Eksamen 5. desember 2012

Løsningsforslag - del 1

Oppgave 1

a) Denne oppgaven kan løses veldig lett ved å skrive opp utfallsrommet. La M stå for mynt og K for kron. Vi har da:

KKK	KKM	KMK	MKK
KMM	MKM	MMK	MMM

Vi kan da finne de ulike sannsynlighetene ved å bruke gunstige/mulige, $p = \frac{g}{m}$:

Utfall	Gunstige [g]	Sannsynlighet $[\frac{g}{m}]$
A:	KKK KMK MMK MKK	$P(A) = \frac{1}{2}$
B:	KKK KKM KMK MKK KMM MKM MMK	$P(B) = \frac{7}{8}$
C:	KKK KMK MKM MMM	$P(B) = \frac{1}{2}$
$\overline{A} \cup B$:	KKK KKM KMK MKK KMM MKM MMK MMM	$P(\overline{A} \cup B) = 1$
$A \cap C$:	KKK KMK	$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$
$A\|B$:	KKK KMK MKK MMK	$P(A\|B) = \frac{4}{7}$

I den siste sannsynligheten får vi $m = 7$ pga. at vi har en betinget sannsynlighet.

b) X er binomisk fordelt fordi:

- Sannsynligheten for å få mynt, p, er den samme for hvert kast.
- Vi registrerer kun om vi får mynt eller ikke.
- Hvert kast er uavhengig av hverandre.

c) Fra formelarket ser vi at vi kan normaltilnærme når

$$np(1-p) \geq 10 \tag{1}$$

Vi får da at

$$n \geq \frac{10}{p(1-p)} = \frac{10}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})} = \underline{\underline{40}} \tag{2}$$

d) Vi har at $X \sim bin(n,p) = bin(100, 0.5) \approx N(np, np(1-p) = N(50, 5^2)$. Ved å bruke den binomiske fordelingen, har vi at

$$P(X > 45) = 1 - P(X \leq 45) = 1 - \sum_{x=0}^{45} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \underline{\underline{0.8159}} \tag{3}$$

der vi brukte kalkulatoren til å beregne den binomiske summen. Ved normaltilnærming blir samme sannsynlighet:

$$\begin{aligned} P(X > 45) = 1 - P(X \leq 45) &= \qquad (4) \\ 1 - G(\frac{45-50}{5}) = 1 - G(-1) = G(1) &= \underline{\underline{0.8413}} \qquad (5) \end{aligned}$$

Vi kunne forbedret denne tilnærmelsen ved å bruke heltallskorreksjon, men dette var ikke påkrevd i oppgaven:

$$P(X > 45) = 1 - G(\frac{45 + 0.5 - 50}{5}) = G(0.9) = \underline{\underline{0.8159}} \tag{6}$$

e) Vi har $P(D) = \frac{2}{3}$ og $P(\overline{D}) = \frac{1}{3}$ *(NB! I oppgavesettet står det "den vanlige mynten", noe som kan gjøre det lett å tru at det kun er én vanlig mynt. Studenter som har gjort denne feilen, vil ikke få trekk)*. Dersom vi velger en vanlig mynt , vil sannsynligheten for å få minst én kron være:

$$\begin{aligned} P(B|D) &= P(X \geq 1|D) = 1 - P(X = 0|D) && (7) \\ &= 1 - 0.5^3 = 0.875 && (8) \end{aligned}$$

Dersom vi velger en juksemynt, derimot, får vi sannsynligheten:

$$\begin{aligned} P(B|\overline{D}) &= P(X \geq 1|\overline{D}) = 1 - P(X = 0|\overline{D}) && (9) \\ &= 1 - 0.25^3 = 0.984375 && (10) \end{aligned}$$

Vi bruker Bayes lov, samt loven for total sannsynlighet, og får:

$$\begin{aligned} P(D|B) &= \frac{P(D)P(B|D)}{P(B)} && (11) \\ &= \frac{P(D)P(B|D)}{P(D)P(B|D) + P(\overline{D})P(B|\overline{D})} && (12) \\ &= \frac{\frac{2}{3} * 0.875}{\frac{2}{3} * 0.875 + \frac{1}{3} * 0.984375} = \underline{\underline{0.64}} && (13) \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Et 99 % konfidensintervall, dvs. med $\alpha = 0.01$, er gitt ved

$$\overline{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.484 \pm 2.576 \frac{0.02}{\sqrt{10}} = \underline{\underline{[0.468, 0.500]}}. \tag{14}$$

Det er 99 % sannsynlighet at den virkelige forventingen ligger innenfor dette intervallet.

b) Vi setter opp følgende hypotesetest:

$$\mathrm{H}_0\colon \mu = 0.5 \qquad \mathrm{H}_1\colon \mu < 0.5$$

1) Vi starter ved å se på kritisk verdi. For at vi skal forkaste H_0, må $\overline{X}$ være mindre enn:

$$k = \mu_0 - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.5 - 2.326 \frac{0.02}{\sqrt{n}} = 0.485 \tag{15}$$

Vi ser her at $\overline{X} < k$ og vi kan forkaste H_0.

2) Vi kan også forkaste H_0 dersom testobservatoren

$$U_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0.484 - 0.5}{\frac{0.02}{\sqrt{10}}} = -2.530 \tag{16}$$

er mindre enn $-u_{0.01} = -2.326$. Vi ser at dette er tilfelle, og vi forkaster H_0.

3) Sist, skal vi se på p-verdien:

$$\begin{aligned} p &= P(\overline{X} < 0.484 | \mu = 0.5) = G(\frac{0.484 - 0.5}{\frac{0.02}{\sqrt{10}}}) && (17) \\ &= G(-2.53) = 1 - G(2.53) = 0.0057 && (18) \end{aligned}$$

Siden $p < \alpha$, kan vi forkaste H_0.

c) Vi skal finne sannsynligheten

$$\begin{aligned} &P(\overline{X} > k = 0.485 | \mu = 0.49) = 1 - P(\overline{X} < 0.485 | \mu = 0.49) && (19) \\ &= 1 - G(\frac{0.485 - 0.49}{\frac{0.02}{\sqrt{10}}}) = 1 - G(-0.79) = G(0.79) = 0.7852 \approx \underline{\underline{0.79}} && (20) \end{aligned}$$

d) Vi vet nå ikke hva standardavviket er, og vi må derfor estimere. Fra kalkulatoren, får vi at:

$$\hat{\sigma} = S = 0.0212 \tag{21}$$

Vi kan nå beregne testobservatoren

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{10}}} = \frac{0.484 - 0.5}{\frac{0.0212}{\sqrt{10}}} = -2.387. \tag{22}$$

Ved å sammenlikne med kvantilen $t_{\alpha,n-1} = t_{0.01,9} = 2.821$, ser vi at T_0 ikke er mindre enn $-t_{0.01,9}$ og vi kan dermed ikke forkaste H_0. Når vi ikke vet standarddaviket, får vi mer usikkerhet i vår testmetode. I vårt tilfelle gjorde denne økningen i usikkerhet at vi ikke kunne forkaste nullhypotesen.

Oppgave 3

a) Vi har at $X \sim Po(\alpha t) = Po(5 * 2) = Po(10)$. Sannsynligheten for at det kommer mer enn 10 kunder på 2 timer, blir da:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{x=0}^{10} \frac{10^x}{x!} e^{-10} = \underline{\underline{0.417}} \tag{23}$$

b) T er eksponensialfordelt, $T \sim exp(5)$.

c) Vi skal finne sannsynligheten

$$\begin{aligned} P(T > 15min) &= P(T > 0.25) = 1 - P(T < 0.25) && (24) \\ &= 1 - F(0.25) = 1 - (1 - e^{-5*0.25}) && (25) \\ &= e^{-1.25} = 0.2865 \approx \underline{\underline{0.29}} && (26) \end{aligned}$$