



IST[TGA]100[123]

Siebe van Albada

Digital plenumstime

Mandag 2. september 2024

Om ukens campusforelesninger

- Ålesund: som vanlig ti/to kl. 14.15-16.00
- Gjøvik: Ingen fysisk forelesning
Bjørn Olav streamer
- Trondheim: Ingen fysisk forelesning
Thea har lagt ut ekstra videoer

Husk påmelding prosjektgrupper!

- Se venstremeny BlackBoard:
 - Informasjon om gruppearbeid
 - Prosjektgrupper: påmelding



- Viktig at gruppene er på plass når forprosjektet starter!

Plan for timen

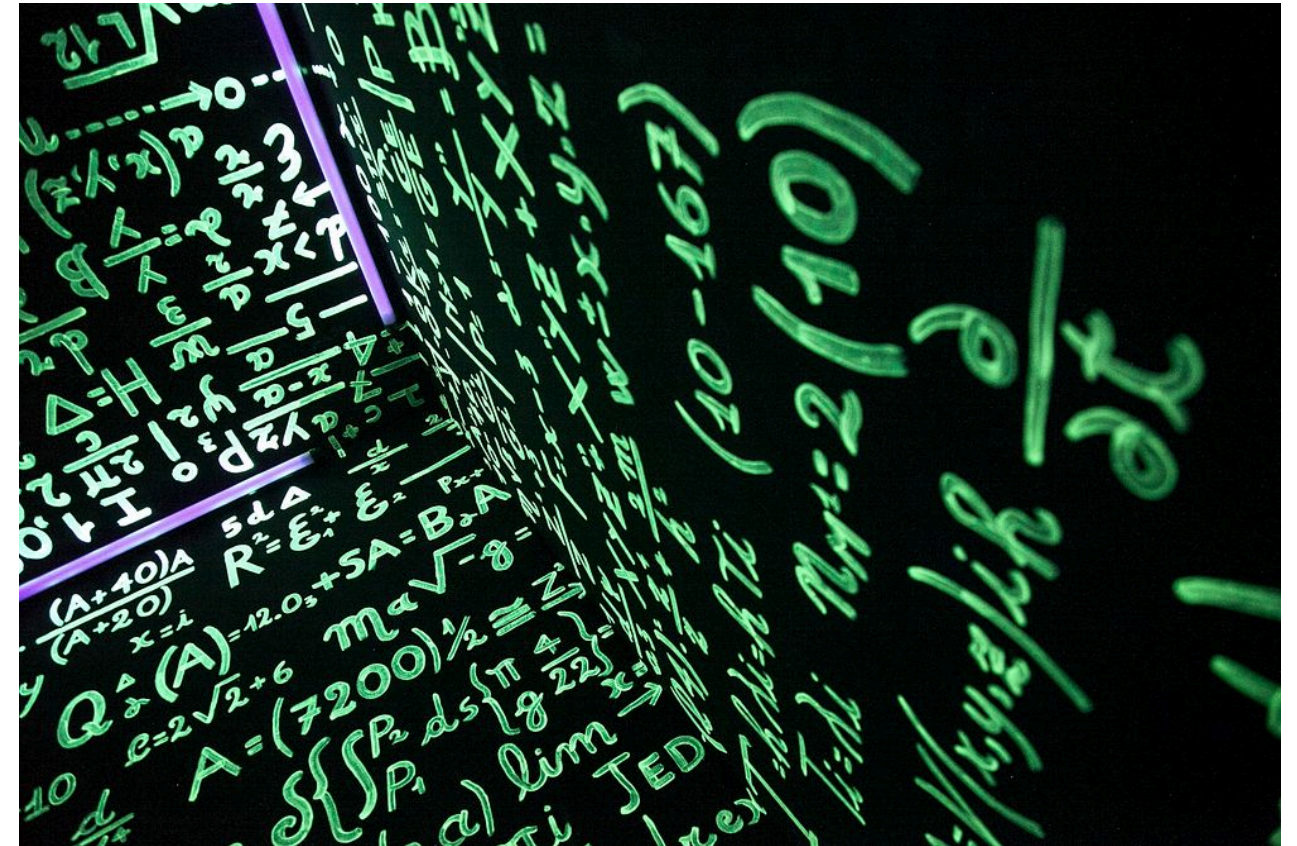
- Oppsummering forrige uke - hendelser og sannsynlighet
- Intro til denne uka - stokastiske variabler

Oppsummering – hendelser og sannsynlighet

- Et tips
- Sannsynlighet som $\# \text{gunstige} / \# \text{mulige}$
- Venndiagram og informasjon
- Produktregel
- Addisjonsregel
- Disjunkt, uavhengig *eller ingen av delene*
- Komplementærhendelse
- Urneforsøk
- Betinget sannsynlighet – anvendelse av definisjonen
- Bayes likhet

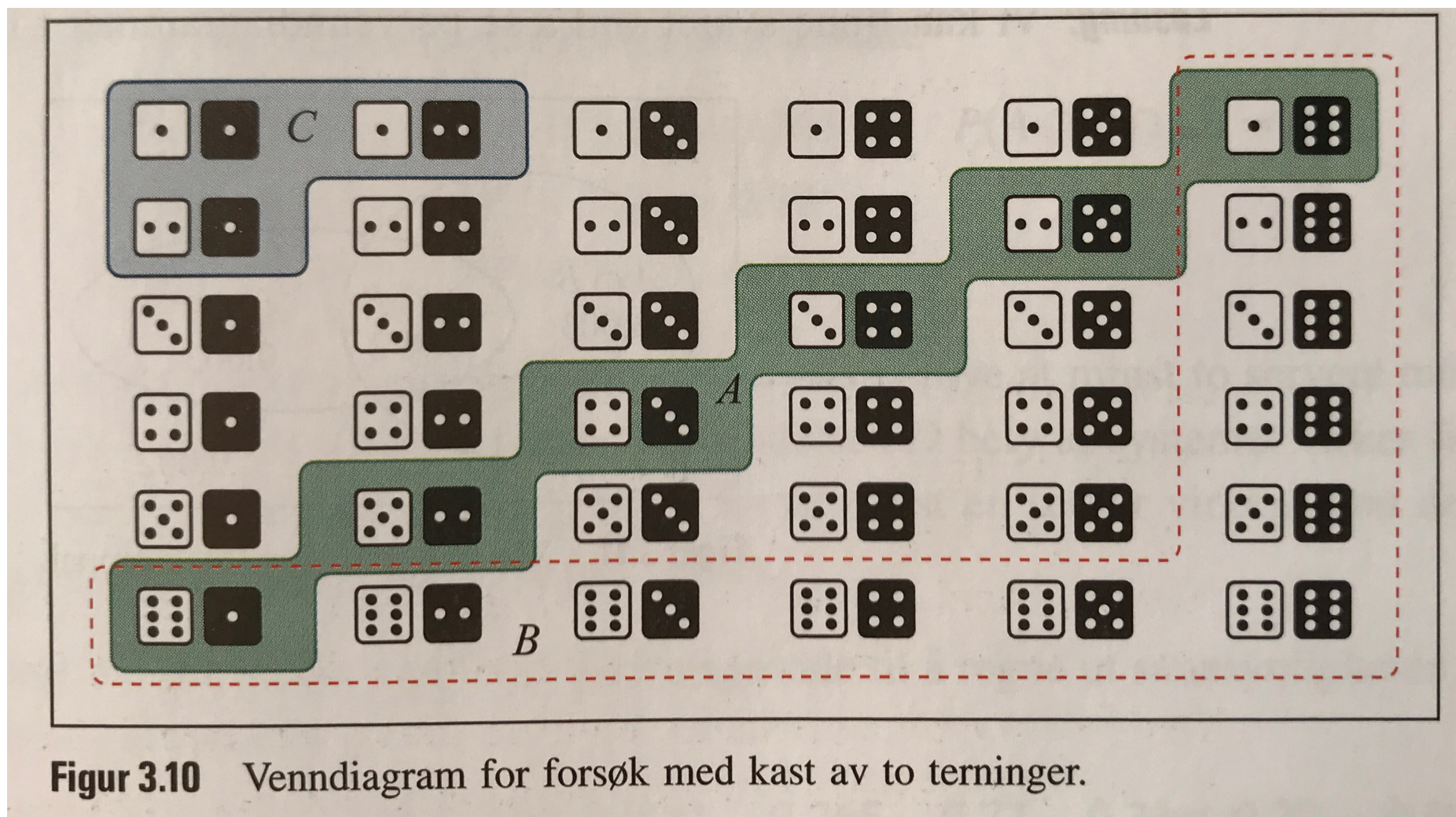
Et tips

- Bli vant til å bruke **formelarket**!



- Du finner formelarket i venstremenyen på BlackBoard.
- Lær **hvordan** du skal anvende formlene på formelarket.
- Lær **når** du skal og når du **IKKE** skal anvende de forskjellige formlene.

Sannsynlighet som #gunstige / #mulige



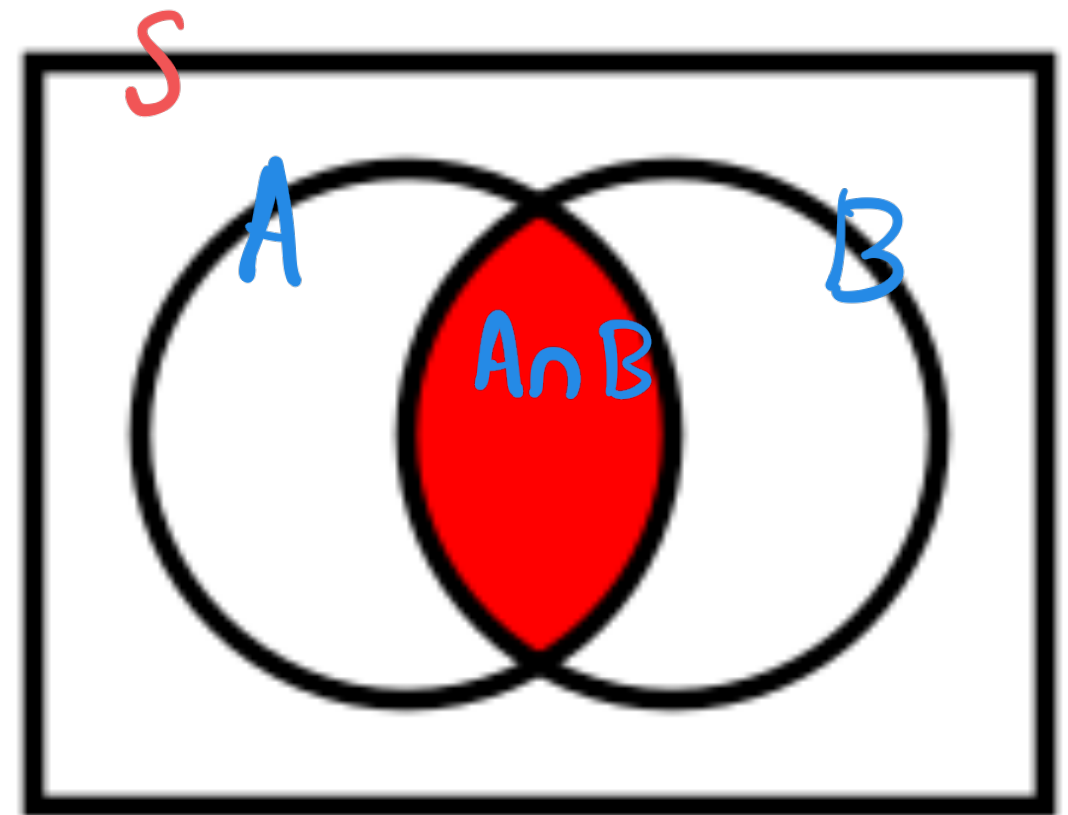
$$P(2 \text{ like}) = \frac{\#g}{\#m} = \frac{6}{36}$$

$$P(\text{minst 1 sekser}) = \frac{\#g}{\#m} = \frac{11}{36}$$

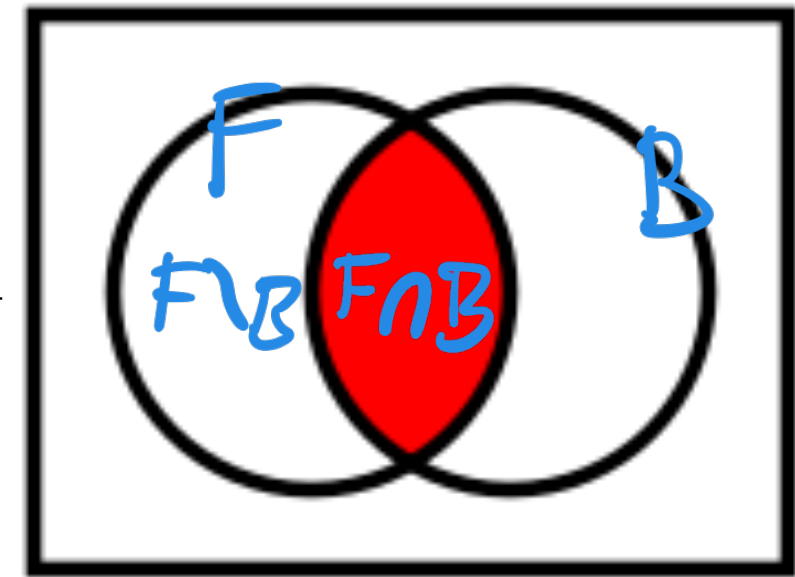
$$P(2 \text{ like} \mid \text{minst 1 sekser}) = \frac{\#g}{\#m} = \frac{1}{11}$$

Venndiagram og informasjon

- 4 arealer i venndiagrammet =>
- Vi trenger 4 «informasjonsbiter» for å kunne regne ut «alt».
- Det vi alltid vet: $P(\text{Utfallsrom}) = 1$
- Vi trenger 3 informasjonsbiter til.



Vennndiagram og informasjon



Spørsmål 4

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

🚩 Marker
spørsmål

⚙️ Rediger
spørsmål

En kommune gjennomførte i fjor høst en registrering av lysbruk blant syklistene om morgenen mens det ennå var mørkt. Med utgangspunkt i denne undersøkelsen, har vi fått oppgitt følgende sannsynligheter for en tilfeldig syklist:

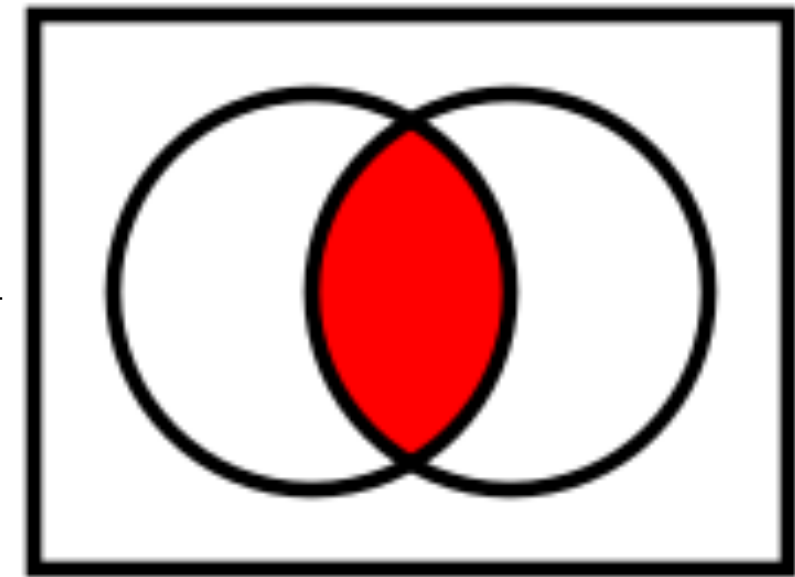
$$P(\text{syklisten har lys foran og bak}) = 0.33, = P(F \cap B)$$

$$P(\text{syklisten har kun lys foran}) = 0.2, = P(F \setminus B)$$

$$P(\text{syklisten har kun lys bak}) = 0.05, = P(B \setminus F)$$

Resten av syklistene var helt uten lys.

Vennndiagram og informasjon



Spørsmål 3

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

Marker

Et tomotors jetfly, med én motor til venstre og én til høyre, er konstruert slik at det kan lande trygt så lenge minst én av motorene virker. La A og B betegne hendelsene at henholdsvis venstre og høyre motor fungerer. Fra flyselskapets driftstatistikk vet vi at $P(A)=0.97$, $P(B)=0.94$ og at hendelsene A og B kan antas uavhengige.

Hvor er våre 3 informasjonbiter?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

Komplementærhendelse

Spørsmål 8

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

🚩 Marker
spørsmål

⚙️ Rediger
spørsmål

På et hotell med 9 etasjer er det en heis. 4 personer går samtidig inn i heisen i første etasje. Vi antar at personene forlater heisen uavhengig av hverandre, samt at sannsynlighetene for at en bestemt person skal gå av i henholdsvis 2., 3., ..., 8. eller 9. etasje er like store. Ingen av personene går ut av heisen i første etasje.

(a) Hva er sannsynligheten for at de 4 personene går av i hver sin etasje? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 eller 0.125.

→ (b) Hva er sannsynligheten for at minst 2 av de 4 går av i samme etasje? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 eller 0.125.

$$1 - P(A^c)$$

Komplementærhendelse

Spørsmål 6

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

🚩 Marker
spørsmål

⚙️ Rediger
spørsmål

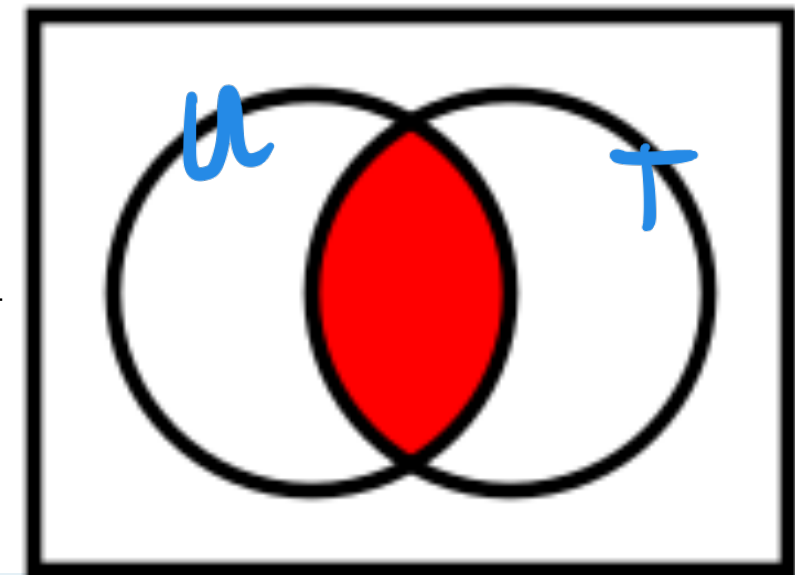
Bursdagsproblemet er en kjent "nøtt" i sannsynlighetsregning og kan utfordre intuisjonen vår for hvor sannsynlig (eller usannsynlig) en hendelse faktisk er.

Et visst antall personer, n , velges ut tilfeldig. Hva er sannsynligheten for at minst to av dem har bursdag på samme dag? Under visse antagelser kan vi regne ut det eksakte svaret på dette spørsmålet, og noen ganger må vi estimere slike sannsynligheter basert på simulering i Python.

I oppgave a) og b) skal vi anta at for én tilfeldig valgt person er alle datoer i året (365) like sannsynlige å ha som bursdag og uavhengig av de øvrige bursdagene, og dette kan løses eksakt og uten å bruke simulering. Hvis dette blir for store tall for kalkulatoren din så kan du regne ut numerisk svar på Jupyterhubben. Du må ha lastet inn numpy og så kan du bruke funksjonen `math.factorial`. Konkret: `"import numpy as np"` og så `"np.math.factorial(365)"` for $365!$ (Du kan selvfølgelig også bruke simulering, se under.)

 a) La $n = 44$. Hva er sannsynligheten for at minst to av disse har bursdag på samme dag? Oppgi svaret som et desimaltall med to desimaler, f.eks 0.23 eller 0.70.

Vennndiagram og informasjon



Spørsmål 10

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

Marker
spørsmål

Rediger
spørsmål

100 mynter ligger i en pose. En av myntene er urettferdig, med 100 % sannsynlighet for å kaste kron, de øvrige 99 er rettferdige (som vil si at sannsynlighetene for å kaste kron og mynt er begge lik 0.5). Vi drar en tilfeldig mynt fra posen og kaster den 10 ganger. Resultatet er kron hver av de 10 gangene.

(a) Gitt utfallet av de 10 kastene, hva er sannsynligheten for at mynten som ble kastet er den urettferdige?

Hvor er våre 3 informasjonbiter?

U : «Mynten er den urettferdige»

T : «Ti ganger kron»

Spurt: $P(U|T)$

$$P(U) = \frac{1}{100}$$

$$P(T|U) = 1$$

$$P(T|U^c) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Produktregel

Et forsøk utføres i k etapper. I første etappe er det m_1 mulige utfall, i andre etappe er det m_2 mulige utfall, osv. Totalt antall utfall for hele forsøket er lik $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

(Regel 3.22 i Løvås-boka).

Produktregel (eksempel)



Antall mulige utfall for to terningkast (etter hverandre/samtidig)

- **6** muligheter for første kast (rød terning) («1e etappe»)
- **6** muligheter for andre kast (svart terning) («2e etappe»)
- Totalt **6·6** = **36** muligheter

Produktregel

Spørsmål 6

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

🚩 Marker
spørsmål

⚙️ Rediger
spørsmål

Bursdagsproblemet er en kjent "nøtt" i sannsynlighetsregning og kan utfordre intuisjonen vår for hvor sannsynlig (eller usannsynlig) en hendelse faktisk er.

Et visst antall personer, n , velges ut tilfeldig. Hva er sannsynligheten for at minst to av dem har bursdag på samme dag? Under visse antagelser kan vi regne ut det eksakte svaret på dette spørsmålet, og noen ganger må vi estimere slike sannsynligheter basert på simulering i Python.

For å løse «bursdagsproblemet»:

Hva er antall muligheter for bursdagene til k personer? (antall «mulige»)

- person 1: 365 muligheter (1. etappe)
- person 2: 365 muligheter osv. (2. etappe)
- person k : 365 muligheter (k. etappe)
- Totalt: $365 \cdot \dots \cdot 365 = 365^k$ muligheter.
- **Urneforsøk** med tilbakelegging der rekkefølge er viktig (ordnet).

Produktregel

For å løse «bursdagsproblemet»:

Hva er antall muligheter for at k personer alle har bursdager på forskjellige dager? (antall «gunstige» muligheter)

- person 1: 365 muligheter (1. etappe)
- person 2: 364 muligheter osv. (2. etappe)
- person k : $365 - k + 1$ muligheter (k. etappe)
- Totalt: $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)$ «gunstige» muligheter.
 $= \frac{365!}{(365-k)!}$
- **Urneforsøk** uten tilbakelegging der rekkefølge er viktig (ordnet).

Urneforsøk

Spørsmål 7

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

🚩 Marker
spørsmål

⚙ Rediær

I en eske ligger det 16 like batterier. To av batteriene er tomme. Du trenger to batterier til en fjernkontroll og trekker tilfeldig uten tilbakelegging fra esken. Fjernkontrollen fungerer bare dersom begge batteriene fungerer.

Hva er sannsynligheten for at begge batteriene du har trukket, og dermed fjernkontrollen, fungerer? Oppgi svaret som et desimaltall

Antall «mulige» :

- **Urneforsøk** uten tilbakelegging der rekkefølge IKKE er viktig (uordnet).
- **16** batterier å velge fra.
- Vi skal velge **2**.
- Derfor: $\binom{16}{2}$ muligheter

Urneforsøk

Spørsmål 7

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

🚩 Marker
spørsmål

⚙ Rediger

I en eske ligger det 16 like batterier. To av batteriene er tomme. Du trenger to batterier til en fjernkontroll og trekker tilfeldig uten tilbakelegging fra esken. Fjernkontrollen fungerer bare dersom begge batteriene fungerer.

Hva er sannsynligheten for at begge batteriene du har trukket, og dermed fjernkontrollen, fungerer? Oppgi svaret som et desimaltall

Antall «gunstige» muligheter:

- **Urneforsøk** uten tilbakelegging der rekkefølge IKKE er viktig (uordnet).
- **14** batterier å velge fra (siden 2 av 16 er tomme).
- Vi skal velge **2**.
- Derfor: $\binom{14}{2}$ gunstige
- Og sannsynligheten for at fjernkontrollen fungerer: $\#g/\#m = \dots \frac{\binom{14}{2}}{\binom{16}{2}}$

Et tips til: Jobb systematisk

- **Typisk fremgangsmåte når oppgaven er «rett fram»:**
 - Skriv ned nødvendige **definisjoner** (f. eks. hendelser).
 - Skriv **opplyningene** på matematisk form.
 - Skriv det som er **spurt** på matematisk form.
 - Fortsett med et likhetstegn og **formelen** som du skal bruke.
 - Fortsett med et likhetstegn og sett inn **tallverdiene**.
 - Regn ut, med **likhetstegn** mellom stegene.
 - Skriv en dobbel strek under **svaret**.
- Om utregningen ikke er «rett fram»: **IKKE bruk likhetstegn** når høyre og venstre side ikke er lik hverandre men angi tydelig at du begynner en ny utregning.
- Bruk gjerne skisser/tegninger, som f.eks. et **venndiagram**.

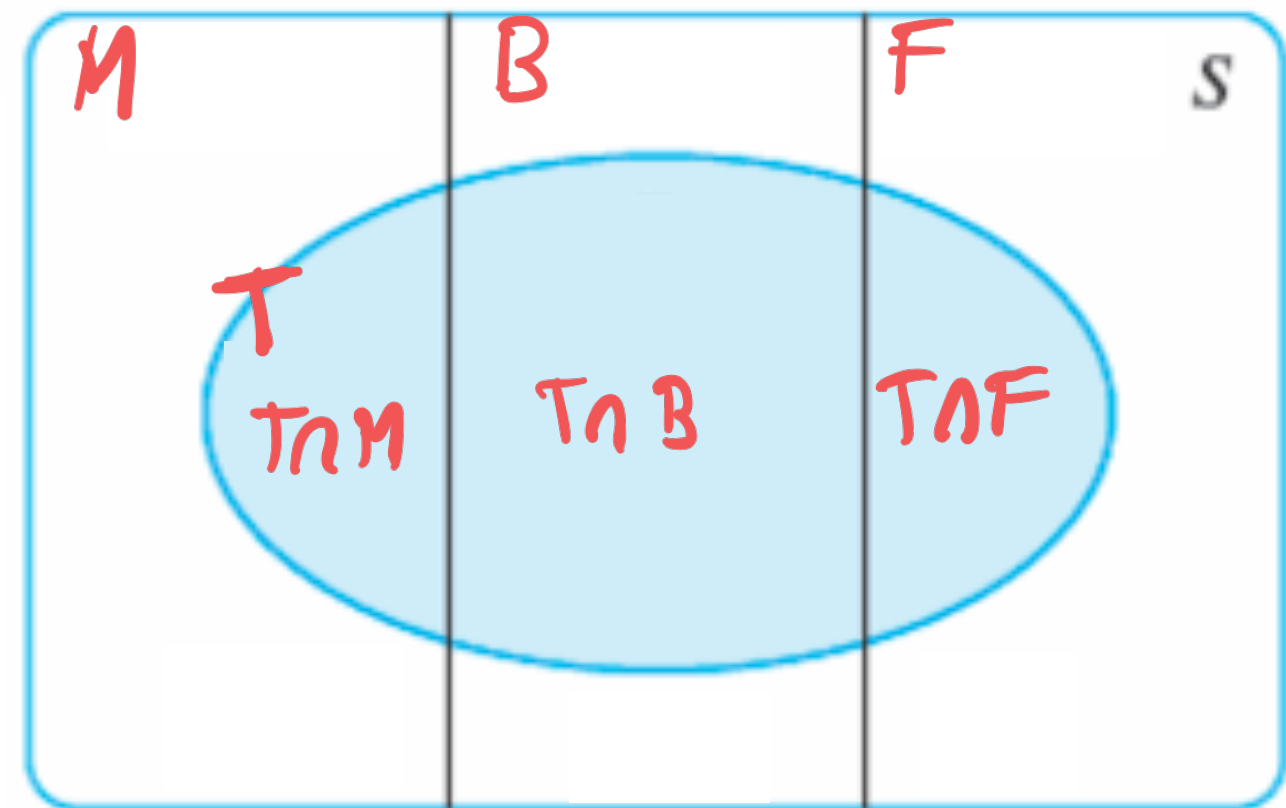
Addisjonsregel – eksempel: disjunkte hendelser

- 2 TALM1005 høsten 2017 (en gammel variant av dette kurset) ble forelest i tre paralleller; en for **M**askiningeniørstudenter, en for **B**yggingeinørstudenter, og en for en stor gruppe med mange **F**orskjellige linjer. Parallellene inneholdt henholdsvis 10, 20 og 70 prosent av studentene, og prosentandelene som fikk **T**oppkarakter i hver parallell var 9, 13 og 8.

Vi trekker en tilfeldig student. Finn sannsynligheten for at

- a) studenten fikk toppkarakter.

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap B) + P(T \cap F)$$

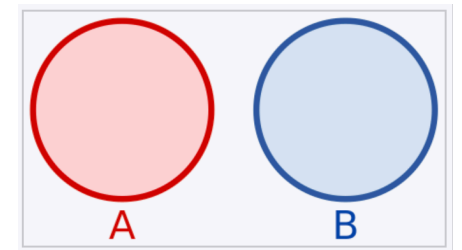


Disjunkt, uavhengig *eller ingen av delene*

Disjunkte hendelser:

Hendelse A: «Brevet er i Nederland» og hendelse B: «brevet er Norge»

Hendelsene A og B kan ikke inntreffe samtidig $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$



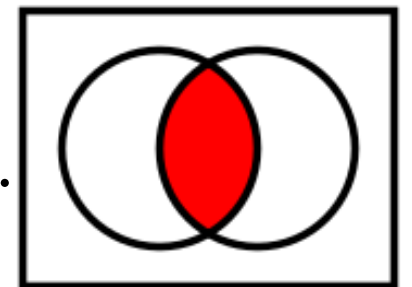
Uavhengige hendelser:

Hendelse A: «Det regner» og hendelse B: «terningen viser seks øyne»

Hendelsene A og B påvirker ikke hverandre $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

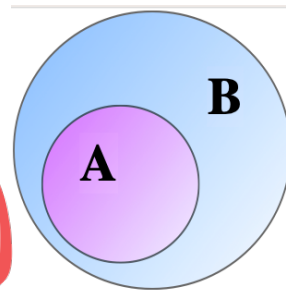
Generelt: Disjunkte og uavhengige hendelser er spesialtilfeller!

$P(A \cap B)$ kan være **hva som helst** (men ikke større enn $P(A)$ eller $P(B)$).



Enda et spesialtilfelle:

Om $A \subseteq B$ gjelder $P(A \cap B) = P(A)$



Betinget sannsynlighet – anvendelse av definisjonen

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Spørsmål 4

Ikke fullført

Karakter av
maks 1.00

🚩 Marker
spørsmål

⚙️ Rediger
spørsmål

En kommune gjennomførte i fjor høst en registrering av lysbruk blant syklister om morgenen mens det ennå var mørkt.

Med utgangspunkt i denne undersøkelsen, har vi fått oppgitt følgende sannsynligheter for en tilfeldig syklist:

$P(\text{syklisten har lys foran og bak}) = 0.33,$

$P(\text{syklisten har kun lys foran}) = 0.2,$

$P(\text{syklisten har kun lys bak}) = 0.05.$

Resten av syklistene var helt uten lys.

(c) Hvis du får vite at en sykkel har lys foran, hva er sannsynligheten for at den også har lys bak? Oppgi svaret som et desimaltall med

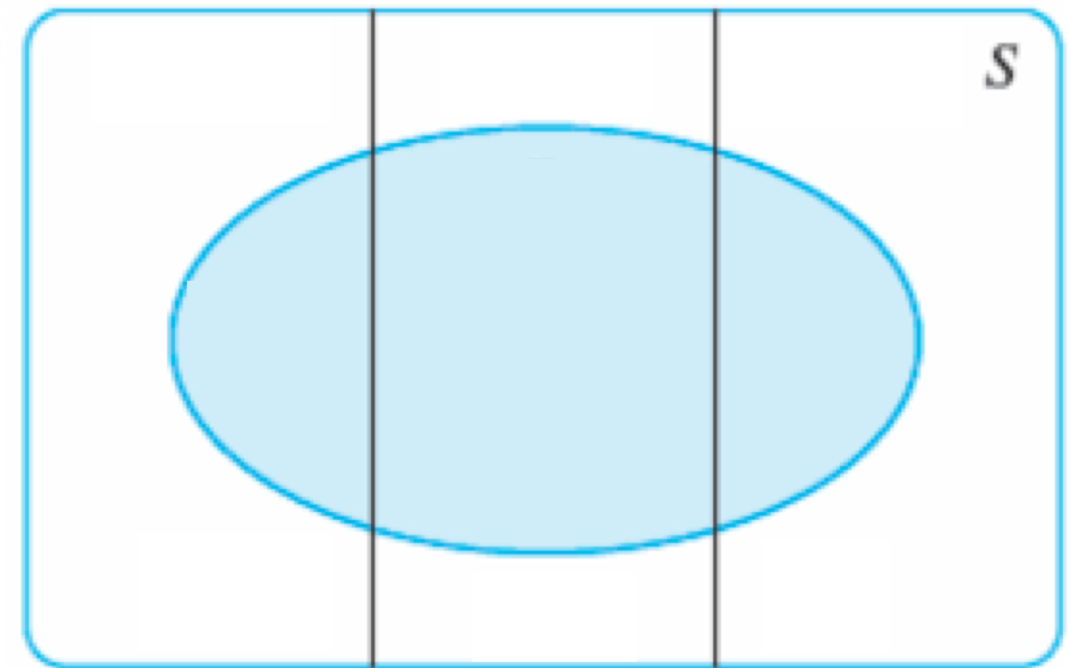
Bayes likhet

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

TALM1005 høsten 2017 (en gammel variant av dette kurset) ble forelest i tre paralleller; en for maskiningeniørstudenter, en for byggingeniørstudenter, og en for en stor gruppe med mange forskjellige linjer. Parallellene inneholdt henholdsvis 10, 20 og 70 prosent av studentene, og prosentandelene som fikk toppkarakter i hver parallell var 9, 13 og 8.

Vi trekker en tilfeldig student. Finn sannsynligheten for at

c) studenten er byggingeniør gitt at vedkommende fikk toppkarakter.

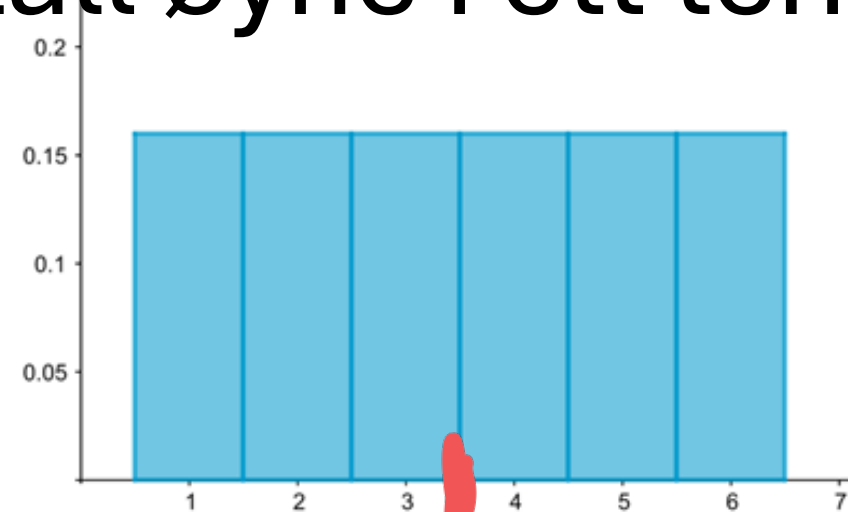


Intro til uka – stokastiske variabler

- Eksempler – diskrete og kontinuertlige
- Sannsynlighetsfordelinger og sannsynlighetstettheter

Eksempel: X er antall øyne i ett terningkast

x	$P(X=x)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$



$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Forventningsverdi:

$$E[X] = 3,5$$

Eksempel: X er #øyne i to terningkast

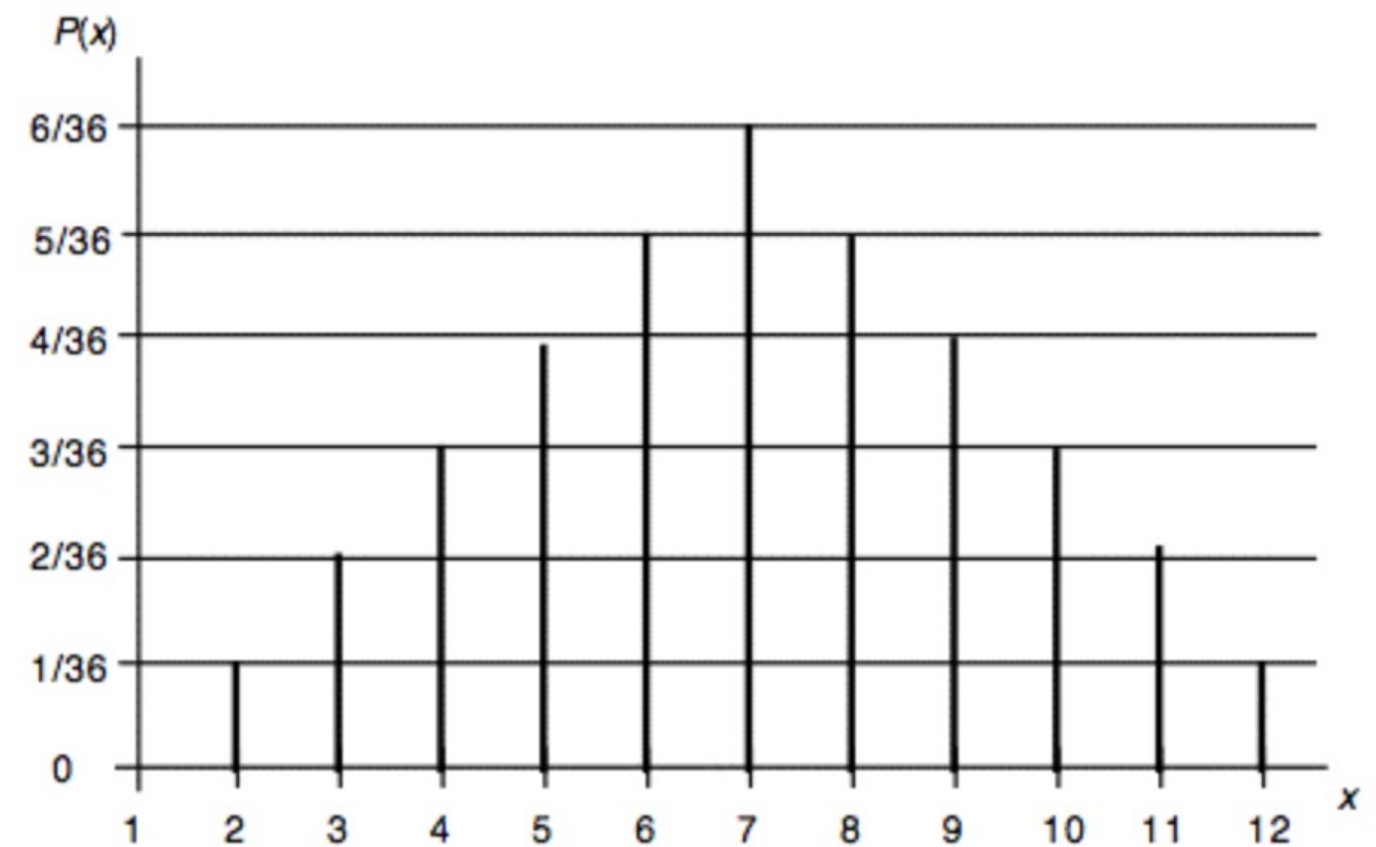
Example Distribution

Set of possible values: $X = \{2, 3 \dots 12\}$

Specific value of the random variable: $x \in X$

Probability of the value x : $P(x)$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

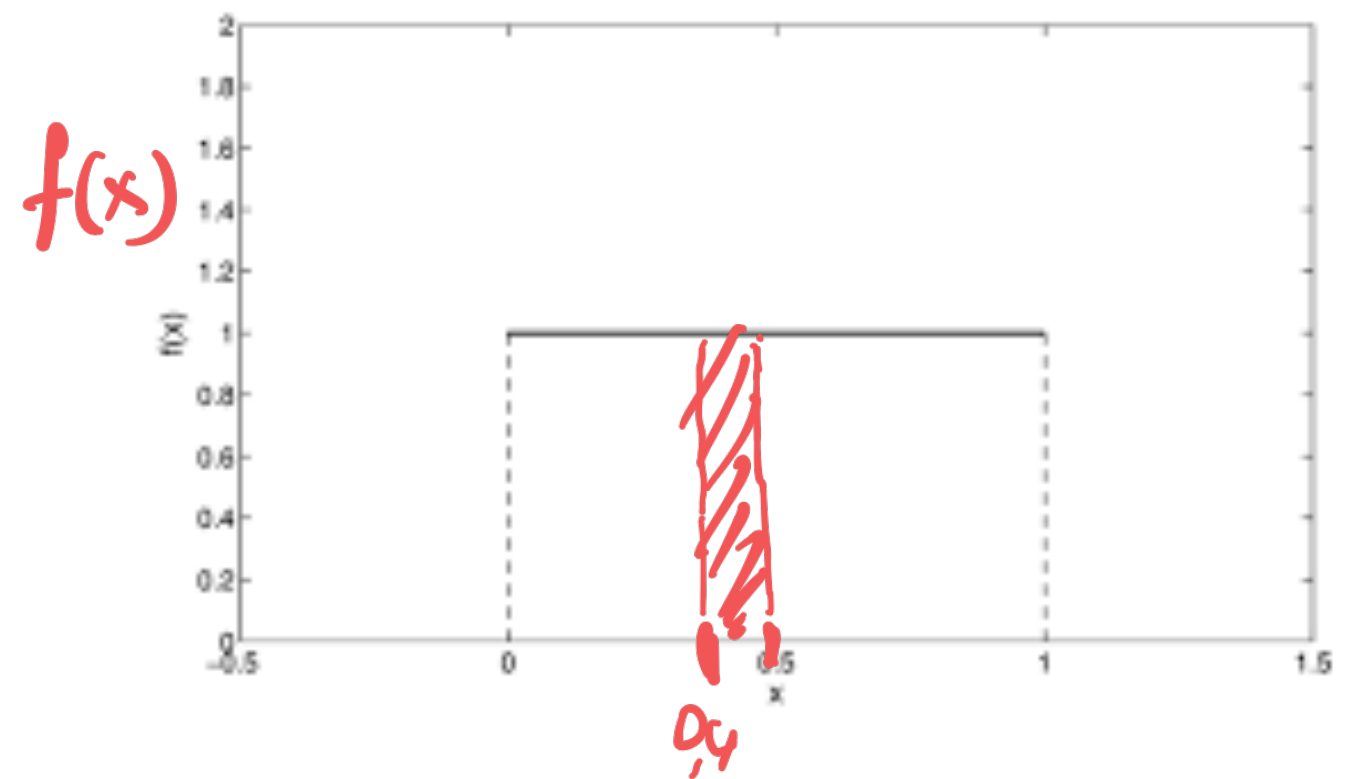


Forventningsverdi: $E[X] = 7$

Eksempel (kontinuerlig fordeling):
X er et tilfeldig tall på intervallet (0,1)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in (0,1) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Forventningsverdi:
 $E(X) =$



$$P(0.4 < X < 0.5) = 0.1$$

Eksempel (kontinuerlig fordeling):

X er summen av to tilfeldige tall på intervallet $(0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in (0,1) \\ 2-x & \text{for } x \in (1,2) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Forventnings verdi:

$$E[X] =$$

