚃) = 4

Verdimengde?

$\{-2, \quad 1, \quad 4\}$

to odde-tall

ett oddetall, ett partall

to partall

$P(Y=-2) = 9/36 = \underline{1/4}$

mulige $= 6 \cdot 6 = 36$

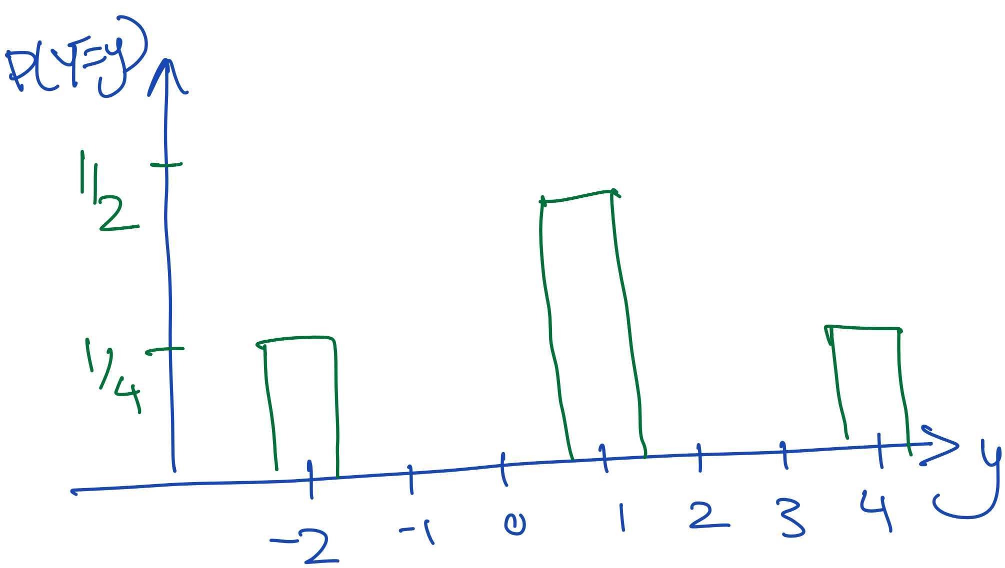
gunstige $= 3 \cdot 3 = 9$

$P(Y=1) = \frac{18}{36} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

mulige $= 36$

gunstige $= 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$

$P(Y=4) = 9/36 = 1/4$



NB: Symmetrisk fordeling

$\downarrow$

$E(Y) = 1$

$E(Y) =$

$-2 \cdot P(Y=-2) +$

$1 \cdot P(Y=1) +$

$4 \cdot P(Y=4)$

$$E(Y) = -2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4}$$

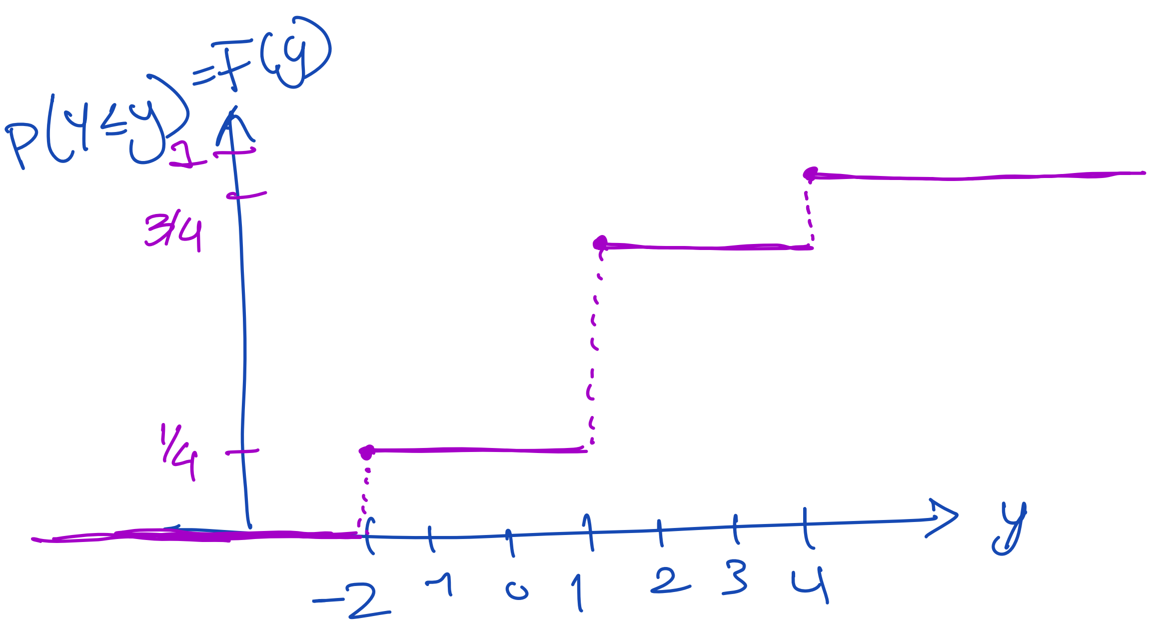
$$= -\frac{2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{4}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$= 0 + 1$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

- $P(Y \le -2) = P(Y=-2) = 1/4$
- $P(Y \le 1) = P(Y=-2) + P(Y=1) = 1/4 + \frac{1}{2} = 1/4 + 2/4 = \frac{3}{4}$
- $P(Y \le 4) = P(Y=-2) + P(Y=1) + P(Y=4) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$



"trappeform"

Oppgave 2

Kø: Tid i kø (i minutter) for en person som ankommer en kiosk på et tilfeldig tidspunkt mellom 12:00 og 12:15 kan modelleres med en kontinuerlig stokastisk variabel T som tar verdier i intervallet [0,∞) og har sannsynlighetstetthet

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2} \quad \text{for } t \geq 0}$$

$f(t) = 0$ for $t < 0$

- Hva er sannsynligheten for å stå minst ett minutt i kø?

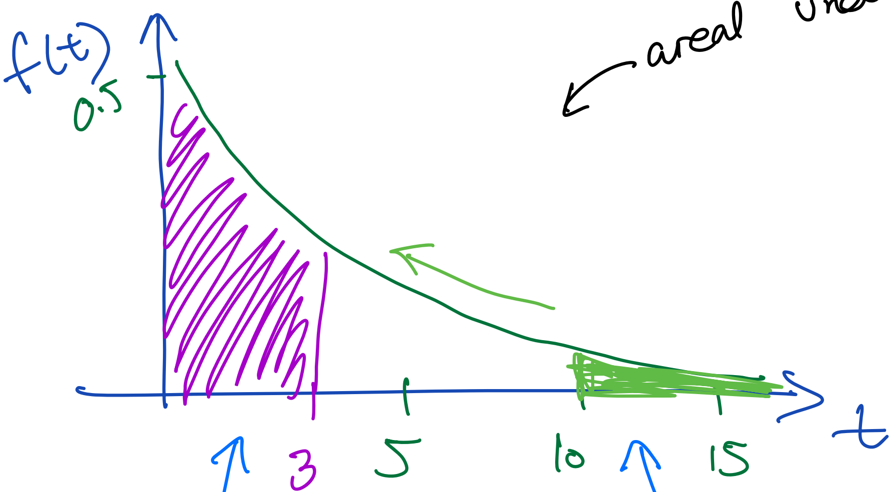
- Dersom en person allerede har stått i kø i ett minutt, hva er sannsynligheten for at personen må stå minst ett minutt til i køen?

OPPG. Tid i kø

T : Ventetid

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2} \qquad t \geq 0$$

Skisse



areal under kurven = 1

NB $f(t)$ er ikke en sannsynlighet! men, arealer under $f(t)$ er sannsynligheter

"vanlig" å vente i 2-3 minutter

"sjelden" at en må vente i mer enn 10 minutter

$$P(T \leq 3) = \int_0^3 f(t)\,dt$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{2} e^{-t/2}\,dt$$

$$= \left[-e^{-t/2}\right]_0^3 = -e^{-3/2} - (-e^{-0/2})$$

$$= 1 - e^{-3/2} \approx 0.78$$

$$P(T \geq 10) = 1 - P(T \leq 10)$$

$$= 1 - \int_0^{10} f(t)\,dt$$

$$P(T \leq t^*) = \int_0^{t^*} f(t)\, dt$$

NB!

$$\int_0^{t^*} \frac{1}{2} e^{-t/2}\, dt$$

1 def:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

$$\left[-e^{-t/2}\right]_0^{t^*} = \ldots = 1 - e^{-t^*/2}$$

$$P(T \geq 10) = 1 - P(T \leq 10)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-10/2}\right)$$

$$= e^{-10/2} \approx 0.007$$

Hva er forventet tid i kø?

$$E(T) = \int_0^\infty t f(t)\,dt$$

Def: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

$$= \int_0^\infty t \frac{1}{2} e^{-t/2}\,dt$$

$$= 2 \quad \text{(minutter)}$$

prøv selv! (notater på BB)

---

median?

Kan vi finne et tall m slik at

$$P(T \leq m) = 0.5$$

$$1 - e^{-m/2} = 0.5$$

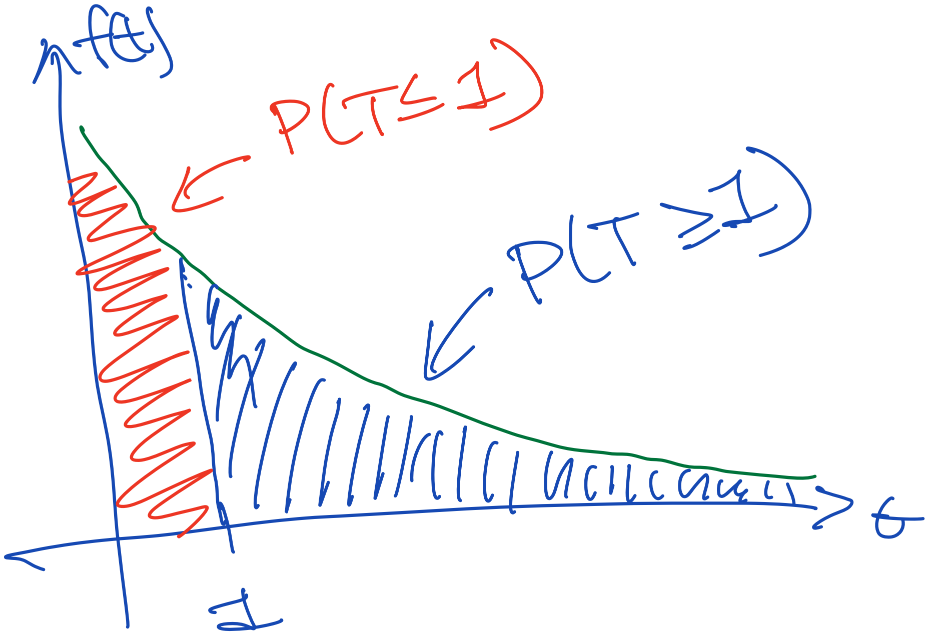
$$1 - 0.5 = e^{-m/2}$$

$$\ln(0.5) = -m/2$$

$$m = -2\ln(0.5)$$

$$\approx 1.39$$

$P(T \geq 1)$? minst ett minutt i kø?



$$P(T \geq 1) = 1 - P(T \leq 1)$$

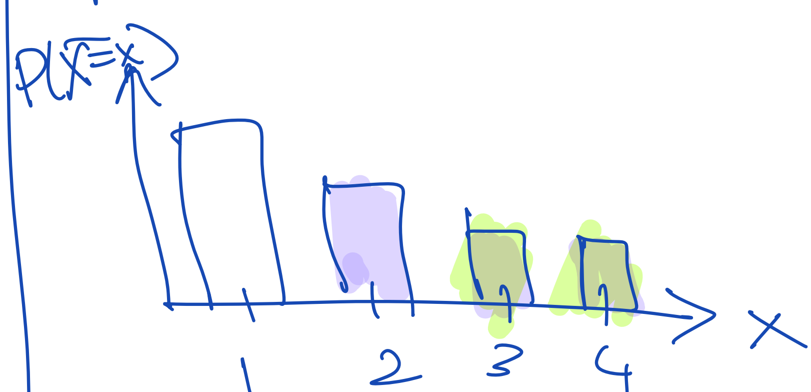
$>$ $\geq$ $<$ $\leq$ kontinuerlige variabler!

$$1 - (1 - e^{-1/2})$$

$$= e^{-1/2}$$

$$\approx 0.61$$

NB diskret



$P(X \geq 2)$

$P(X > 2)$

$$P(T \geq 2 \mid T \geq 1) =$$

$$\frac{P(T \geq 2 \cap T \geq 1)}{P(T \geq 1)} = \frac{P(T \geq 2)}{P(T \geq 1)}$$

$$= \frac{e^{-2/2}}{e^{-1/2}} = e^{-1/2} \approx 0.61$$

T har en såkalt hukommelsesløs fordeling

Oppgave 3

La X og Y være diskrete stokastiske variabler med simultane punktsannsynligheter P(X=x,Y=y):

x\y	y = 0	y = 1	y = 2
x = 0	0.1	0.25	0.15
x = 1	0.06	0.15	0.09
x = 2	0.04	0.1	0.06

X tar verdiene 0, 1, 2

Y tar verdiene 0, 1, 2

utfall : (0,0) (0,1) osv

→ 9 utfall

a) Finn $P(X = 1)$ og $P(X > Y)$.

b) Finn marginale punktsannsynligheter for X og Y.

c) Er X og Y uavhengige?

$P(X=1) = P\big((X=1,Y=0) \cup (X=1,Y=1) \cup (X=2... $

$P(X=1) = P\big((X=1,Y=0) \cup (X=1,Y=1) \cup (X=1,Y=2)\big)$

$= P(X=1,Y=0) + P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=2)$

$= 0.3$

$P(X>Y) =$
$0.06 +$
$0.04 +$
$0.1 = \underline{0.2}$

$P(X=0)=0.5$

$P(X=1)=0.3$

$P(X=2)=0.2$

$\overline{\quad\quad 1 \quad\quad}$

↑ marginalfordeling X

$P(Y=0)=0.2$

$P(Y=1)=0.5$

$P(Y=2)=0.3$

$\overline{\quad\quad 1 \quad\quad}$

↑ marginalfordeling til Y

Er X og Y uavhengige?

Repetisjon: A, B uavhengige dersom $P(A|B)=P(A)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

Sjekk om $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$

↑ $\cap$ "og"

↑ sjekk for alle (x,y)

$P(X=0, Y=0) = 0.1$

$P(X=0) = 0.5$ $\quad P(Y=0) = 0.2$

$P(X=0)P(Y=0) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$ ok

må sjekke 8 ganger til

⋮

Ja, X og Y er uavhengige.

$$P(X=1 \mid Y\leq 1) \overset{\text{uavh.}}{=} P(X=1) = 0.3$$

$$P(X=1 \mid Y\leq 1) = \frac{P(X=1 \cap Y\leq 1)}{P(Y\leq 1)}$$

$$= \frac{0.06+0.15}{0.2+0.5}$$

$$= \frac{0.21}{0.7} = \underline{\underline{0.3}} \quad \checkmark$$