

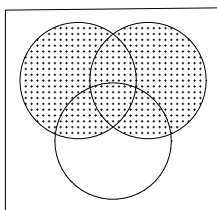
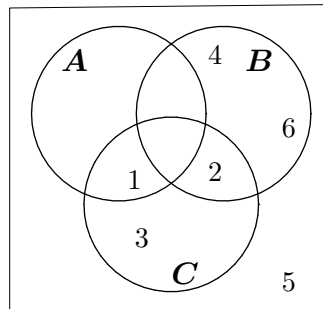
LØSNING, noen oppgaver fra kap.3 i Løvås: Statistikk

Oppgave 3

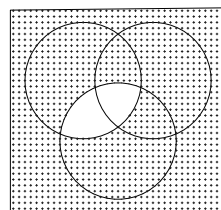
Siden en av de åtte mulighetene er bare gutter er $P((GGG)) = 1/8 = 0.125$

Under forutsetning at alle utfallene er like sannsynlig. I praksis er sannsynligheten for guttefødsel ca. 0.51, og da er $P((GGG)) = 0.51^3 = \underline{0.133}$

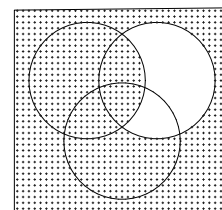
Oppgave 6



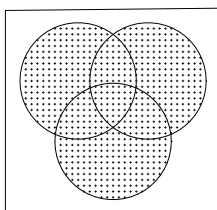
$A \cup B$



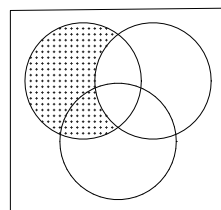
$\overline{A \cap C}$



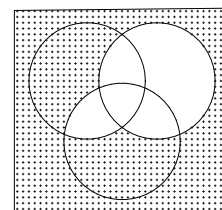
$A \cup \overline{B}$



$A \cup B \cup C$



$A \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap C} \cap \overline{B}$

$A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$,	"Ener eller partall",	$P(A \cup B) = 4/6 = \underline{\underline{2/3}}$
$\overline{A \cap C} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,	"Mer enn en",	$P(\overline{A \cap C}) = \underline{\underline{5/6}}$
$A \cup \overline{B} = \{1, 3, 5\}$,	"Oddetall",	$P(A \cup \overline{B}) = 3/6 = \underline{\underline{1/2}}$
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$,	"Ikke femmer",	$P(A \cup B \cup C) = \underline{\underline{5/6}}$
$A \cap \overline{B} = \{1\}$,	"Ener",	$P(A \cap \overline{B}) = \underline{\underline{1/6}}$
$\overline{A \cap C} \cap \overline{B} = \{3, 5\}$,	"Oddetall større enn en",	$P(\overline{A \cap C} \cap \overline{B}) = 2/6 = \underline{\underline{1/3}}$

Oppgave 11

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.08 + 0.06 - 0.005 = \underline{\underline{0.135}}$$

Oppgave 12

Opptelling gir at

$$P(A) = P(\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}) = 6/36 = \underline{\underline{1/6 \approx 0.1667}},$$

$$P(B) = P(\{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}) = 11/36$$

og $P(A \cap B) = P(\{(1, 6), (6, 1)\}) = 2/36 = 1/18$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/18}{11/36} = \underline{\underline{2/11 \approx 0.1818}}$$

Sannsynligheten for “sum sju” øker altså litt når vi vet at det er minst en sekser.

Oppgave 13

Sanns. for at vilkårlig elev kan spille gitar: $P(D) = (6 + 10)/(13 + 15) = \underline{\underline{4/7}}$.

Sanns. for at vilkårlig elev er jente og kan spille gitar: $P(D \cap J) = 6/(13 + 15) = \underline{\underline{3/14}}$.

Sanns. for at eleven kan spille gitar når vi vet det er jente: $P(D|J) = \underline{\underline{6/13}}$.

Alternativ: $P(D|J) = P(D \cap J)/P(J) = \frac{3}{14}/\frac{13}{28} = 6/13$.

Sanns. for at første elev ikke kan spille gitar: $P(\overline{D}_1) = 1 - 4/7 = 3/7$.

Sanns. for at heller ikke den neste kan spille gitar, når den første ikke kunne det. Da er det igjen 27 elever hvorav 11 ikke kan spille gitar, så $P(\overline{D}_2|\overline{D}_1) = 11/27$.

Sannsynligheten for at ingen av de to kan spille gitar:

$$P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2) = P(\overline{D}_1) P(\overline{D}_2|\overline{D}_1) = \frac{3}{7} \frac{11}{27} = \underline{\underline{\frac{11}{63}}}$$

Vi tenker rekkefølge på de to vi velger ut, og to muligheter oppfyller betingelsen: Første er jente og kan spille gitar, andre er gutt og kan spille gitar: $(D_1 \cap J) \cap (D_2 \cap G)$, og første er gutt og kan spille gitar, andre er jente og kan spille gitar: $(D_1 \cap G) \cap (D_2 \cap J)$. Summen av sannsynligheten for disse disjunkte hendelsene er svaret. Vi har produktregel for disse hendelsene der vi i andre faktor må regne blant de gjenværende etter første valg (dvs. betinget sannsynlighet, jfr. urnemodell):

$$\begin{aligned} P((D_1 \cap J) \cap (D_2 \cap G)) &= \frac{6}{28} \frac{10}{27} = \frac{5}{63} \\ P((D_1 \cap G) \cap (D_2 \cap J)) &= \frac{10}{28} \frac{6}{27} = \frac{5}{63} \\ P(((D_1 \cap J) \cap (D_2 \cap G)) \cup ((D_1 \cap G) \cap (D_2 \cap J))) &= \frac{9}{140} + \frac{9}{140} = \underline{\underline{\frac{10}{63}}} \end{aligned}$$

Fasiten i læreboka gir alternativ løsning for de to siste, basert på opptelling via binomialkoeffisienter.

Oppgave 15

La F være fint vær, R regn og S snø, og U ulykke. Siden ulykke eventuelt skjer ved en av de tre værtypene (alle mulige værtyper er dekket, siden summen av sannsynlighetene for dem er 1), kan vi bruke loven om total sannsynlighet:

$$P(U) = P((U \cap F) \cup (U \cap R) \cup (U \cap S)) = P(F)P(U|F) + P(R)P(U|R) + P(S)P(U|S) =$$

$$0.60 \cdot 0.001 + 0.39 \cdot 0.003 + 0.01 \cdot 0.009 = \underline{\underline{0.00186}}$$

I andre spørsmål kan vi bruke Bayes' formel direkte, eller et lite resonnement som gir denne:

$$P(S|U) = \frac{P(S \cap U)}{P(U)} = \frac{P(S)P(U|S)}{P(U)} = \frac{0.01 \cdot 0.009}{0.00186} = \underline{\underline{0.048}}$$

Oppgave 18

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

Vi har $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0.65$ og $P(A|\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.30$, mens de andre er oppgitt:

$$P(B|A) = \frac{0.85 \cdot 0.35}{0.85 \cdot 0.35 + 0.30 \cdot 0.65} = \underline{\underline{0.60}}$$

Oppgave 28

I forhold til urnemodell kan vi tenke på dette som *ordnet* utvalg *med* tilbakelegging (to kuler, en for uthevet og en for ikke uthevet trekkes $N = 6$ ganger. Antall kombinasjoner er da $2^6 = 64$. Siden *ingen* uthevet ikke gir noe lesbart tegn er antall mulige tegn $2^6 - 1 = \underline{\underline{63}}$.

Oppgave 30

I forhold til urnemodell kan vi tenke på dette som *ordnet* utvalg *uten* tilbakelegging. Antall kombinasjoner er dermed $89 \cdot 88 \cdot 87 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 89! = \underline{\underline{1.65 \cdot 10^{136}}}$.