OPPG. 1

NB: populasjon

μ = førerens promille

populasjonsparameter som vi vil sjekke

$\sigma = 0{,}0044$ ← støy i måling av μ. ??

X : måling av promille

$X \sim N(\mu, \sigma = 0{,}044)$

pga $\sigma > 0$ kan vi ikke stole blindt på et måleresultat x.

a) $H_0: \mu \leq 0.2$ $H_1: \mu > 0.2$

Uskyldig inntil det motsatte er bevist

for høy promille

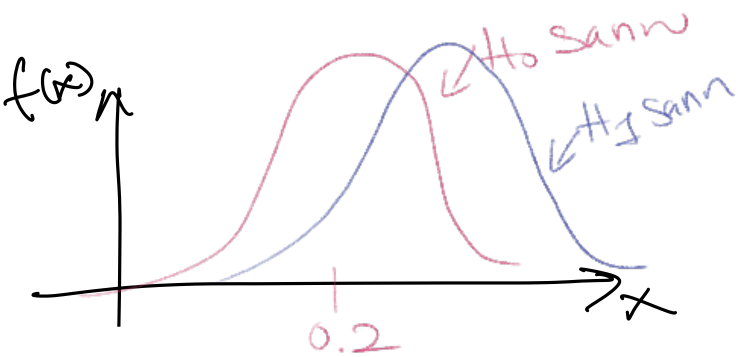
Vi skal tenke oss at bekymringen for å dømme en uskyldig er mye viktigere enn trafikk-sikkerhet....

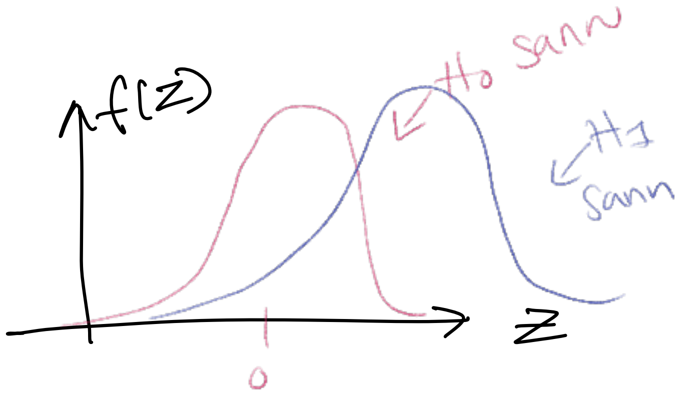
b) Testobservator:

X eller $Z = \frac{X - 0.2}{0{,}044}$

$H_0: X \sim N(0.2, 0.044)$

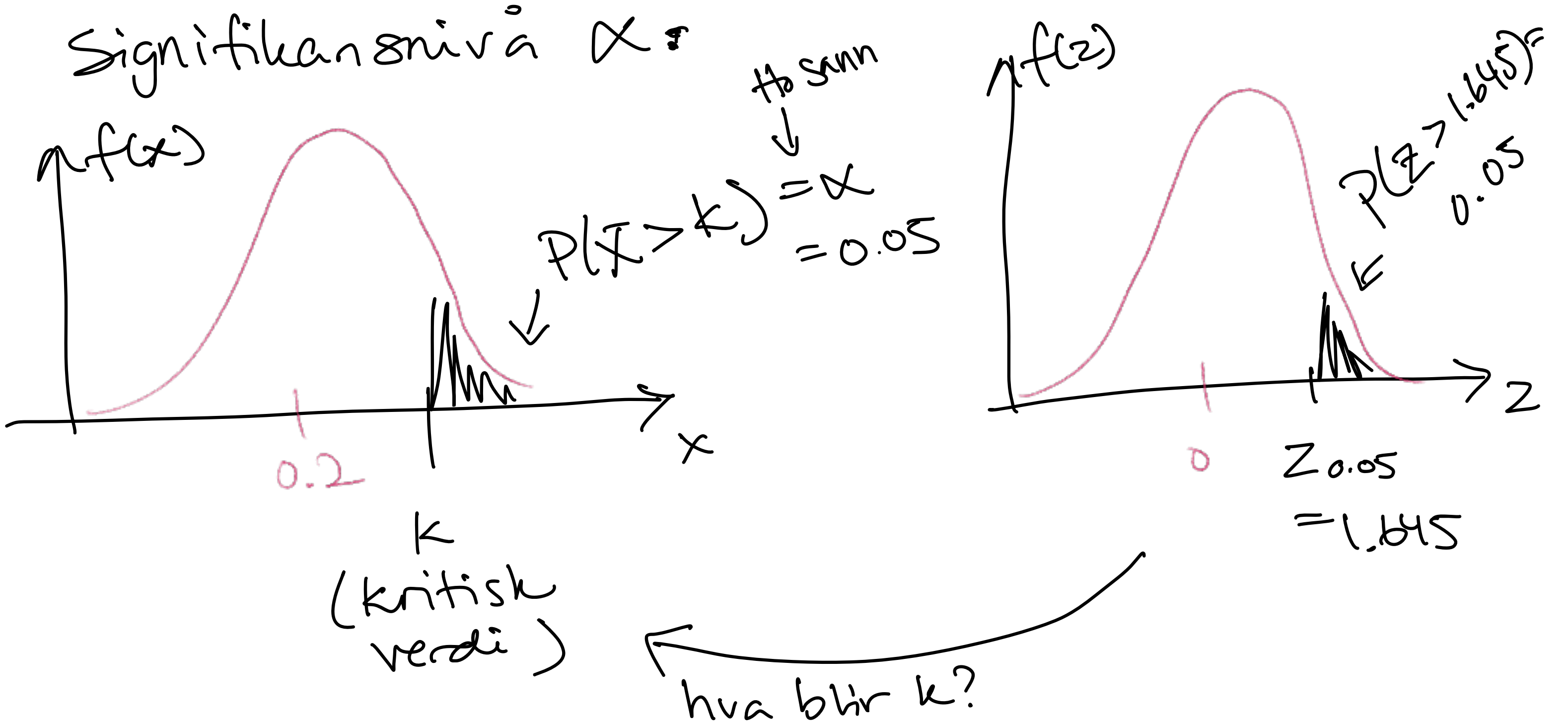
$Z \sim N(0, 1)$





c) Forkast H_0 når vi observerer en høy nok promille (x), eller høy nok 'standardisert promille' (Z).

Signifikansnivå α:



$$Z = \frac{\bar{X} - 0.2}{0.0044} \Rightarrow \bar{X} = 0.044\,Z + 0.2$$

$$\Rightarrow k = 0.044 \cdot 1.645 + 0.2 = 0.272$$

Forkastningsregel ved signifikansnivå $\alpha = 0.05$:

Forkast dersom $x_{obs} > 0.272$

eller $z_{obs} > 1.645$

akkurat det samme

d)

	H_0 sann	H_1 sann
Forkast H_0	☹ Type-1 feil	☺
Ikke forkast H_0	☺	☹ Type-2 feil

$P(\text{type-1 feil}) = \alpha = 0.05$

når $\mu = 0.2$, lavere om $\mu < 0.2$

Vi setter signifikansnivået (før testen gjennomføres) for å begrense sjansen for type-1 feil (uskyldig dømt)

$P(\text{type-2 feil}) = \,?$

Velg noen H_1: $\mu = 0.25$, $\mu = 0.3$, $\mu = 0.4$

Anta H_1 sann

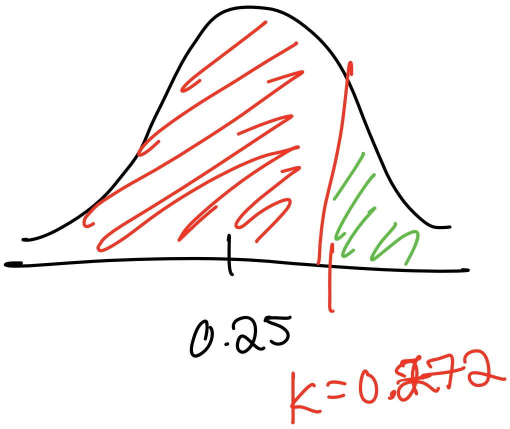
$$P(\bar{X} \leq k) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{0.044} \leq \frac{k - \mu}{0.044}\right)$$

0.272

ikke forkast

$$= P\left(Z \leq \frac{0.072 - \mu}{0.044}\right)$$

$\mu = 0.25$

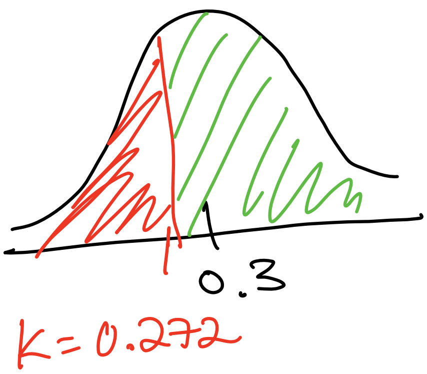


$P(\bar{X}<k) \approx 0.69$

$P(\bar{X}>k) \approx 1-0.69 = 0.31$

fokaste H_0 når H_1 er rett

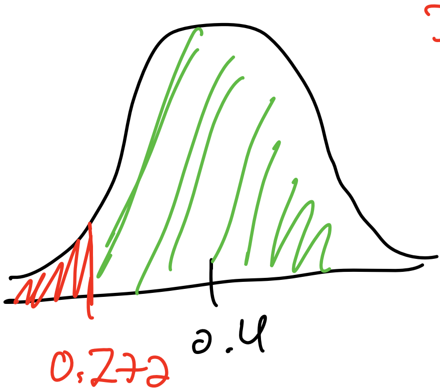
$\mu = 0.3$



$P(\bar{X}<k) \approx 0.26$

$P(\bar{X}>k) \approx 0.74$

$\mu = 0.4$



$P(\bar{X}<k) \approx 0.0018$

$P(\bar{X}>k) \approx 0.9982$

Gront: teststyrke

Teststyrke = P(forkaste H_0, H_1 sann)

$= 1 - P(\text{type-2 feil})$

e) $\bar{x}_{obs} = 0.24 \rightarrow$ ikke forkast H_0,
har ikke tilstrekkelig bevis for å
påstå at promillen (μ) er større
enn 0.2.

f) $H_0: \mu \leq 0.2 \qquad H_1: \mu > 0.2$

Testobservator $\bar{X} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{n} X_i$

antar uavhengige
$X_i \sim N(\mu, 0.044)$

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{0.044}{\sqrt{5}}\right)$

Kritisk verdi

$P(Z > 1.645) = 0.05 \qquad Z = \frac{\bar{X} - 0.2}{0.044/\sqrt{5}}$

$\rightarrow k = 1.645 \cdot \frac{0.044}{\sqrt{5}} + 0.2 = \underbrace{0.232}$

ny kritisk
verdi fordi
et snitt av 5 målinger
har mindre støy

$\bar{x}_{obs} = 0.24$
$\rightarrow$ forkast H_0.

OPPG 2: Kalibrering

θ: populasjonsgjennomsnitt / forventningsverdi for måling av smeltepunkt med gitt termometer

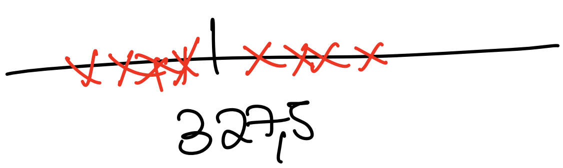
(det snittet vi ville fått om vi gjorde forsøket ∞ mange ganger – uten slitasje)

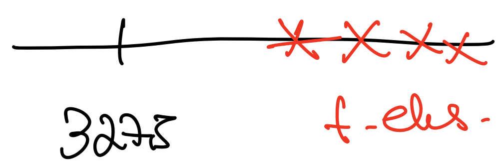
Dersom termometeret er riktig kalibrert så er $\theta = 327.5°C$

$H_0: \theta = 327.5°C$

$H_1: \theta \neq 327.5°C$

systematisk feil





Tilfeldig utvalg

$X_1, X_2, \dots, X_5$ med

$X_i \sim N(\theta, \sigma)$

$\bar{X}$ er (i utgangspunktet) aktuell som testobservator for θ.

observasjon av $\bar{X}$ tilstrekkelig langt fra H_1 ~~peker~~ på H_1.

Hva er tilstrekkelig langt unna?

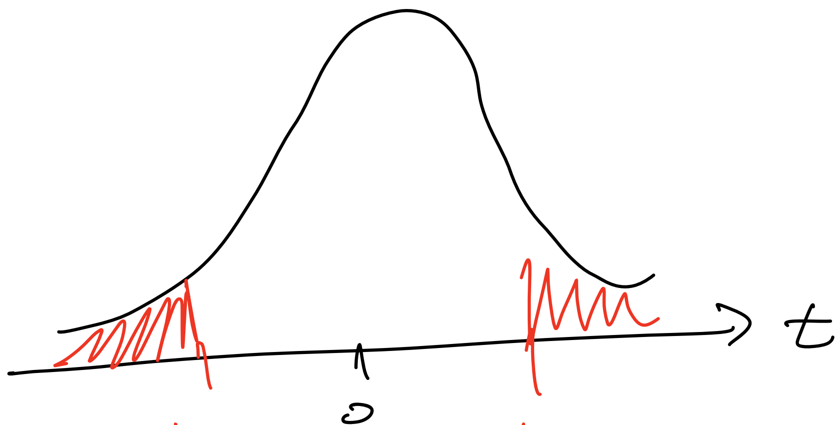
Forkastningsområde ved $\alpha = 0.05$ $(0.025 + 0.025)$

Men ikke helt rett frem når σ er ukjent.

Husk: $$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Testobservator

$$T = \frac{\bar{X} - 327.5}{S/\sqrt{5}} \overset{\text{når } H_0 \text{ er sann}}{\sim} t_4$$



$-t_{0.025,4} = -2.776$ $\quad$ $t_{0.025,4} = 2{,}776$

Vi observerer

$$\bar{x} = 330\,^\circ C$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{4}\sum(x_i - 330)^2} = 2.55$$

$$t_{obs} = \frac{330 - 327.5}{2.55/\sqrt{5}} = 2.19$$

Konklusjon: Selv om snitt av målinger ($\bar{x} = 330$) er ulikt det faktiske smeltepunktet (372.5°C) er det for mye variasjon i snittet av 5 målinger med dette instrumentet til å fastslå systematisk feil med signifikansnivå $\alpha = 0.05$.