Velkommen!

Statistikk for ingeniører

Digital plenumstime UKE 6

Vi starter klokka 15:15

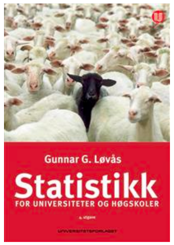
Du kan skrive inn spørsmål direkte til oss i chat!

Vi skal også bruke studentresponssystemet **Mentimeter** i dag.

Det blir gjort opptak av denne timen :)

Thea Bjørnland, Institutt for matematisk fag, NTNU (Trondheim)

Uke 6: Normalfordelingen og sentralgrenseteoremet



Pensum i læreboka: Kapittel 5.7 og 5.8

Mandag
15.15-16.00

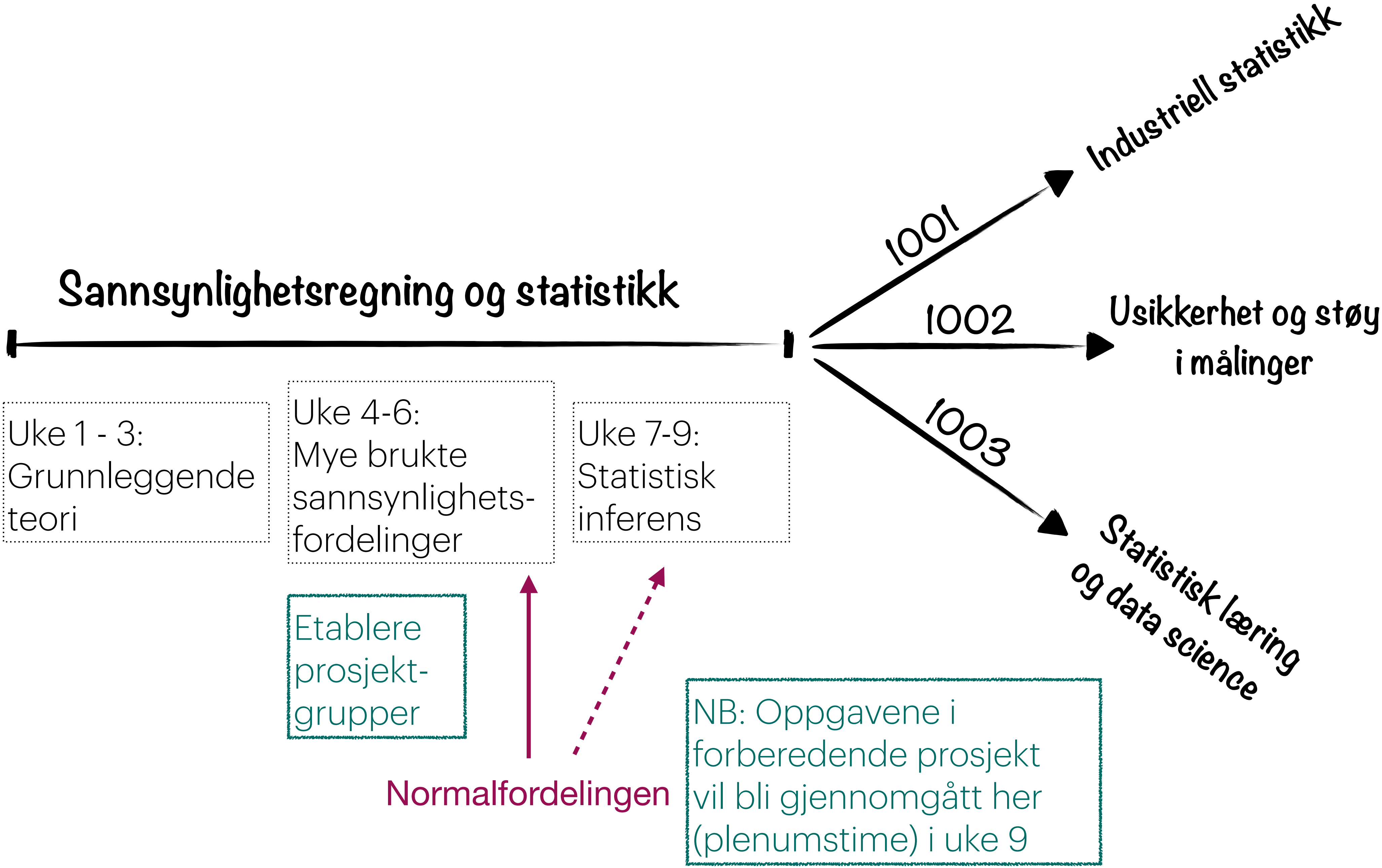
temavideoer
(ca 3 x 15 min)

digital plenumstime

campus-forelesning

STACK-øving

Hvor er vi nå? Og hvor skal vi?



Uke 4-6: Fordelinger

Uke 4: Binomisk forsøksrekke → Binomisk fordeling

Uke 4: Binomisk forsøksrekke → Geometrisk fordeling

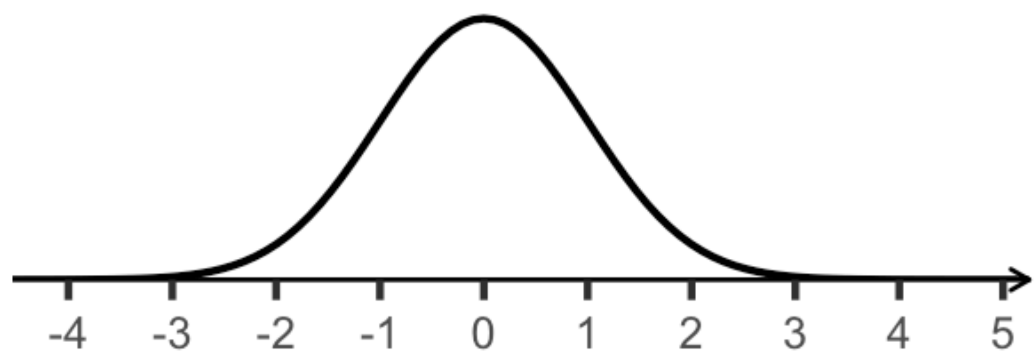
Uke 5: Poissonprosess → Poissonfordeling

Uke 5: Poissonprosess → Eksponensialfordeling

Eksponensialfordeling → Weibullfordeling

Uke 6: Normalfordelingen

- Målefeil for et vanlig måleinstrument
- Fysiske størrelser (høyde, vekt, osv)
- Boligpriser til leiligheter
- osv osv



normalfordeling

Store norske leksikon / Realfag / Matematikk / Sannsynlighet og statistikk / Sannsynlighetsteori

Normalfordeling er en sannsynlighetsfordeling som blir mye brukt i matematisk statistikk. Grunnen er dels at visse typer av observerte data er tilnærmet normalfordelt, og dels at normalfordelingen opptrer som grensefordeling for en rekke andre typer fordelinger.

I dag :
- Eks med normalapproks. binomisk
- standard normalfordeling

Eks 1: Normaltilnærming til binomisk fordeling

$X \sim \text{binom}(n=100,\ p=0.4)$

binomisk forsøksrekke der $p=0{,}4$ i alle forsøk

$n=100$ uavhengige forsøk

$$P(X \leq 35) = \sum_{x=0}^{35} P(X=x) = P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=35)$$

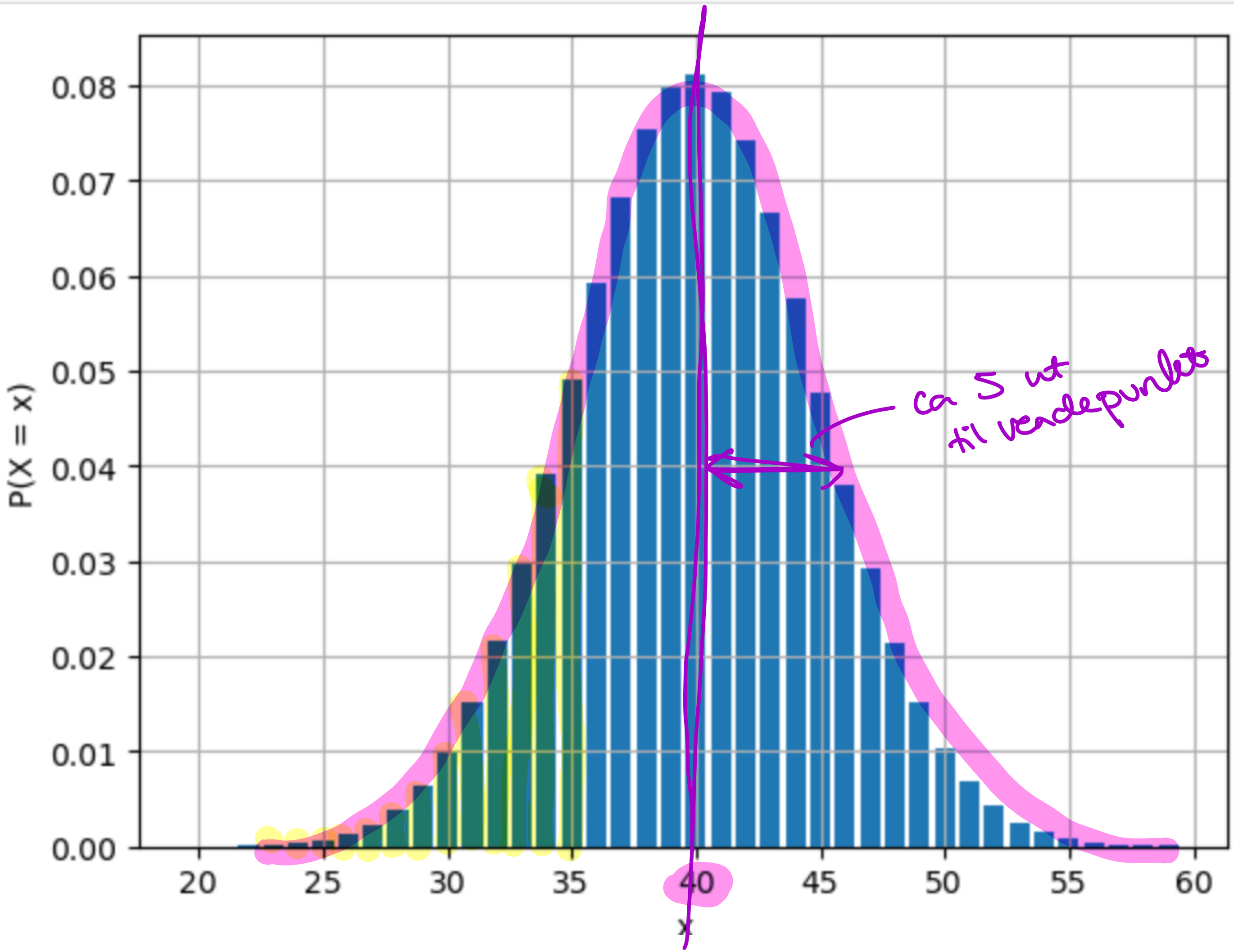
$$\approx 0.1795$$

(visualisering →)

Eks 1: Normaltilnærming til binomisk fordeling

```
n = 100   # antall forsøk
p = 0.4  # sannsynligheten for suksess
```

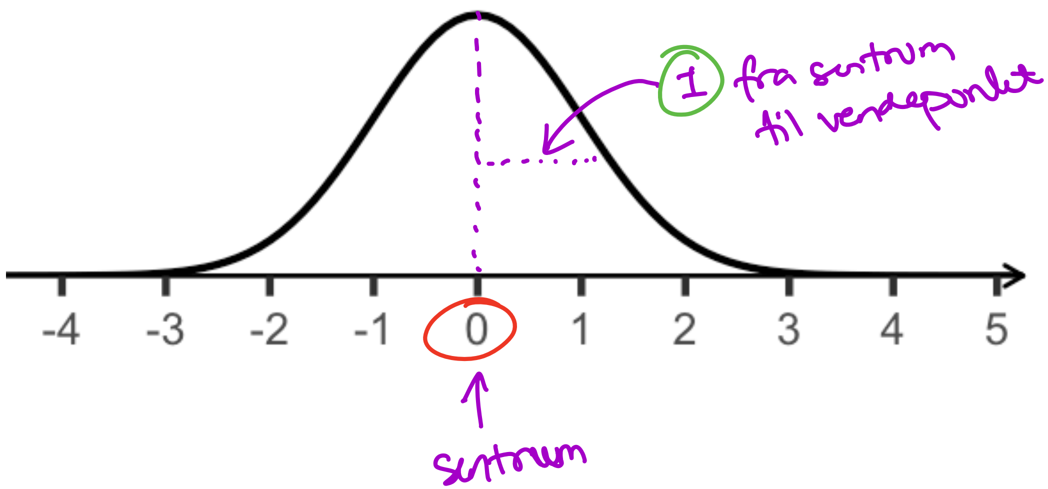
```
plt.bar(range(20,60), stats.binom.pmf(range(20, 60), n,p))
plt.grid(); plt.ylabel("P(X = x)"); plt.xlabel("x")
plt.show()
```



$= P(X \leq 35)$

Fristende å legge på en normalfordeling

Eks 1: Normaltilnærming til binomisk fordeling



$\rightarrow$ $N(\underline{0}, \underline{1})$ - fordeling

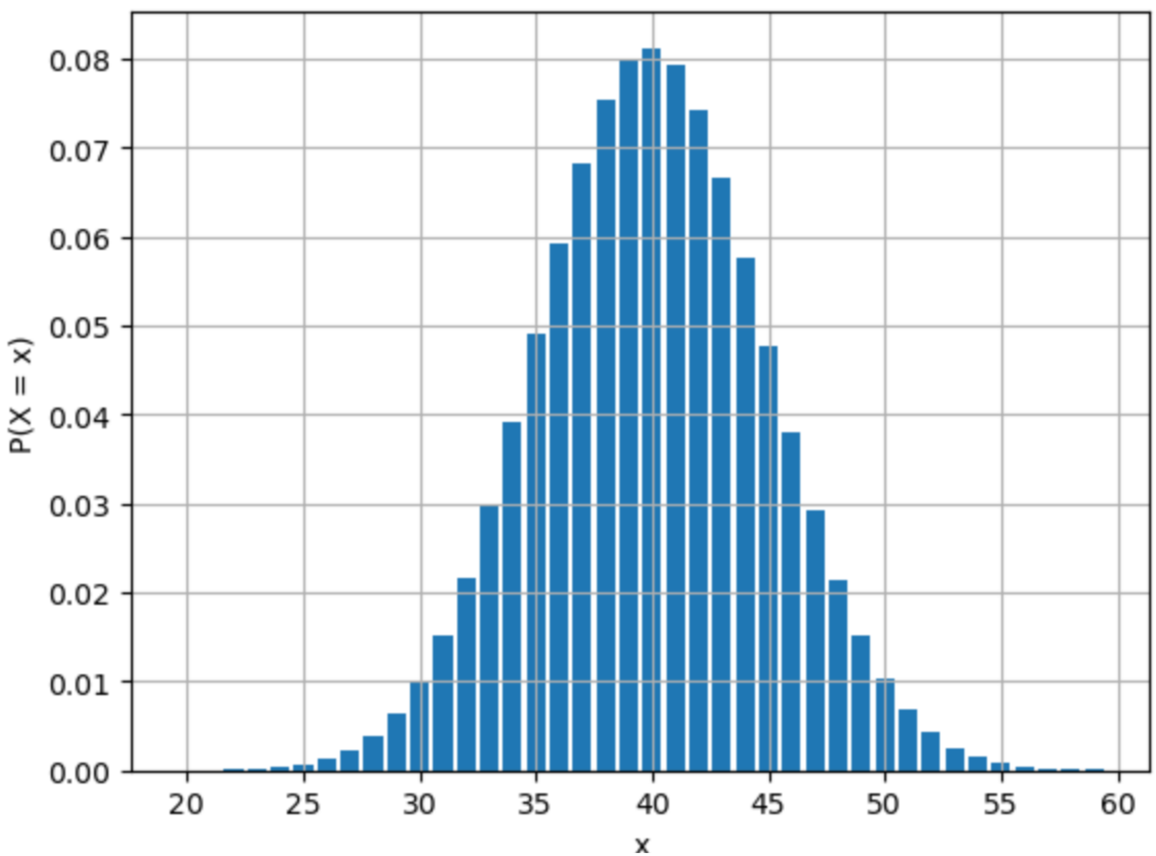
2 parametere i normalfordeling

- μ (her $\mu = 0$) forventningsverdi
- σ (her $\sigma = 1$) standardavvik

Eks 1: Normaltilnærming til binomisk fordeling

her $\mu=0$, $\sigma=1$

hva bør μ og σ være her? 40? og 5?



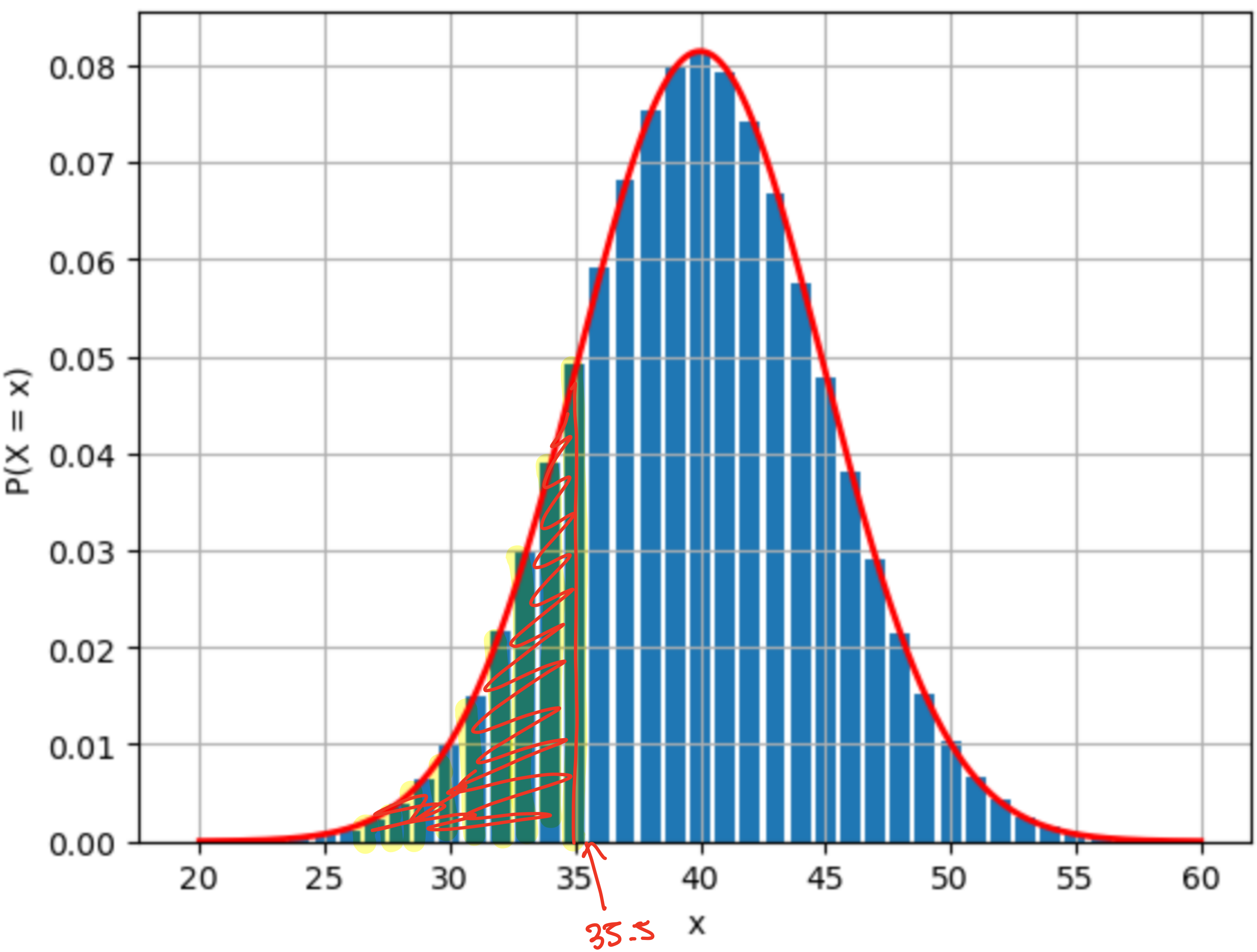
husk $X \sim \text{binom}(n=100, p=0.4)$

$$E(X) = np = 100 \cdot 0.4 = \underline{40}$$

$$SD(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.4 \cdot 0.6} \approx 4.9$$

La oss da prøve med $N(40, 4.9) \rightarrow$

Eks 1: Normaltilnærming til binomisk fordeling



blå: $P(X=x)$ for $X \sim \text{binom}(n=100, p=0.4)$

rød: $f(y)$ for $Y \sim N(40, 4.9)$

$P(X \le 35) = 0.1795$

$P(Y \le 35) = 0.1538$ (litt dårlig?)

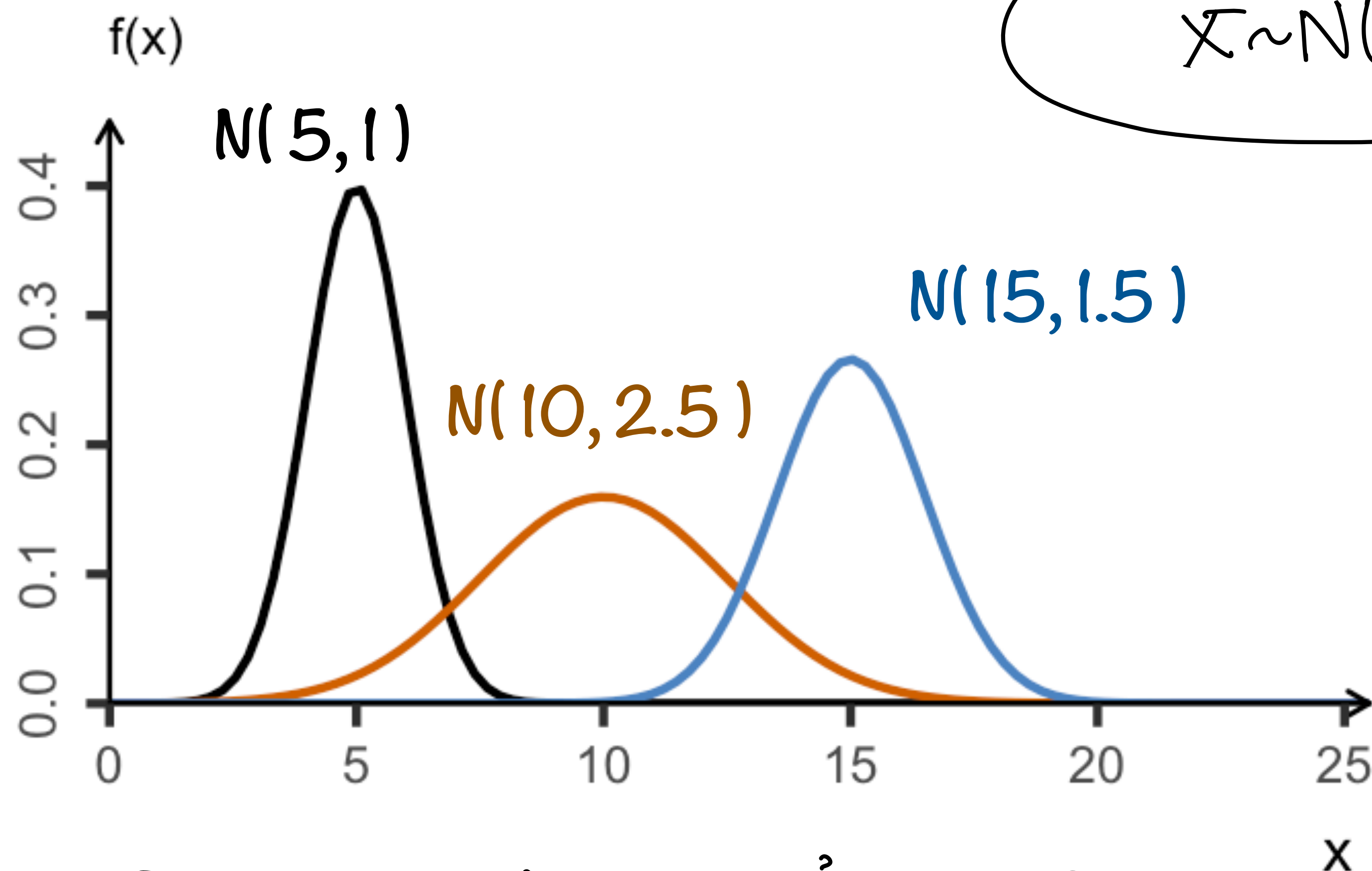
Fikk bare med $\frac{1}{2}$ stolpe ved $x=35$

$P(Y \le \underline{35.5}) = 0.1792$

kjekt triks når diskret fordeling tilnærmes med en kontinuerlig.

Eks 2: Standard normalfordeling og tabeller

$X \sim N(\mu, \sigma)$



NB: Dersom X er normalfordelt så er $aX+b$ også normalfordelt

$\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}$ er normalfordelt (standard normalfordelt, $N(0,1)$) $\rightarrow$

Eks 2: Standard normalfordeling og tabeller

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = E\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = E\left(\frac{X}{\sigma}\right) - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{E(X)}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \rightarrow SD(X) = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \sim N(0,1)$$

Eks 2: Standard normalfordeling og tabeller

Fra eks 1

$$X \sim N(\overset{\mu}{40}, \overset{\sigma}{4.9})$$

$$P(X \le 35.5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \le \frac{35.5 - \mu}{\sigma} \right)$$

Pga avrunding 2 des.

$$= P\left(Z \le \frac{35.5 - 40}{4.9} \right) \approx P(Z \le -0.92) = 0.1788$$

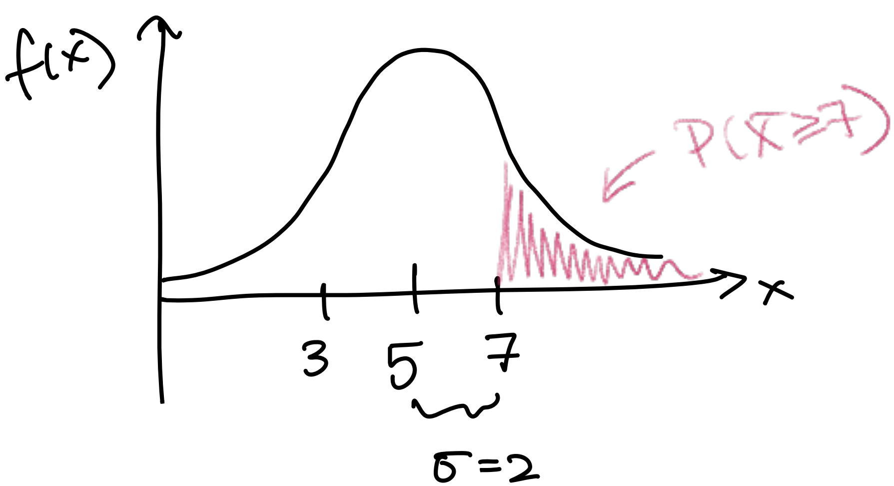
$$\left(\begin{array}{l} P(X \le 35) = 0.1795 \\ P(Y \le 35.5) = 0.1792 \end{array} \right)$$

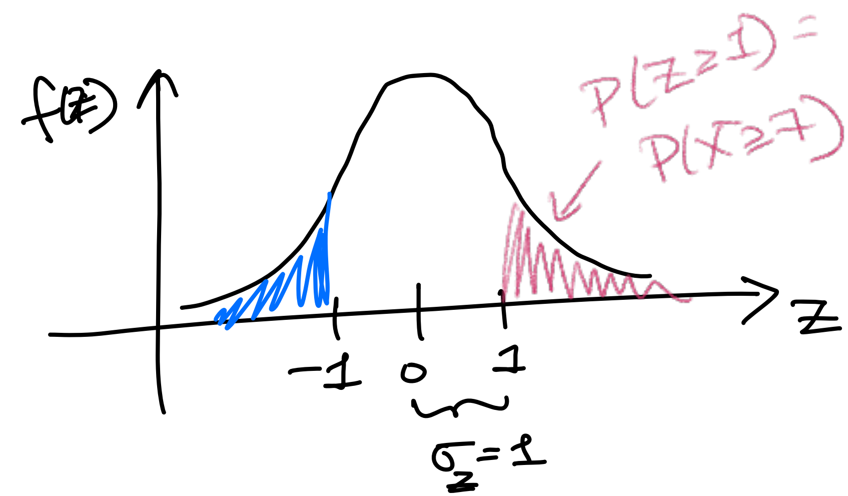
STANDARD NORMALFORDELING: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

z	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Eks 2: Standard normalfordeling og tabeller

Nytt eks: $X \sim N(5, 2)$ $\qquad P(X \ge 7) = ?$





$$P(X \ge 7) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{7-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-5}{2} \ge \frac{7-5}{2}\right) =$$

$$P\left(Z \ge \frac{2}{2}\right) = P(Z \ge 1)$$

PGA symmetri: $P(Z \le -1) = P(Z \ge 1)$

↳ tabell $= 0.1587 \approx \underline{\underline{0.16}}$

Alt:

$P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1)$

$= 1 - 0.8413$

$\approx \underline{0.16}$.

STANDARD NORMALFORDELING: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

z	_ . _0	_ . _1	_ . _2	_ . _3	_ . _4	_ . _5	_ . _6	_ . _7	_ . _8	_ . _9
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379

STANDARD NORMALFORDELING: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

z	_._0	_._1	_._2	_._3	_._4	_._5	_._6	_._7	_._8	_._9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177