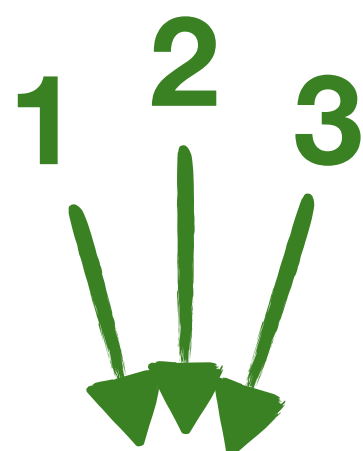




ISTT100y

Uke 4:

Binomisk forsøksrekke, binomisk og geometrisk fordeling

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Husk 1!

I uke 4 og 5 må dere gjøre
øvingsoppgaver OG
forberedende gruppeprosjekt

Husk 2!

Referansegruppemøte denne uka!
Vi vil ha flere deltakere
(vi har fra fornybar og data)

Agenda i dag:

- Del 1: "self-testing"
 - Individuelt: 5 regneoppgaver fra uke 3 (ca 15 min)
 - Oppgavene besvares i microsoft forms (anonymt!)
Hvis du blir tidlig ferdig kan du jobbe videre med ekstra-oppgave (på slide)
 - Diskusjon med naboen (5 min)
 - Gjennomgang av de vanskeligste oppgavene
- Del 2: Tema for uke 4
 - Vi jobber med binomisk og geometrisk fordeling

Test deg selv!

Quiz 1 uke 4



<https://forms.office.com/e/rnBdA7TfzL>

Ekstra-oppgave for de som har tid:

Oppgave 2: Simultanfordeling

Tabellen viser simultanfordelingen til to stokastiske variabler X og Y , $P(X = x, Y = y)$. Vi kan for eksempel lese ut at $P(X = 3, Y = 1) = 0.3$.

x / y	$y = 1$	$y = 2$
$x = 1$	0.2	0.1
$x = 2$	0.1	0.2
$x = 3$	0.3	0.1

Fra denne simultanfordelingen kan man for eksempel regne ut marginalfordelingen til variablen X som blir

$P(X = 1) = 0.3$, $P(X = 2) = 0.3$, og $P(X=3) = 0.4$.

a) Hva blir marginalfordelingen til Y ?

b) Hva blir $E(X)$?

c) Hva blir $P(Y = 2 \mid X < 3)$?

Oppgavetekst:

<https://www.math.ntnu.no/emner/ISTx100y/eksamen/ISTx100yEksamenK23.pdf>

Løsningsforslag:

<https://www.math.ntnu.no/emner/ISTx100y/eksamen/ISTx100yLFK23.pdf>

Agenda i dag:

- Del 1: "self-testing"
- Individuelt: 5 regneoppgaver om forventning og varians
 - Oppgavene besvares i microsoft forms (anonymt)
 - Når du er ferdig kan du jobbe videre med øvingene
- **Diskusjon med naboen (5 min)**
- Gjennomgang av de vanskeligste oppgavene
- Del 2: Tema for uke 4
- Vi jobber med binomisk og geometrisk fordeling

Ekstraoppgave for de som har tid:

Oppgave 2: Simultanfordeling

Tabellen viser simultanfordelingen til to stokastiske variabler X og Y , $P(X = x, Y = y)$. Vi kan for eksempel lese ut at $P(X = 3, Y = 1) = 0.3$.

x / y	$y = 1$	$y = 2$
$x = 1$	0.2	0.1
$x = 2$	0.1	0.2
$x = 3$	0.3	0.1

Fra denne simultanfordelingen kan man for eksempel regne ut marginalfordelingen til variablen X som blir

$P(X = 1) = 0.3$, $P(X = 2) = 0.3$, og $P(X=3) = 0.4$.

a) Hva blir marginalfordelingen til Y ?

b) Hva blir $E(X)$?

c) Hva blir $P(Y = 2 \mid X < 3)$?

Oppgavetekst:

<https://www.math.ntnu.no/emner/ISTx100y/eksamen/ISTx100yEksamenK23.pdf>

Løsningsforslag:

<https://www.math.ntnu.no/emner/ISTx100y/eksamen/ISTx100yLFK23.pdf>

Agenda i dag:

- Del 1: "self-testing"
 - Individuelt: 5 regneoppgaver om forventning og varians (10 min)
 - Oppgavene besvares i microsoft forms (anonymt!)
Når du er ferdig kan du jobbe videre med øving eller ekstra-oppgave (på slide)
 - **Diskusjon med naboen (5 min)**
 - Gjennomgang av de vanskeligste oppgavene
- **Del 2: Tema for uke 4**
 - Vi jobber med binomisk og geometrisk fordeling

Binomisk forsøksrekke

- Et forsøk kan ende i "suksess" eller "ikke-suksess" ("fiasko")
- $P(\text{"suksess"}) = p$ i alle slike forsøk
- Uavhengige forsøk

Hvor mange suksesser får vi
dersom vi gjør n forsøk?



Binomisk fordeling

Hvor mange forsøk må vi
gjøre for å få en suksess?



Geometrisk fordeling

Binomisk forsøksrekke

Oppgave 1: Flervalgsprøve

En flervalgsprøve består av ti spørsmål som hver har fem svaralternativer, der kun ett alternativ er riktig. Man stryker om man har færre enn fire riktige svar.

Mål: Finne sannsynligheten for å bestå/stryke dersom man ikke har peiling og bare gjetter vilt.

- a) Beskriv den binomiske forsøksrekka
- b) Dersom X representerer antall riktige gjetninger, hvilken fordeling har X? Geometrisk eller binomisk?
- c) Hva er sannsynligheten for å få akkurat 4 poeng?
- d) Hva er sannsynligheten for å stryke, $P(X < 4)$?
- e) Vi vet at en student har minst to riktige svar, hva er sannsynligheten for studenten ikke stryker?

Binomisk fordeling

$$X \sim \text{Binom}(n, p)$$
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

for $x = 0, 1, 2, \dots, n$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

BINOMISK FORDELING: $P(X \leq x)$												
<i>n</i>	<i>x</i>	<i>p</i>										
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
9	0	0.630	0.387	0.232	0.134	0.075	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000
	1	0.929	0.775	0.599	0.436	0.300	0.196	0.071	0.020	0.004	0.000	0.000
	2	0.992	0.947	0.859	0.738	0.601	0.463	0.232	0.090	0.025	0.004	0.000
	3	0.999	0.992	0.966	0.914	0.834	0.730	0.483	0.254	0.099	0.025	0.003
	4	1.000	0.999	0.994	0.980	0.951	0.901	0.733	0.500	0.267	0.099	0.020
	5	1.000	1.000	0.999	0.997	0.990	0.975	0.901	0.746	0.517	0.270	0.086
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.975	0.910	0.768	0.537	0.262
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.929	0.804	0.564
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.960	0.866
10	0	0.599	0.349	0.197	0.107	0.056	0.028	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
	1	0.914	0.736	0.544	0.376	0.244	0.149	0.046	0.011	0.002	0.000	0.000
	2	0.988	0.930	0.820	0.678	0.526	0.383	0.167	0.055	0.012	0.002	0.000
	3	0.999	0.987	0.950	0.879	0.776	0.650	0.382	0.172	0.055	0.011	0.001
	4	1.000	0.998	0.990	0.967	0.922	0.850	0.633	0.377	0.166	0.047	0.006
	5	1.000	1.000	0.999	0.994	0.980	0.953	0.834	0.623	0.367	0.150	0.033
	6	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.121
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.988	0.945	0.833	0.617	0.322
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	0.954	0.851	0.624
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.972	0.893

Binomisk forsøksrekke

Oppgave 2: Terningspill

Vi kaster en terning flere ganger, og er kun interessert i enere.

- a) Beskriv den binomiske forsøksrekka
- b) Hva er sannsynligheten for å få første ener på fjerde kast?
- c) Hva er sannsynligheten for å få første ener på et av de første fire kastene?

Geometrisk fordeling

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1},$$

for $x = 1, 2, \dots$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1 - p)^x$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Binomisk forsøksrekke

Oppgave 3: Overbooking

Et Boeing 747 har 243 seter, og det typiske er at omtrent syv prosent av passasjerene ikke bruker billetten sin. Derfor er det vanlig å overbooke fly. Vi antar en binomisk forsøksrekke der sannsynligheten for at en vilkårlig passasjer ikke bruker billetten sin er 0.07.

- Hvor stor er sannsynligheten for å få med alle som møter opp dersom en booker 255 passasjerer på flyvningen?
- Hvor stor overbooking kan tillates dersom det skal være minst 99 prosent sjanse for å få med alle som møter opp?

```
from scipy import stats # statistikk-modulen i scipy-pakken
import matplotlib.pyplot as plt # plotting
```

```
stats.binom.cdf(243,255,0.93) #  $P(X \leq x)$ 
```

```
0.9475703113514298
```

```
# hva skal n være?
```

```
stats.binom.cdf(243,250,0.93) #  $P(X \leq x)$ 
```

```
0.9988997543363348
```

```
stats.binom.cdf(243,251,0.93) #  $P(X \leq x)$ 
```

```
0.9970296139955891
```

```
stats.binom.cdf(243,252,0.93) #  $P(X \leq x)$ 
```

```
0.9929223182722262
```

```
stats.binom.cdf(243,253,0.93) #  $P(X \leq x)$ 
```

```
0.984872018654435
```