LØSNING, noen oppgaver fra kap. 4 i Løvås: Statistikk

Oppgave 2

Den minste mulige verdien er 3 (tre enere), den største 18 (tre seksere). Alle tall i mellom er mulige, så $\underline{\underline{V_x = \{3, 4, 5, \ldots, 18\}}}$.
Sannsynlighetsdiagrammet er symmetrisk om midtpunktet ($x = 10.5$). Det er nok en feil i oppgaveteksten og fasiten at midtpunktet settes til 11.5.
På grunn av symmetrien er forventningsverdien midtpunktet, $\underline{\underline{\mathrm{E}\left(X\right) = 10.5}}$
Her antar jeg spørsmålet skulle vært $\mathrm{P}\left(X < 11\right)$ (eller $\mathrm{P}\left(X \leq 10\right)$), slik at vi fra symmetrien kan slutte at $\underline{\underline{\mathrm{P}\left(X < 11\right) = 1/2}}$

Oppgave 5

$$\mathrm{E}\left(X\right) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.31 + 2 \cdot 0.14 + 3 \cdot 0.07 + 4 \cdot 0.04 = \underline{\underline{0.92}}$$

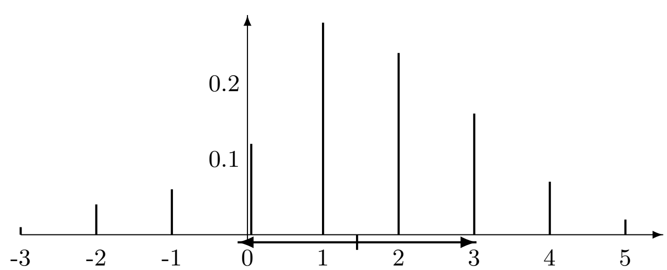
$$\mathrm{Var}\left(X\right) = 0^2 \cdot 0.45 + 1^2 \cdot 0.31 + 2^2 \cdot 0.14 + 3^2 \cdot 0.07 + 4^2 \cdot 0.04 - 0.96^2 = \underline{\underline{1.13}} \quad (\sigma = 1.06)$$

$$\mathrm{P}\left(X > 2\right) = \mathrm{P}\left(X = 3\right) + \mathrm{P}\left(X = 4\right) = 0.07 + 0.03 = \underline{\underline{0.10}}$$

$$\mathrm{P}\left(X < 2\right) = \mathrm{P}\left(X = 0\right) + \mathrm{P}\left(X = 1\right) = 0.45 + 0.31 = \underline{\underline{0.76}}$$

Oppgave 6

y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}\left(Y = y\right)$	0.01	0.04	0.06	0.12	0.28	0.24	0.16	0.07	0.02
$\mathrm{P}\left(Y \leq y\right)$	0.01	0.05	0.11	0.23	0.51	0.75	0.91	0.98	1.00



$$\mathrm{E}\left(Y\right) = -3 \cdot 0.01 - 2 \cdot 0.04 - 1 \cdot 0.06 + 0 \cdot 0.12 + 1 \cdot 0.28 + 2 \cdot 0.24 + 3 \cdot 0.16 + 4 \cdot 0.07 + 5 \cdot 0.02 = \underline{\underline{1.45}}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(Y\right) = {} & (-3)^2 \cdot 0.01 + (-2)^2 \cdot 0.04 + (-1)^2 \cdot 0.06 + 0^2 \cdot 0.12 + 1^2 \cdot 0.28 + 2^2 \cdot 0.24 + \\ & + 3^2 \cdot 0.16 + 4^2 \cdot 0.07 + 5^2 \cdot 0.02 - 1.45^2 = \underline{\underline{2.51}} \qquad (\sigma_Y = 1.58)\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\left(0 < Y \leq 4\right) = F(4) - F(0) = 0.98 - 0.23 = \underline{\underline{0.75}}$$

Oppgave 10

$$\mathrm{E}\left(Z\right) = -5\mathrm{E}\left(X\right) + 8\mathrm{E}\left(Y\right) = -5 \cdot 0.92 + 8 \cdot 1.45 = \underline{\underline{7.0}}$$

$$\mathrm{Var}\left(Z\right) = (-5)^2 \mathrm{Var}\left(X\right) + 8^2 \mathrm{Var}\left(Y\right) = 25 \cdot 1.13 + 64 \cdot 2.51 = \underline{\underline{189}} \qquad (\sigma_Z = 13.7)$$

Oppgave 15

Det ligger i beskrivelsen at sannsynlighetstettheten er på formen $f(x) = a - bx$ i intervallet $[0, 9]$, 0 ellers. Parametrene a og b må bestemmes. Siden sannsynligheten er 1 for at nøkkelen er mistet i intervallet $[0, 9]$ må vi ha

$$\int_0^9 a - bx = 1 \iff \left[ax - \frac{1}{2}bx^2\right]_0^9 = 1 \iff 9a - \frac{81}{2}b = 1$$

Vi har dessuten (fra figuren) at $f(9) = 0$, det vil si $0 = a - 9b$. Dette gir to likninger til å finne a og b:

$$\begin{aligned} 9a - \tfrac{81}{2}b &= 1 \\ a - \quad 9b &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} a &= \tfrac{2}{9} \\ b &= \tfrac{2}{81} \end{aligned}$$

(Likningssystemet kan f.eks løses ved Gausseliminasjon, men når vi som her har kandidat til svar er vel det enkleste å sette inn disse verdiene og sjekke at likningssystemet er oppfyllt for disse.)

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{2}{9} - \frac{2}{81}t\,dt = \left[\frac{2}{9}t - \frac{1}{81}t^2\right]_0^x = \underline{\underline{\frac{2}{9}x - \frac{1}{81}x^2}}$$

$$\mathrm{P}\left(4.6 < X \le 6.3\right) = F(6.3) - F(4.6) = \left(\frac{2}{9}\cdot 6.3 - \frac{1}{81}\cdot 6.3^2\right) - \left(\frac{2}{9}\cdot 4.6 - \frac{1}{81}\cdot 4.6^2\right) = \underline{\underline{0.149}}$$

$$\mathrm{E}\left(X\right) = \int_0^9 xf(x)\,dx = \int_0^9 \frac{2}{9}x - \frac{2}{81}x^2\,dx = \left[\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{243}x^3\right]_0^9 = \underline{\underline{3.0}}$$

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \int_0^9 x^2 f(x)\,dx - \mathrm{E}\left(X\right)^2 = \int_0^9 \frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{81}x^3\,dx - 3.0^2 = \left[\frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{162}x^4\right]_0^9 - 9.0 = \underline{\underline{4.5}} \quad (\sigma = 2.12)$$

Oppgave 19

Vi finner f.eks marginalsannsynligheten $\mathrm{P}\left(X = 0\right)$ ved å summere sannsynlighetene for $X = 0$ sammen med $Y = 0$, $Y = 1$ og $Y = 2$. Dette kan oppsummeres til

x	0	1
$\mathrm{P}\left(X = x\right)$	0.4	0.6

y	0	1	2
$\mathrm{P}\left(Y = y\right)$	0.4	0.3	0.3

$$\mathrm{E}\left(X\right) = 0\cdot 0.4 + 1\cdot 0.6 = \underline{\underline{0.6}} \quad \mathrm{E}\left(Y\right) = 0\cdot 0.4 + 1\cdot 0.3 + 2\cdot 0.3 = \underline{\underline{0.9}}$$

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = 0^2\cdot 0.4 + 1^2\cdot 0.6 - 0.6^2 = \underline{\underline{0.24}} \quad \mathrm{E}\left(Y\right) = 0^2\cdot 0.4 + 1^2\cdot 0.3 + 2^2\cdot 0.3 - 0.9^2 = \underline{\underline{0.69}}$$

Hvis X og Y er uavhengige er $\mathrm{P}\left(X = x \cap Y = y\right) = \mathrm{P}\left(X = x\right)\mathrm{P}\left(Y = y\right)$ for alle par (x, y), og vi ville hatt følgende matrise for punktsannsynlighet:

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0.6\cdot 0.4 & 0.6\cdot 0.3 & 0.6\cdot 0.3 \\ 1 & 0.4\cdot 0.4 & 0.4\cdot 0.3 & 0.4\cdot 0.3 \end{array} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0.24 & 0.18 & 0.18 \\ 1 & 0.16 & 0.12 & 0.12 \end{array}$$

Denne er ikke den samme som i oppgaveteksten, så vi konkluderer med at X og Y er <u>*IKKE uavhengige*</u>.
Fordeling til W:

w	-1	0	1	2
Mulige kombinasjoner	$(1, 0)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 1), (2, 1)$	$(0, 2)$
Utregning	0.3	$0.1 + 0.2$	$0.1 + 0.1$	0.2
$\mathrm{P}\left(W = w\right)$	0.3	0.3	0.2	0.2

$$\mathrm{E}\left(W\right) = -1\cdot 0.3 + 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.2 + 2\cdot 0.2 = \underline{\underline{0.3}}$$

Vi ser $\mathrm{E}\left(W\right) = \mathrm{E}\left(Y\right) - \mathrm{E}\left(X\right)$, som "teorien sier" gjelder generelt, selv om det ikke er uavhengighet.

$$\mathrm{Var}\left(W\right) = (-1)^2\cdot 0.3 + 0^2\cdot 0.3 + 1^2\cdot 0.2 + 2^2\cdot 0.2 - 0.3^2 = \underline{\underline{1.21}}$$

Som vi ser er forskjellig fra $\mathrm{Var}\left(Y\right) + \mathrm{Var}\left(X\right)$, var det uavhengighet ville vi hatt $\mathrm{Var}\left(Y - X\right) = \mathrm{Var}\left(Y\right) + \mathrm{Var}\left(X\right)$.

Oppgave 25

$$\mathrm{E}\,(X) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = \underline{\underline{0.6}}. \quad \mathrm{E}\,(Y) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 = \underline{\underline{1.0}}$$

Hvis $Z = X \cdot Y$ er mulige verdier av Z lik $z = 0$ for kombinasjonene $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$ og $(1, 0)$, $z = 1$ for $(1, 1)$ og $z = 2$ for $(1, 2)$. Dermed er punktsannsynligheten $\mathrm{P}\,(XY = 0) = 0.7$, $\mathrm{P}\,(XY = 1) = 0.0$, $\mathrm{P}\,(XY = 2) = 0.3$, og

$$\mathrm{E}\,(X \cdot Y) = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.0 + 2 \cdot 0.3 = \underline{\underline{0.6}}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) = 0.6 - 0.6 \cdot 1.0 = \underline{\underline{0}} \quad \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)\,\mathrm{Var}\,(Y)}} = \underline{\underline{0}}$$

Vi har *ikke* uavhengighet, da $\mathrm{P}\,(X = x \cap Y = y)$ ikke er lik $\mathrm{P}\,(X = x)\,\mathrm{P}\,(Y = y)$, for eksempel er $\mathrm{P}\,(X = 0 \cap Y = 0) = 0.1$, mens $\mathrm{P}\,(X = 0)\,\mathrm{P}\,(Y = 0) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$.

Vi kan altså ha *ukorrelerte* variable som ikke er uavhengige.

Uavhengige variable er alltid ukorrelerte, men det motsatte gjelder altså ikke.

Hans Petter Hornæs, 20.12.01