



IST[TGA]100[123]

Siebe van Albada

Digital plenumstime

Mandag 16. september 2024

Plan for timen

- Forprosjekt
- Oppsummering forrige uke og intro til denne uka:
 - Binomisk og geometrisk fordeling
 - Poisson-, eksponensial-, weibullfordeling og systempålitelighet

Forprosjekt - skostørrelse og høyde

- Husk fristen fredag
førstkommende, 20. sept!
- Se BlackBoard for all
informasjon.
- Spørsmål? Se **forumet** ->
forberedende prosjekt.



Forprosjekt

Formål

- Bli kjent med gruppene deres
- Øve dere på praktiske ferdigheter
- Reflektere rundt egenskaper til stokastiske variabler

Leveranser

Forprosjektet består av fire obligatoriske leveranser:

1. Gruppekontrakt (se forslag til mal)
2. Maks 1 sides diskusjon om det stokastiske forsøket
3. En excel- eller csv-fil med gruppas datasett
4. En PDF-fil som viser et kryssplott og regresjonslinje fra dataanalysen i Python

Vurdering: Godkjent/ ikke godkjent

Binomisk forsøksrekke (Bernoulli-forsøksrekke)

- Både binomisk og geometrisk fordeling er basert på en binomisk forsøksrekke
- Eksempler: myntkast, urnemodell med tilbakelegging.
- Hvordan kjenne igjen binomisk forsøksrekke?
 1. Gjentatte forsøk.
 2. Kun to mulige utfall, si A og A^c , for hvert delforsøk
 3. $P(A) = p$ i alle delforsøkene.
 4. Delforsøkene er uavhengige av hverandre.

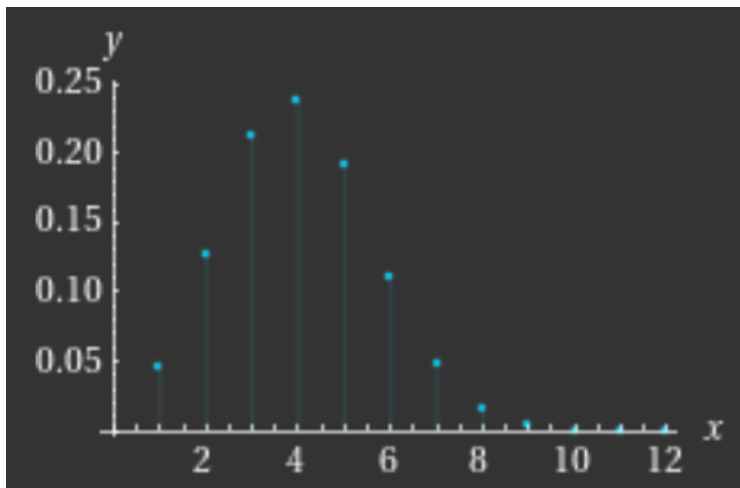
Binomisk fordeling med parametre (n, p):

Sannsynlighet for eksakt x hendelser

i.l.a. n forsøk i en binomisk forsøksrekke

når sannsynlighet for suksess er p per forsøk.

Binom($n = 12$, $p = 1/3$)



Til venstre:

Sannsynlighet for eksakt x hendelser

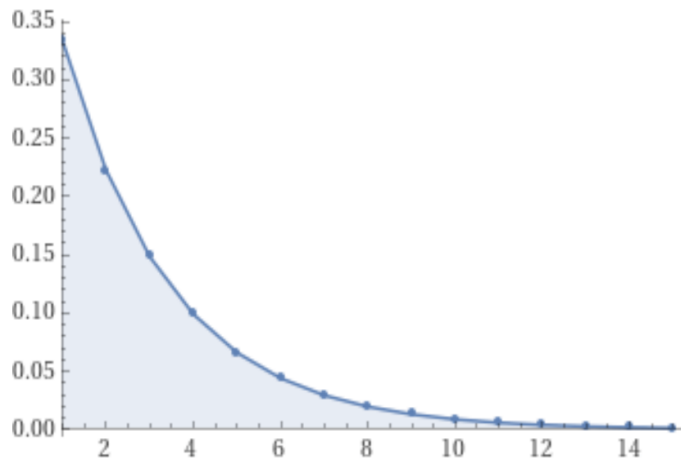
i.l.a. $n = \dots$ forsøk

når sannsynligheten for suksess $p = \dots$ per forsøk.

Geometrisk fordeling med parameter p :

Sannsynlighet for at første «suksess» i en binomisk forsøksrekke skjer på forsøk nummer x
når sannsynligheten for suksess er p per forsøk

Geom($p = 1/3$)



Til venstre:

Sannsynlighet for at første «suksess»
skjer på forsøk nummer x
når sannsynligheten for suksess $p = \dots$ per forsøk

Generell oppskrift for løsning av oppgaver om sannsynlighetsfordelinger

- Steg 1: Definere den stokastiske variabelen (f. eks. X)
- Steg 2: Finne sannsynlighetsfordelingen/-tettheten
- Steg 3: Skrive om det som er spurt til matematisk form
- Steg 4: Regne ut med hjelp av
 - definisjoner/formler (fra formelarket)
 - skisser om nødvendig
 - tabeller om nødvendig (eller regneverktøy)

Eksempel oppgaveløsning (I-a):

John ringer kundeservice. Alle Johns forsøk er uavhengige.

Sannsynligheten for å komme igjennom er lik $1/3$ for hvert forsøk.

Hva er sannsynligheten for at John må ringe mer enn 2 ganger?

Løsning: Definer X : «# ganger John må ringe». Da er $X \sim \text{Geom}(p = \dots)$

- Å regne ut: $P(\dots) =$

Alt. løsningsmetode (med kumulativ sannsynlighet):

Eksempel oppgaveløsning (I-b):

John ringer kundeservice. Alle Johns forsøk er uavhengige.
Sannsynligheten for å komme igjennom er lik $1/3$ for hvert forsøk.

Gitt at John allerede har forsøkt å ringe én gang, hva er sannsynligheten for at han må forsøke å ringe mer enn 1 gang til?

Løsning: Å regne ut: $P(\dots | \dots) =$

Alt. Løsningsmetode:

Eksempel oppgaveløsning (II):

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person vil stemme i valget er 0.7. Vi vet at maksimalt 15 av $n=20$ tilfeldig valgte personer vil stemme, hva er da sannsynligheten for at minst 14 av dem vil stemme?

Løsning:

- Definer X som: «# personer i utvalget som skal stemme»
- $X \sim \text{Binom}(n=..., p=...)$
- Å regne ut: $P(\dots \mid \dots) =$

Eksempel oppgaveløsning (II):

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person vil stemme i valget er 0.7. Vi vet at maksimalt 15 av $n=20$ tilfeldig valgte personer vil stemme, hva er da sannsynligheten for at minst 14 av dem vil stemme?

Løsning:

- Definer X som: «# personer i utvalget som skal stemme»
- $X \sim \text{Binom}(n=..., p=...)$
- Å regne ut: $P(\dots | \dots) =$

BINOMISK FORDELING: $P(X \leq x)$

n	x	p											
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
20	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.949	0.762	0.370	0.043
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.984	0.893	0.589	0.133
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.965	0.794	0.323

NB! Fare for feil bruk av betinget sannsynlighet

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person vil stemme i neste valg er 0.7. Vi vet at maksimalt 15 av $n=20$ tilfeldig valgte personer vil stemme, hva er da sannsynligheten for at minst 14 av dem vil stemme?

NB!! Her er det veldig viktig å vite hvordan vi fikk informasjonen «at maksimalt 15 av $n=20$ tilfeldig valgte personer vil stemme».

- F. eks. om vi har sett at **de første 5** av de $n=20$ valgte personene ***ikke*** vil stemme blir uttrykket $P(X \geq 14 | X \leq 15)$ **feil!**
- Oppgaven blir i så fall $P(X \geq 14)$ der $X \sim \text{Binom}(n=15, p=0.7)$.

NB! Fare for feil bruk av betinget sannsynlighet

To eksempler der $P(X \geq 14 | X \leq 15)$ med $X \sim \text{Binom}(n=20, p=0.7)$ blir **riktig** er:

1. Vi spør noen som har fullstendig informasjon «Skal høyst 15 personer i utvalget stemme?» og svaret er «ja».
2. Vi får, av en eller annen grunn, **kun** tilsendt resultatene fra utvalg der maksimalt 15 av 20 personer skal stemme.

Poenget er: Informasjonen som vi har må være eksakt den som står i betingelsen, altså, etter den vertikale streken $|$. Forskjellen kan være subtil!

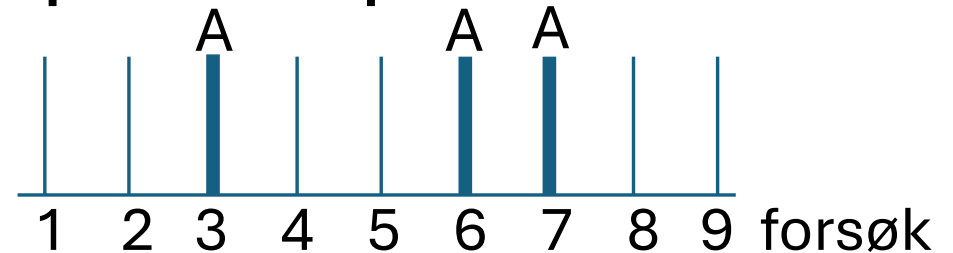
Poissonprosess

- Både Poisson- og eksponentialfordeling er basert på en poissonprosess
- Eksempler (under visse betingelser): Radioaktivt forfall, ankomst av kunder til en butikk, fødsler i en stor by
- Hvordan kjenne igjen en poissonprosess? (alternativ definisjon!)
 1. Gjentatte hendelser «A».
 2. Enten 0 eller 1 forekomst av A i korte nok tidsstrekninger.
 3. $P(A) = \lambda * \Delta t$ for hver «uendelig» kort tidsstrekning Δt .
 4. Alle forekomster av A er uavhengige av hverandre.

Binomisk forsøksrekke vs. poissonprosess

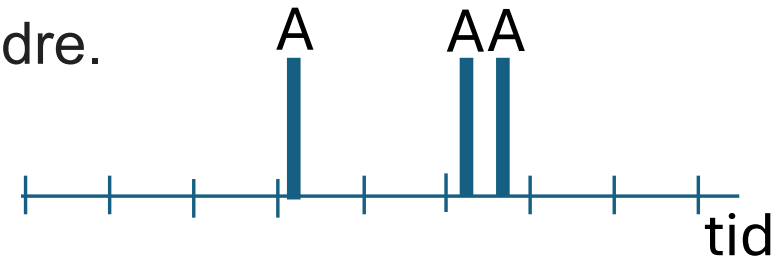
Binomisk forsøksrekke:

1. Gjentatte forsøk.
2. Kun to mulige utfall, si A og A^c , for hvert delforsøk
3. $P(A) = p$ i alle delforsøkene.
4. Delforsøkene er uavhengige av hverandre.



Poissonprosess: (alternativ definisjon!)

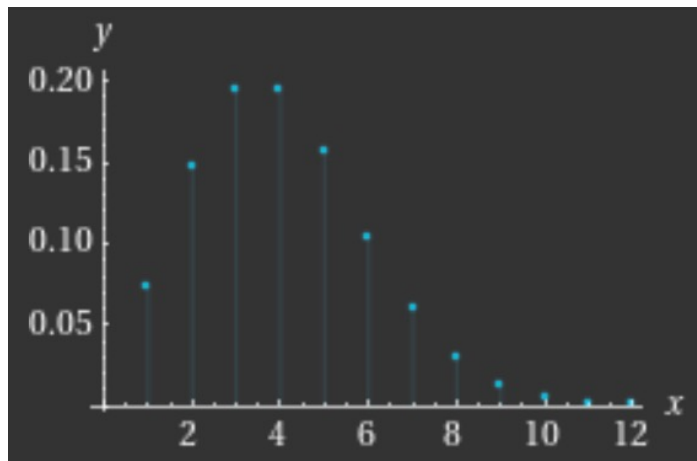
1. Gjentatte hendelser « A ».
2. Enten 0 eller 1 forekomst av A i korte nok tidsstrekninger.
3. $P(A) = \lambda * \Delta t$ for hver «uendelig» kort tidsstrekning Δt .
4. Alle forekomster av A er uavhengige av hverandre.



Poissonfordeling med parametere (λ , t):

Sannsynlighet for eksakt x hendelser
i.l.a. tid t i en poissonprosess
når suksessraten er λ per tidsenhet.

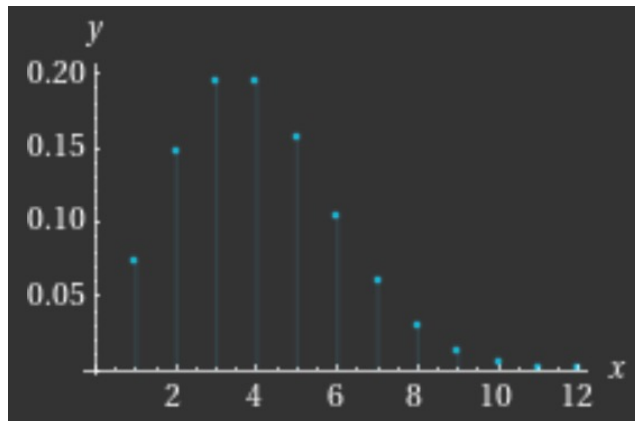
Pois($\lambda = 1/3, t = 12$)



Til venstre:

Sannsynlighet for eksakt x hendelser
i.l.a. tid $t = \dots$
når suksessraten $\lambda = \dots$ per tidsenhet

Poisson- vs. Binomialfordeling (I)

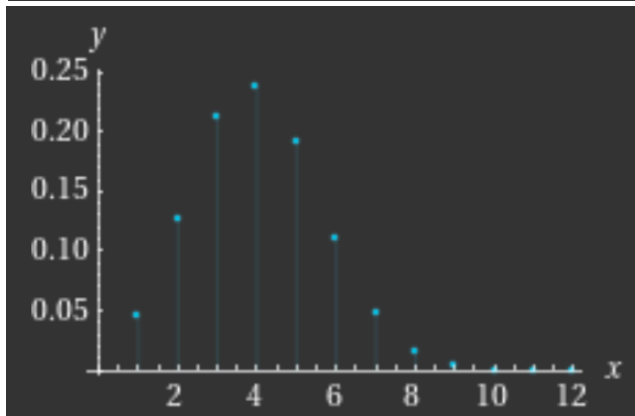


Poissonfordeling for $t = 12$, $\lambda = 1/3$:

Sannsynlighet for eksakt x hendelser

i.l.a. $t = \dots$ tidsenheter

når raten for hendelser $\lambda = \dots$ per tidsenhet.



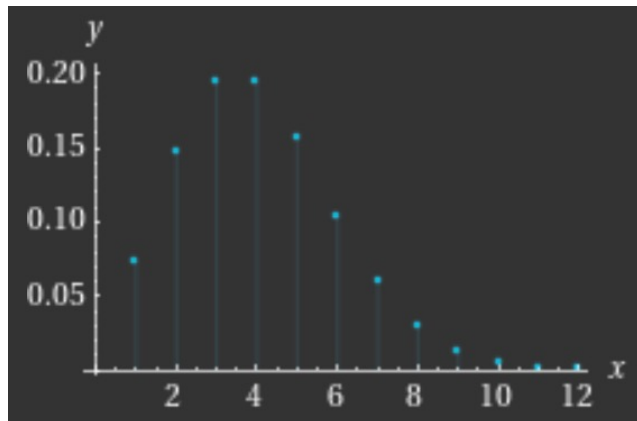
Binomialfordeling for $n = 12$, $p = 1/3$:

Sannsynlighet for eksakt x hendelser

i.l.a. $n = \dots$ forsøk

når sannsynligheten for suksess $p = \dots$ per forsøk.

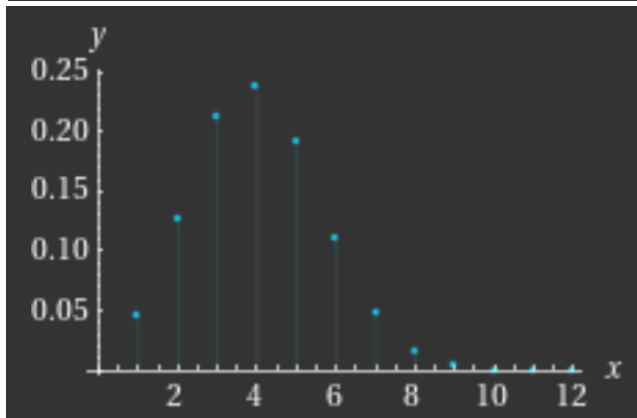
Poisson- vs. Binomialfordeling (II)



Poissonfordeling for $t = 12$, $\lambda = 1/3$

$$E[X] = \lambda * t = \dots$$

Diskret fordeling, $P(x)$, $x=0, 1, 2, \dots, \dots$



Binomialfordeling for $n = 12$, $p = 1/3$

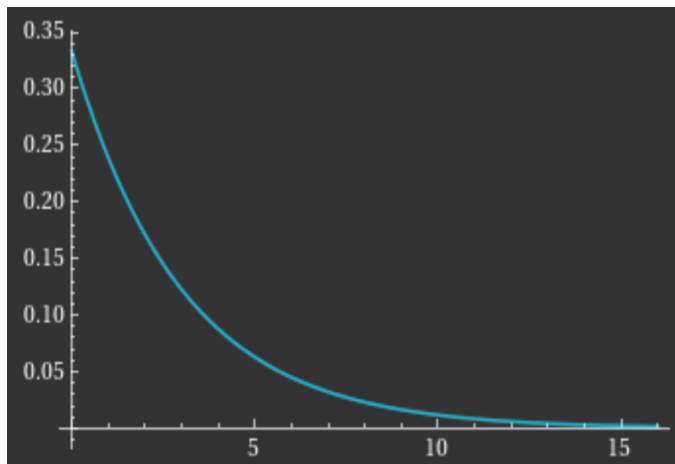
$$E[X] = n * p = \dots$$

Diskret fordeling, $P(x)$, $x=0, 1, \dots, \dots$

Eksponentialfordeling med parameter λ :

Relativ sannsynlighet for at første hendelse i en poissonprosess skjer etter eksakt t tidsenheter
når raten for hendelser er lik λ per tidsenhet

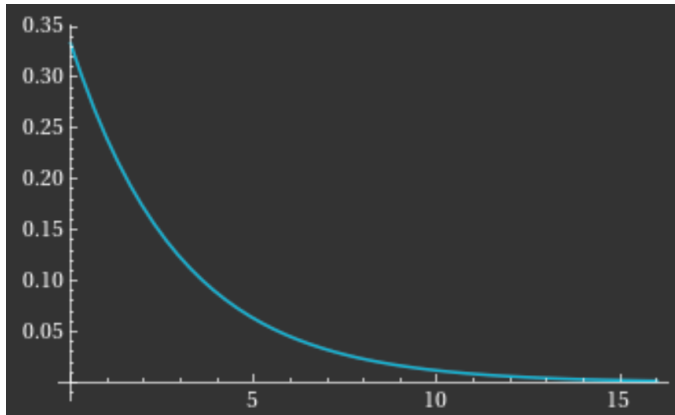
Exp($p = 1/3$)



Til venstre:

Relativ sannsynlighet for at første hendelse skjer etter eksakt t tidsenheter
når raten for hendelser er lik $\lambda = \dots$ per tidsenhet

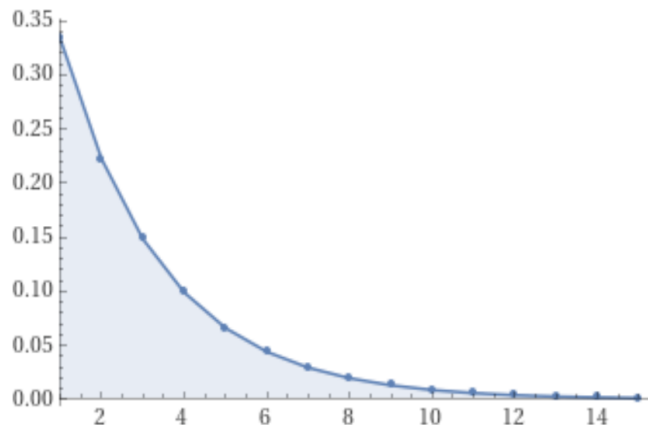
Eksponential- vs. geometrisk fordeling (I)



Eksponentialfordeling for $\lambda = 1/3$:

Relativ sannsynlighet for at første hendelse skjer etter eksakt... tidsenheter

når raten for hendelser $\lambda = \dots$ per tidsenhet

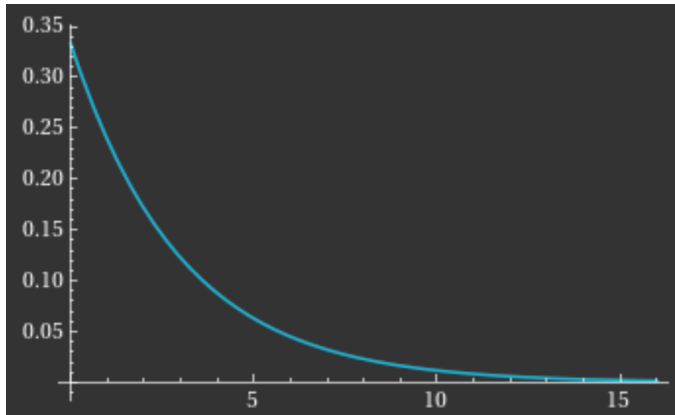


Geometrisk fordeling for $p = 1/3$:

Sannsynlighet for at første hendelse skjer på forsøk nummer ...

når sannsynligheten for suksess $p = \dots$ per forsøk

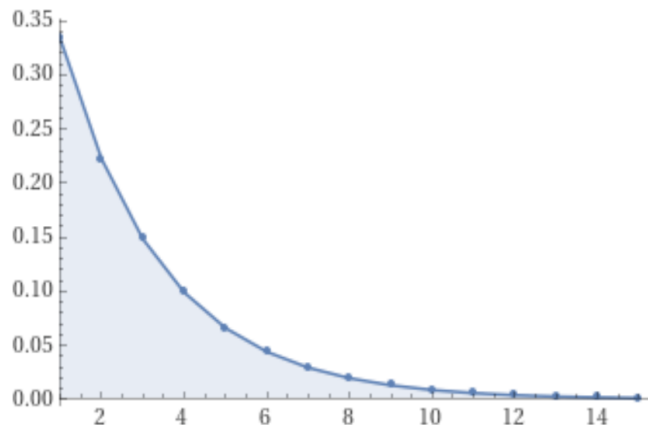
Eksponential- vs. geometrisk fordeling (II)



Eksponentialfordeling for $\lambda = 1/3$

$$E[T] = 1/\lambda = \dots$$

Kontinuerlig fordeling $f(t)$, $t \in [0, \infty)$



Geometrisk fordeling for $p = 1/3$

$$E[X] = 1/p = \dots$$

Diskret fordeling, $P(x)$, $x = 1, 2, 3, \dots$

Oppgaveløsning: binomisk og poisson

- **Oppgave basert på Oppgave 4, Ø4 (Binomisk):**

En robot lakkerer biler. Roboten har 20 % sannsynlighet på feil for hver bil. Arbeidene er uavhengige. La X angi antall feil i.l.a. $n = 8$ biler.

a) Hva er sannsynligheten for at antall feil er færre enn 2?

$$X \sim \text{Binom}(n=..., p=...) \quad P(\dots) = \dots$$

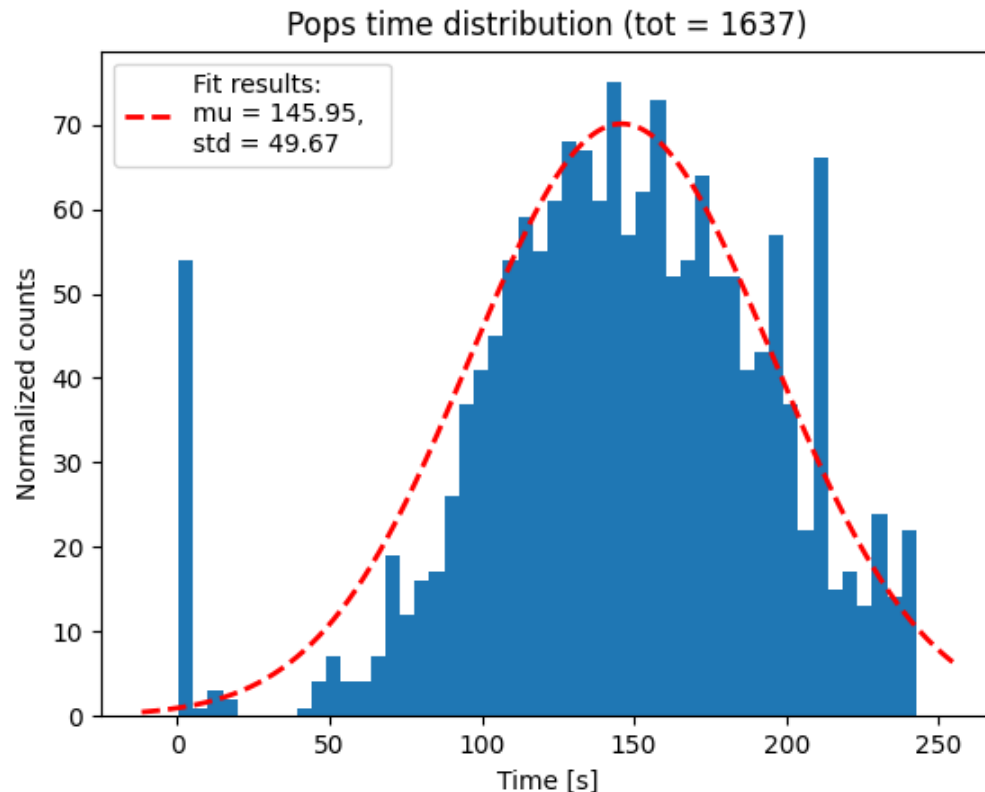
- **Tilsvarende oppgave (Poisson):**

En robot lakkerer biler. Roboten har en feilrate på 20 % per time i lakkeringsarbeidene. La X angi antall feil i.l.a. $t = 8$ timer som roboten har lakkert.

a) Hva er sannsynligheten for at antall feil er færre enn 2?

$$X \sim \text{Pois}(\lambda t = \dots) \quad P(\dots) = \dots$$

Popcorn popping

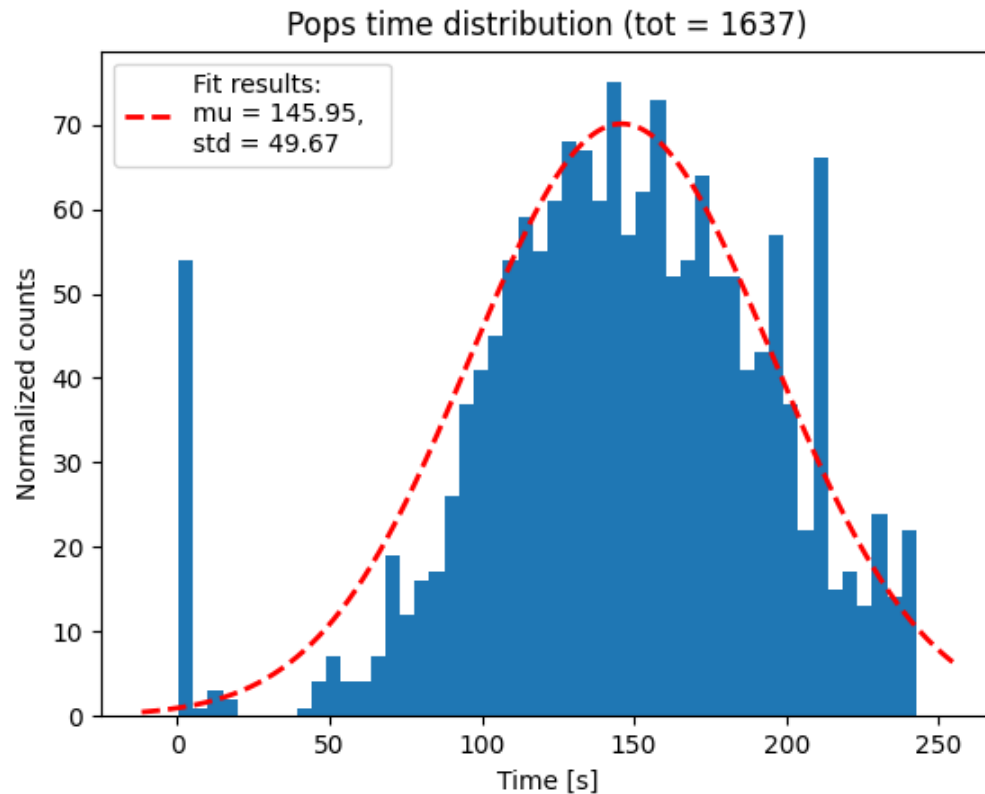


<https://stackoverflow.com/questions/17481672/fitting-a-weibull-distribution-using-scipy>

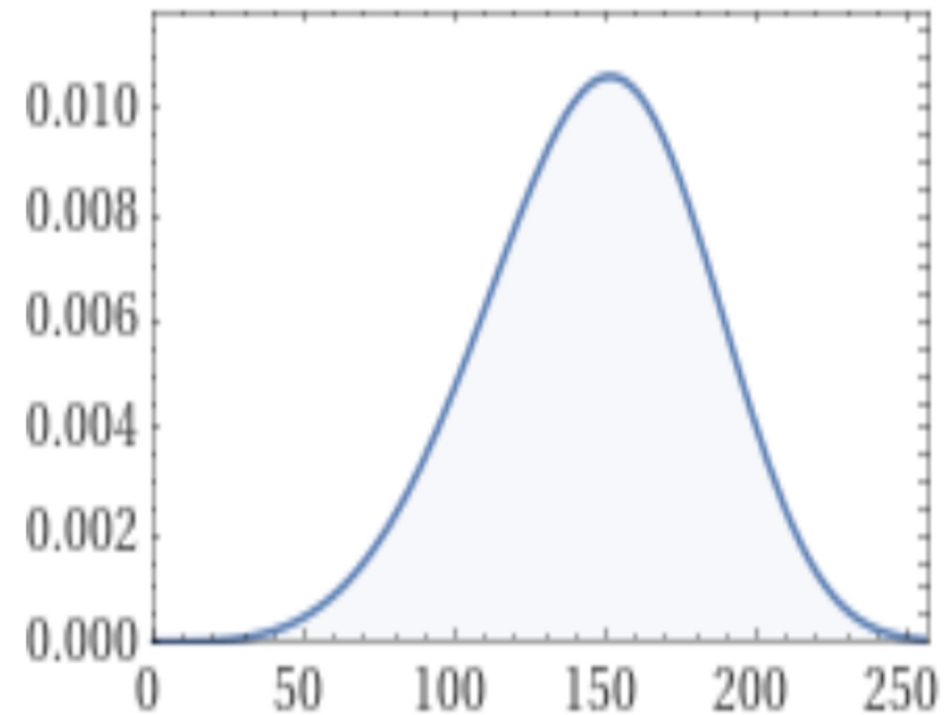
Raten er **ikke** konstant som funksjon av tid!

- Samme type fordeling:
 - levetiden til en vaskemaskin
 - tiden en bruker på en nettside

Popcorn popping



Weibull(4.5, 160)



<https://stackoverflow.com/questions/17481672/fitting-a-weibull-distribution-using-scipy>