

LØSNING, noen oppgaver fra kap. 5 i Løvås: Statistikk

Oppgave 2

Dette er en binomisk fordeling, $X \sim \text{Bin}(8, 0.2)$, slik at

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} 0.2^2 (1 - 0.2)^{8-2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} 0.2^2 0.8^6 = 0.294$$

Da er

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.294 + \binom{8}{3} 0.2^3 0.8^5 + \binom{8}{4} 0.2^4 0.8^4 + \binom{8}{5} 0.2^5 0.8^3 \\ &= 0.495 \end{aligned}$$

Et alternativ er å bruke $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$ og slå opp de kumulative binomiske sannsynligheter $P(X \leq k)$ i tabellen på side 575 i Løvås. Forventingen regnes ut ved setningen

$$E(X) = np = 8 * 0.2 = 1.6$$

Oppgave 6

Vi skal regne ut sannsynligheten $P(115 \leq X \leq 150) = P(X \leq 150) - P(X \leq 114)$, hvor $X \sim \text{Bin}(900, 0.15)$. Det er upraktisk å gjøre for hånd, men ved hjelp av Python kan vi regne det ut:

```
stats.binom.cdf(150,900,0.15) - stats.binom.cdf(114,900,0.15)
```

som gir svaret 0.899. (Vi skal se senere at et tilnærmet svar kan regnes ut for hånd ved hjelp av sentralgrenseteoremet)

Oppgave 8

En litt mer krevende oppgave. Kursen etter n dager er en stokastisk variabel $Y = 25 + X_1 + X_2 + \dots + X_n$, hvor X_i er stokastiske variabler som er enten 1 eller -1 med sannsynligheten 0.5.

Legg merke til at $X_i = 2Z_i - 1$, hvor Z_i er binomiske forsøk med $p = 0.5$, dvs $Z_i \sim \text{Bin}(1, 0.5)$. Derfor er

$$Y = 25 + (2Z_1 - 1) + \dots + (2Z_n - 1) = 25 + 2(Z_1 + \dots + Z_n) - n = (25 - n) + 2Z,$$

hvor $Z = Z_1 + \dots + Z_n \sim \text{Bin}(n, 0.5)$.

Kursen etter 3 dager er $Y = 22 + 2Z$, hvor $Z \sim \text{Bin}(3, 0.5)$.

Etter 5 dager er $P(Y = 28) = P(20 + 2Z = 28) = P(Z = 4)$, og vi regner ut

$$P(Z = 4) = \binom{5}{4} 0.5^4 0.5^1 = 5 * 0.5^5 = 0.156$$

Etter 8 dager er $P(Y = 23) = P(17 + 2Z = 23) = P(Z = 3)$, og

$$P(Z = 3) = \binom{8}{3} 0.5^6 0.5^2 = 56 * 0.5^8 = 0.219$$

Oppgave 15

Sannsynlighetsfordelingen er bestemt av at det er $x - 1$ dager på rad der hun ikke lykkes, $p = 1 - 0.001 = 0.999$, og 1 dag der hun lykkes, $p = 0.001$:

$$P(X = x) = (1 - 0.001)^{x-1} 0.001$$

Dette er den geometriske fordelingen med forventningsverdi $E(X) = 1/0.001$ og varians $\text{Var}(X) = (0.999)/0.001^2$:

$$\mu = 10^3 \text{ dager} \quad \sigma = 999.5 \text{ dager}$$

For å summere opp sannsynlighetene for å lykkes i løpet av et år kan du bruke summen til geometrisk rekke:

$$P(X \leq 365) = 0.001(1 + 0.999 + 0.999^2 + \dots) = 0.001 \frac{1 - 0.999^{365}}{1 - 0.999} = 1 - 0.999^{365} = 0.306$$

Alternativt kan du se på sannsynlighet for ikke å lykkes i løpet av et år og bruke komplementet:

$$P(X \leq 365) = 1 - 0.999^{365} = 0.306$$

Obs: setningen $P(X \leq x) = 1 - (1 - p)^x$ for sannsynlighetsfunksjon til den geometriske fordelingen er å finne i formelarket, slik at utledningene ovenfor er ikke nødvendig.