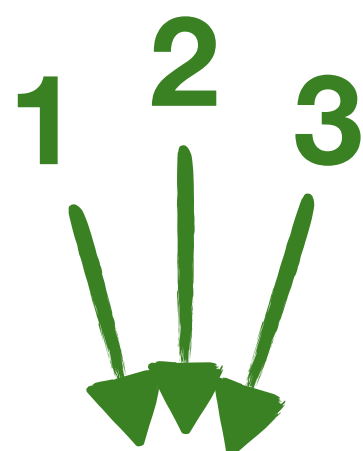


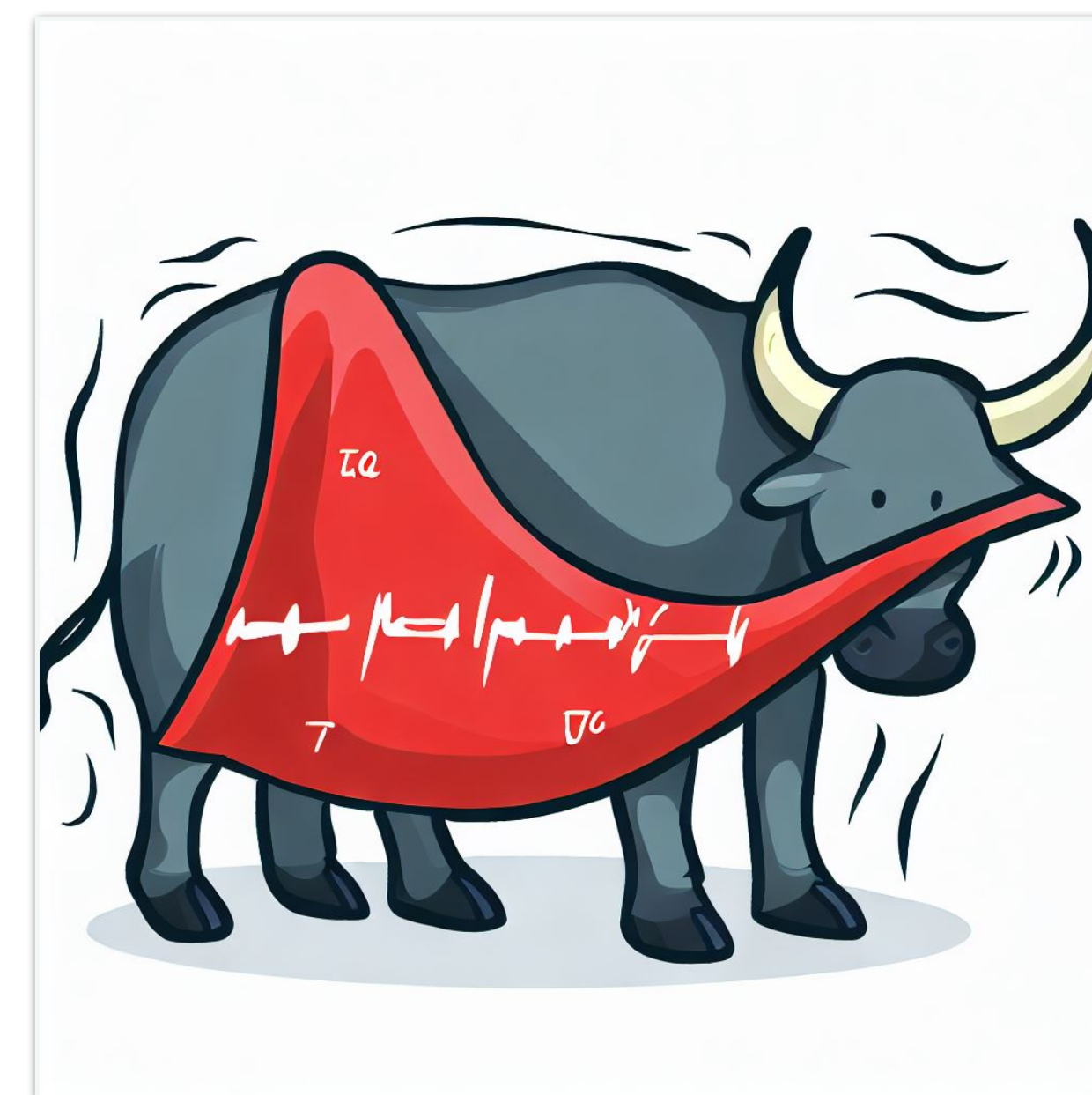


ISTT100y

Uke 5: Poissonprosess og levetidsfordelinger

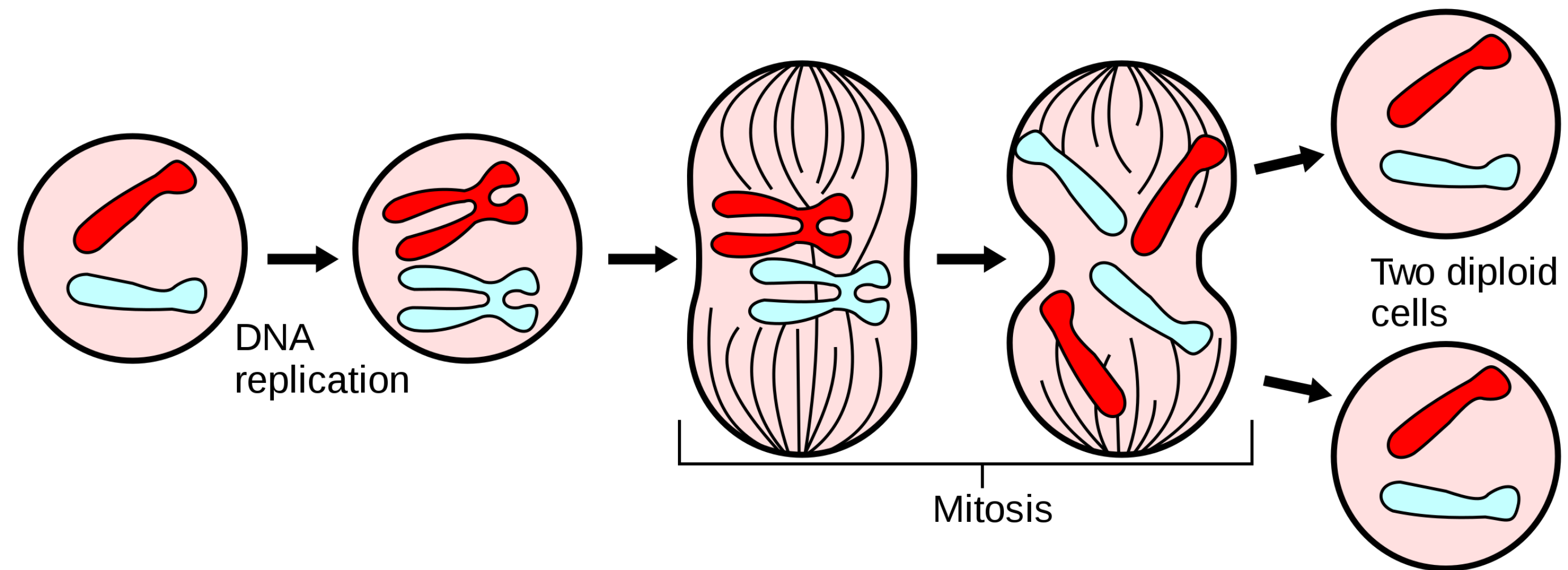
Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Husk!
Vi vil ha flere deltakere i referansegruppa
(vi har fra 1002 og 1003)



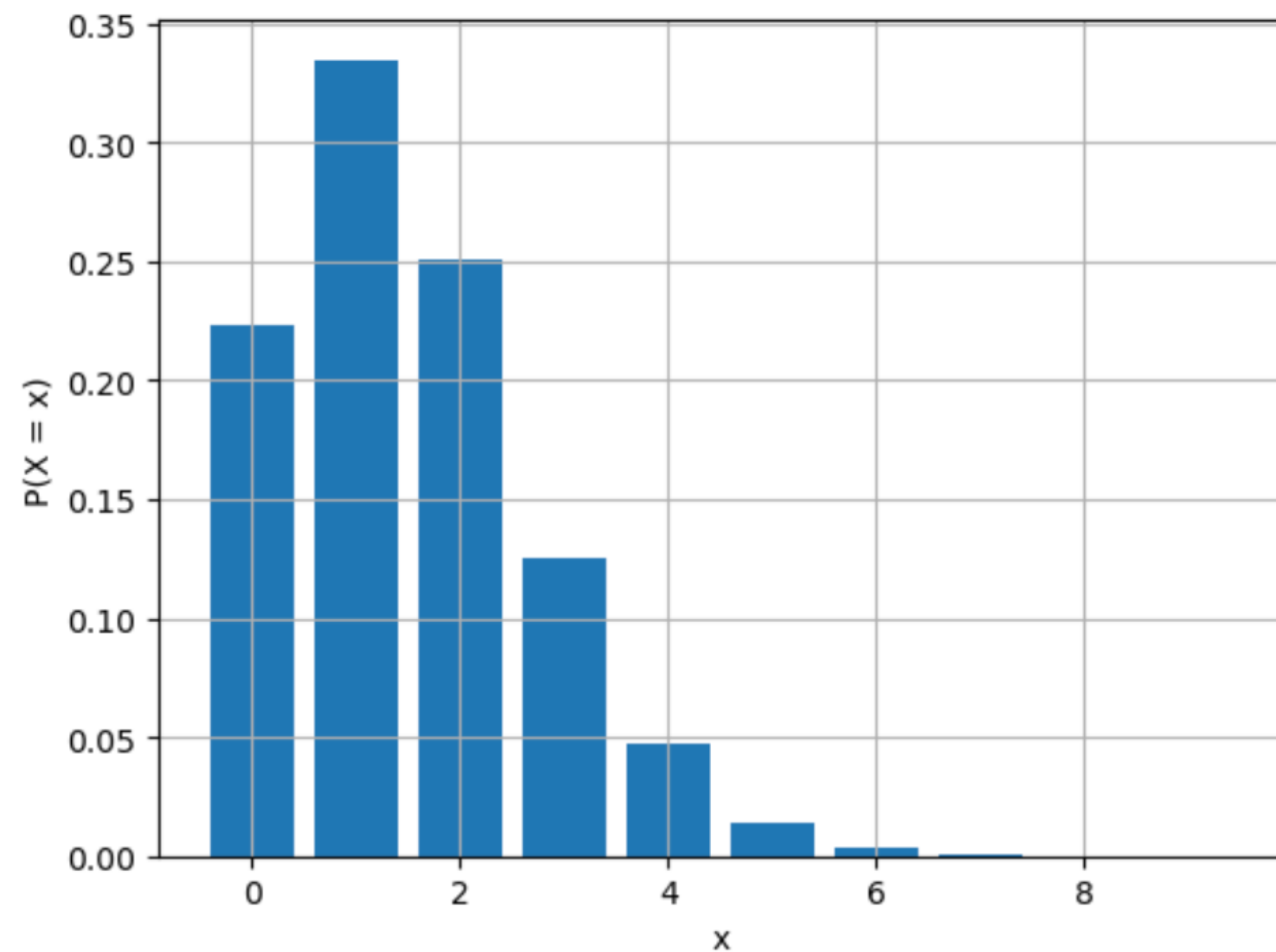
Microsoft Bing prompt:
"Weibull distribution, cartoon"

Eks: Celledeling

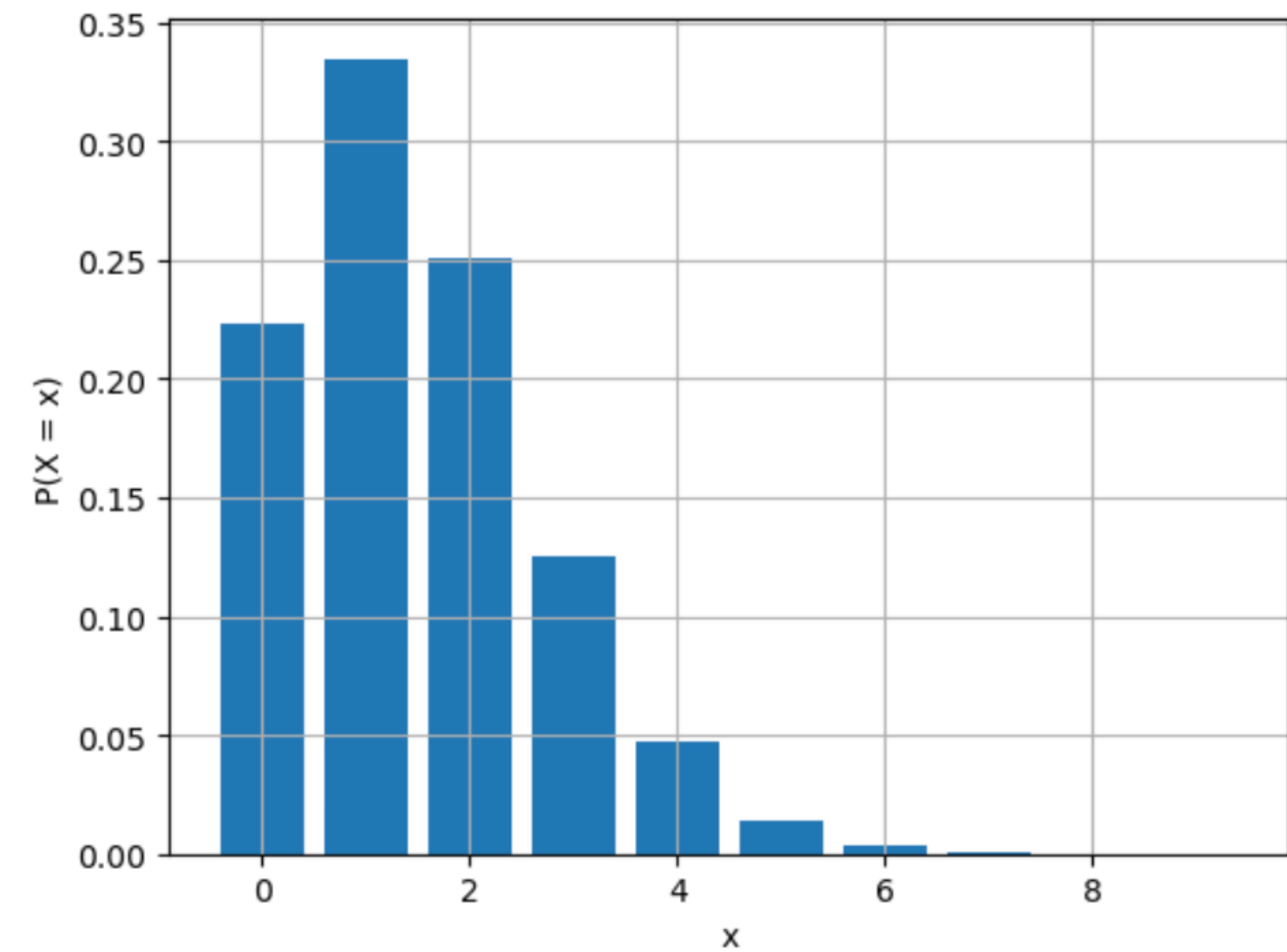


Eks: Celledeling

```
n_cell = 3*10**(9)
p_mutate = 5*10**(-10)
x_max = 10
plt.bar(range(0,x_max), stats.binom.pmf(range(0, x_max), n_cell,p_mutate))
plt.grid(); plt.ylabel("P(X = x)"); plt.xlabel("x")
plt.show()
```



```
: mu = n_cell*p_mutate
plt.bar(range(0,x_max), stats.poisson.pmf(range(0, x_max), mu))
plt.grid(); plt.ylabel("P(X = x)"); plt.xlabel("x")
plt.show()
```



Binomisk forsøksrekke

Binomisk fordeling:

Antall suksesser i n forsøk

Geometrisk fordeling:

Antall forsøk frem til og med første suksess

Poisson- prosess

Poissonfordeling:

Antall hendelser i et intervall av lengde t
(tid eller område)

Eksponentialfordeling:

Tid til første hendelse
(og tid mellom hendelser)

Er dette Poissonprosesser?

Eks 1 (tid):

Studenter som ankommer Rapido (kiosk Stripa) per minutt

Eks 2 (tid):

Hjerteinfarktpasienter per dag på St Olavs Hospital

Eks 3 (rom):

Bilulykker per km av E6

Oppgave 1

Antall mål i en fotballkamp kan antas å være poissonfordelt (se https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution). Forventet antall mål i en VM-kamp antas å være 2.5.

- a) Finn sannsynligheten for at det blir akkurat ett mål i en VM-kamp.
- b) Finn sannsynligheten for at det blir minst ett mål i en VM-kamp.

Poissonfordeling

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

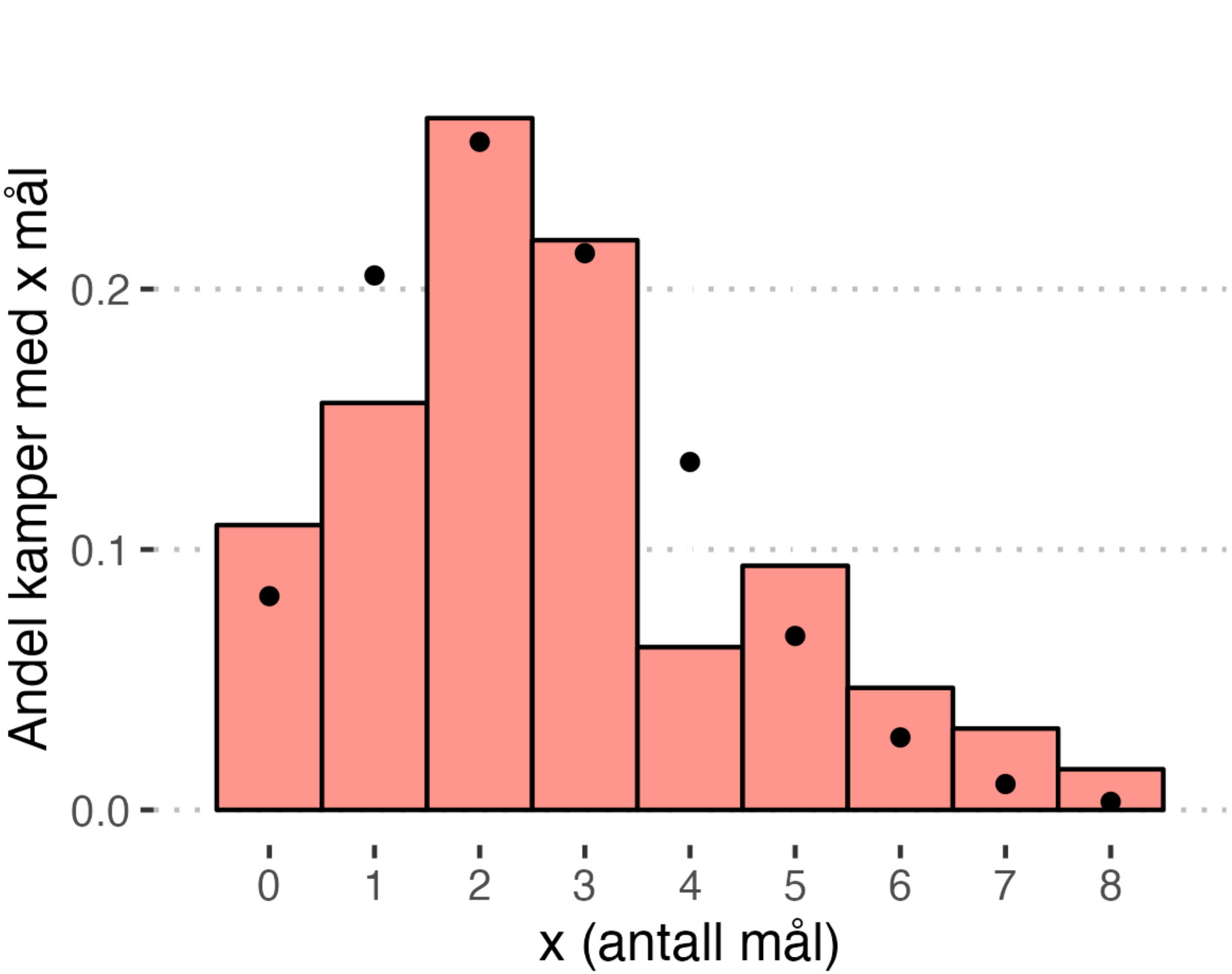
$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t},$$

$$\text{for } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda t, \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

VM 2022

64 kamper

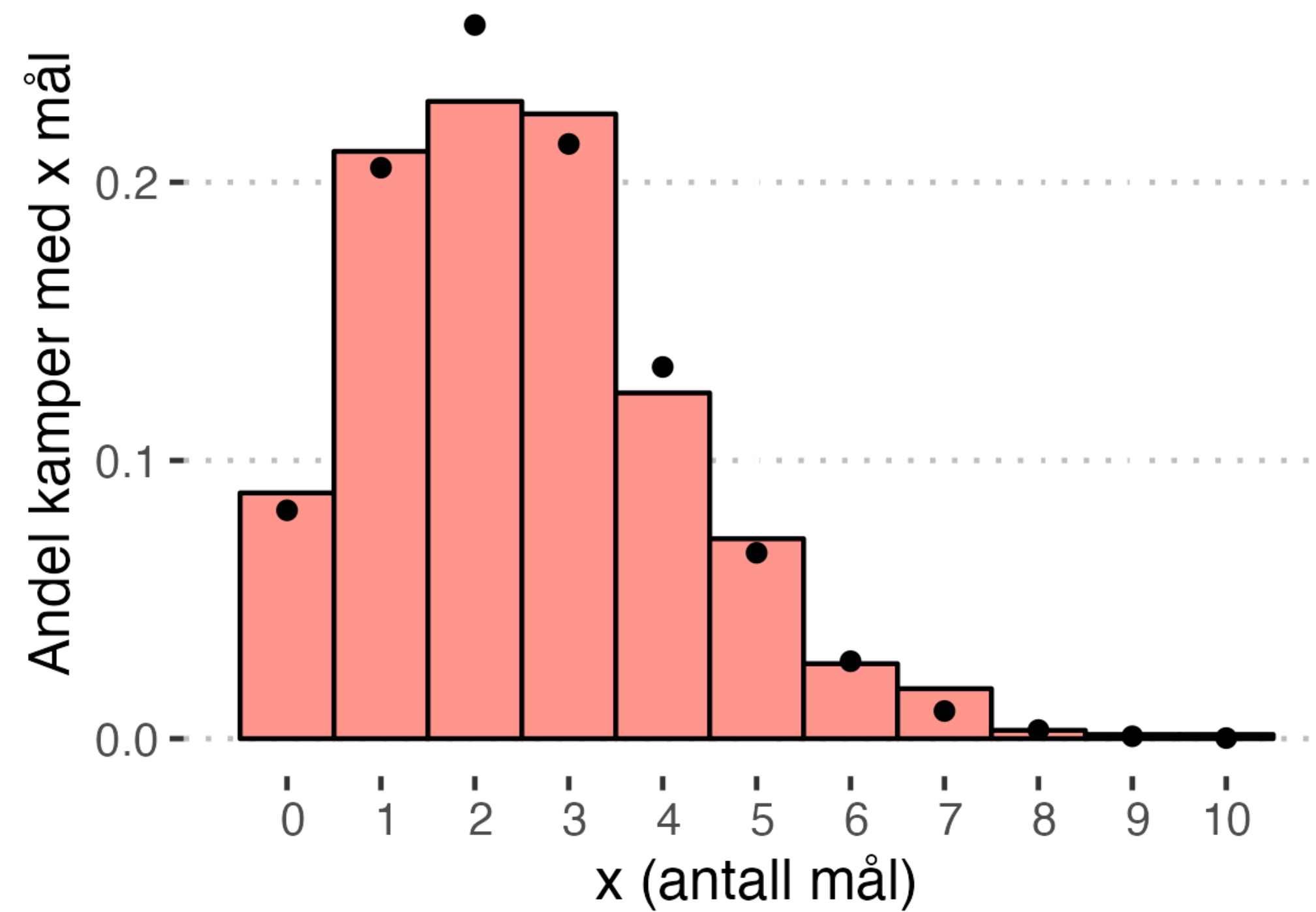


Gjennomsnitt: 2.6875

Lag 1	Lag 2	Mål 1	Mål 2	Total
QATAR	ECUADOR	0	2	2
ENGLAND	IRAN	6	2	8
SENEGAL	NETHERLANDS	0	2	2
ED STATES	WALES	1	1	2
ARGENTINA	SAUDI ARABIA	1	2	3
DENMARK	TUNISIA	0	0	0
MEXICO	POLAND	0	0	0
FRANCE	AUSTRALIA	4	1	5
MOROCCO	CROATIA	0	0	0
GERMANY	JAPAN	1	2	3
...	...	...	...	...

VM 1974-2022

732 kamper spilt



Gjennomsnitt: 2.540419

Oppgave 1 (forts)

Antall mål i en fotballkamp kan antas å være poissonfordelt (se https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution).

Forventet antall mål i en VM-kamp antas å være 2.5.

c) Hva blir forventet tid til første mål i en kamp?

Eksponentialfordeling

$$T \sim \text{Eksponential}(\lambda)$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{for } t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Oppgave 2 (kontinuasjonseksamen 2023)

Ved en ladestasjon for elektrisk tungtransport ankommer el-lastebiler ifølge en Poissonprosess med rate $\lambda = 3$ el-lastebiler per time.

Poissonfordeling

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t},$$

$$\text{for } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda t, \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

- a) Hva er sannsynligheten for at det i løpet av en time ankommer nøyaktig to el-lastebiler?
- b) Hva er sannsynligheten for at det i løpet av to timer ankommer mer enn fire el-lastebiler?

POISSONFORDELING: $P(X_t \leq x)$

x	λt						
	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5
0	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025	0.0015
1	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266	0.0174	0.0113
2	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884	0.0620	0.0430
3	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017	0.1512	0.1118
4	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575	0.2851	0.2237
5	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289	0.4457	0.3690
6	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860	0.6063	0.5265

Oppgave 2 (kontinuasjonseksamen 2023)

Ved en ladestasjon for elektrisk tungtransport ankommer el-lastebiler ifølge en Poissonprosess med rate $\lambda = 3$ el-lastebiler per time.

- a) Hva er sannsynligheten for at det i løpet av en time ankommer nøyaktig to el-lastebiler?
- b) Hva er sannsynligheten for at det i løpet av to timer ankommer mer enn fire el-lastebiler?
- c) Klokka 14.05 har det nettopp ankommet en el-lastebil til ladestasjonen. Hva er sannsynligheten for at den neste el-lastebilen ankommer i løpet av 30 minutter?

Poissonfordeling

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t},$$

for $x = 0, 1, 2, \dots$

$$E(X) = \lambda t, \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

Eksponentialfordeling

$$T \sim \text{Eksponential}(\lambda)$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{for } t > 0$$

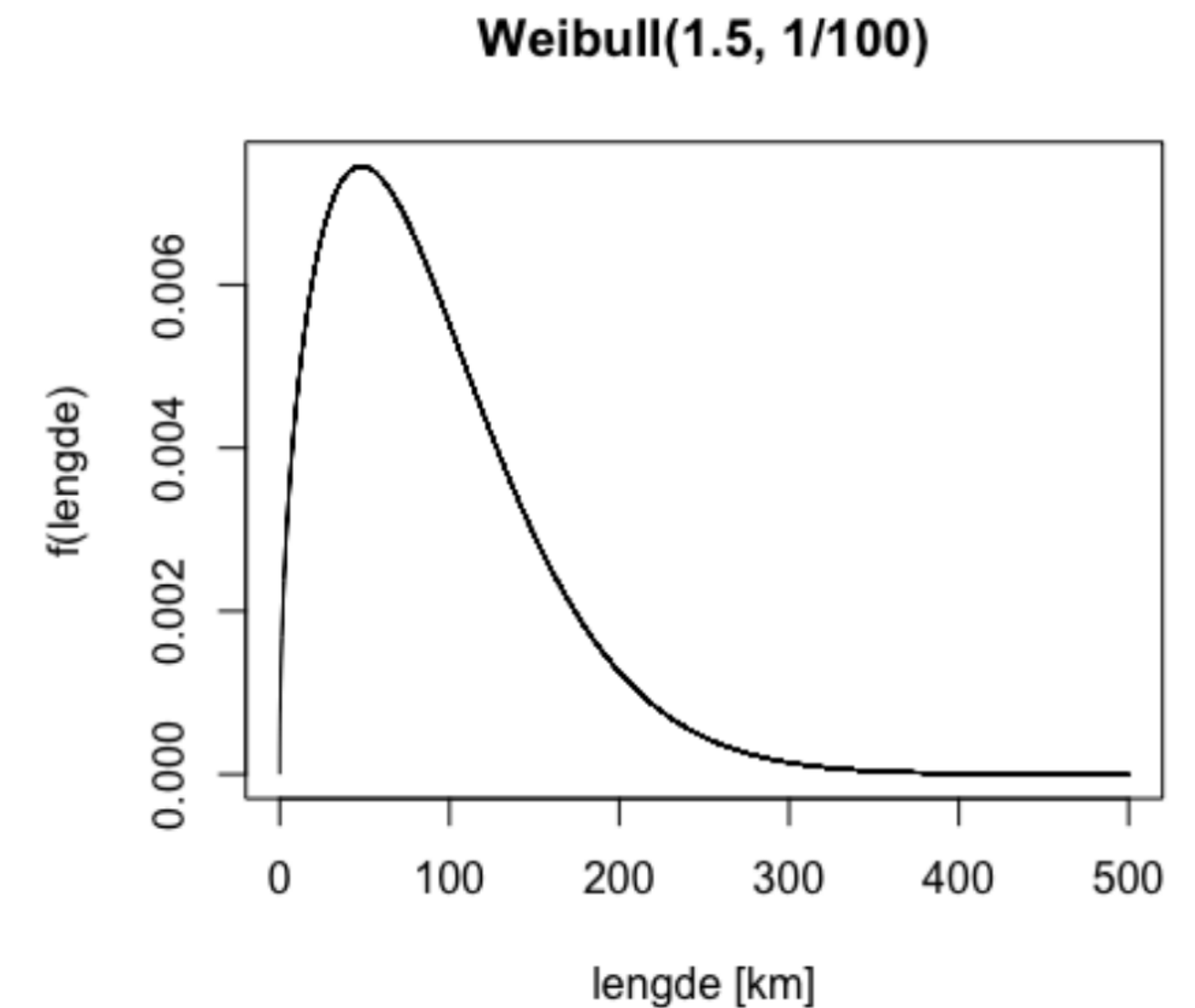
$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Oppgave 2 (kontinuasjonseksamen 2023)

Et transportfirma kjører el-lastebiler med en rekkevidde på 250 km. Firmaet vet av erfaring at på et tilfeldig valgt oppdrag er kjørelengden (distanse i km fra firmaets sentral og til leveringsstedet) Weibullfordelt med parametere $\alpha = 1.5$ og $\lambda = 1/100$.

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen til denne Weibullfordelingen er illustrert i figuren.



d) Hva er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt oppdrag har en kjørelengde på mer enn 200 km?

e) Hva er sannsynligheten for at et oppdrag kan fullføres (det vil si: kjøre fra firmaets sentral og til leveringsstedet - og tilbake igjen) uten lading? Du kan anta at el-lastebilen er fulladet når oppdraget starter.

Weibullfordeling

$$T \sim \text{Weibull}(\alpha, \lambda)$$

$$f(t) = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha}, \quad \text{for } t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$$

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} (\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})^2)$$

Oppgave 3 (kontinuasjonseksamen 2021)

Anders har nettopp kjøpt seg en brukt el-sykkel. Vi skal studere to typer feil som kan opptre på denne sykkelmodellen; feil med ladekabelen og feil med de elektroniske girene.

Anders antar at feil på ladekabelen kan modelleres som en poissonprosess med rate $\lambda_L = 0.5$ / år, og at feil med girene kan modelleres som en poissonprosess med rate $\lambda_G = 2$ / år. De to prosessene kan antas å være uavhengige.

b) Det koster 3000 kr for å reparere ladekabelen og 1000 kr for å reparere girene hver gang de feiler.

- i. Hvor mye må Anders forvente å betale for reparasjoner av disse i løpet av to år?
- ii. Og hva blir standardavviket i disse reparasjonskostnadene?

Poissonfordeling

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t},$$

for $x = 0, 1, 2, \dots$

$$E(X) = \lambda t, \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$