# HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG
## Avdeling for teknologi

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Målform:** | Bokmål | | | | | |
| **Eksamensdato:** | 19 des. 2014 | | | | | |
| **Varighet/eksamenstid:** | 3 timer | | | | | |
| **Emnekode:** | TALM1005 | | | | | |
| **Emnenavn:** | Statistikk og Økonomi (statistikkdelen) | | | | | |
| **Klasse(r):** | Logistikk 1 | Kjemi 2 | Material 2 | Bygg 2, Maskin 2 | Elektro 2 | Fornybar energi 2 |
| **Studiepoeng:** | 10 studiepoeng | | | | | |
| **Faglærer(e):** (navn og telefonnr på eksamensdagen) | Kjetil L. Nielsen (970 85 486), Lars Engvik, Eirik Spets, Ketil Arnesen | | | | | |
| **Kontaktperson(adm.)** (fylles ut ved behov – kun ved kursemner) | | | | | | |
| **Hjelpemidler:** | Kalkulator type B, formelark med tabeller. | | | | | |
| **Oppgavesettet består av:** (antall oppgaver og antall sider inkl. forside) | 4 oppgaver (12 deloppgaver), 8 sider (inkl. denne forsiden) | | | | | |
| **Vedlegg består av:** (antall sider) | Formelark (3 sider) og tabeller (2 sider) | | | | | |

**Merknad:**

**Oppgaveteksten kan beholdes av studenter som sitter eksamenstiden ut.**

**NB! Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner arbeidet, og disponer tiden.**

**Dersom noe virker uklart i oppgavsettet, skal du gjøre dine egne antagelser og forklare dette i besvarelsen.**

**Lykke til!**

## Oppgave 1

For to hendelser, $A$ og $B$ har vi: $P(A) = 0.40$, $P(B) = 0.70$, $P(A \cap B) = 0.28$

a) i. Er hendelsene, $A$ og $B$, disjunkte? Begrunn svaret.
   ii. Er hendelsene, $A$ og $B$, uavhengige? Begrunn svaret.

b) i. Finn sannsynligheten for at enten $A$ eller $B$ (eller begge) inntreffer.
   ii. Finn sannsynligheten for at $A$ inntreffer, men ikke $B$.

## Oppgave 2

Tabellen under viser sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel, $X$:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0.35 | 0.28 | 0.21 | 0.16 |

Anta at vi gjør 100 uavhengige målinger for $X : X_1, X_2, ..., X_{100}$. La $\overline{X}$ være gjennomsnittet av disse målingene.

a) i. Regn ut forventningen, $E(X)$, og variansen, $\text{Var}(X)$.
   ii. Beregn $P(\overline{X} \leq 2.1)$.

La $Y$ være antall ganger $X = 1$ i de 100 målingene, $X_1, X_2, ..., X_{100}$.

b) Regn ut $P(Y = 30)$.

c) Beregn $P(Y \leq 30)$.

## Oppgave 3

Antall skåringer for Rosenborg i en kamp kan antas å være Poissonfordelt med forventning 1.5 hvis de spiller på hjemmebane og Poissonfordelt med forventning 1.0 hvis de spiller på bortebane. Man spiller like mange kamper hjemme som borte.

a) Finn sannsynligheten for at Rosenborg skårer minst 2 mål i en tilfeldig kamp på hjemmebane.

b) i. Finn sannsynligheten for at Rosenborg skårer nøyaktig 3 mål i en tilfeldig kamp.
   ii. I en tilfeldig kamp skårte Rosenborg 3 mål. Finn sannsynligheten for at kampen ble spilt på hjemmebane.

c) En fotballkamp varer i 90 minutter (antar ingen overtid). Finn sannsynligheten for at Rosenborg skårer innen 5 minutter på en kamp på bortebane.

## Oppgave 4

Vi skal undersøke forekomster av det giftige stoffet arsen i drikkevann. Resultatet av en enkeltmåling i et bestemt område antas å være normalfordelt med forventing 5.0 $\mu g$ og varians $(0.10\ \mu g)^2$ per liter vann.

a) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig måling viser et arseninnhold per liter vann på mellom 4.9 $\mu g$ og 5.1 $\mu g$.

Vi reiser til et nytt område og gjør 5 målinger av arseninnholdet. Resulatet av målingene er gitt under (målt i $\mu g$ per liter vann):

$$5.12, 5.15, 4.99, 5.04, 5.10$$

Vi antar at målingene er uavhengige og identisk normalfordelte med samme varians som tidligere, men ukjent forventning.

b) Sett opp en hypotesetest for å avgjøre om forventet arseninnhold i det nye område er høyere enn 5.0 $\mu g$ per liter vann. Bruk et signifikansnivå på 0.05.

c) i. Regn ut signifikanssannsynligheten (p-verdien) basert på datamaterialet over.

   ii. Hva sier denne om utfallet av hypotesetesten dersom vi hadde brukt signifikansnivå 0.01?

d) Regn ut verdien for styrkefunksjonen for hypotesetesten i oppgave b dersom forventningen er lik 5.1 $\mu g$ per liter vann. Bruk signifikansnivå 0.05.

# Formler og tabeller for statistikk

## 1 Sannsynlighetsregning

**Generell addisjonssetning**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Betinget sannsynlighet**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Gen. multiplikasjonsregel**

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

**Total sannsynlighet**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{r} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

**Bayes lov**

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

**Hvis $A$ og $B$ uavhengige**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

## 2 Kombinatorikk

Antall forskjellige utvalg når s enheter trekkes fra en populasjon på N enheter:

**Ordnet utvalg med tilbakelegging**

$$N^s$$

**Ordnet utvalg uten tilbakelegging**

$$(N)_s = N(N-1)...(N-s+1) = \frac{N!}{(N-s)!}$$

**Uordnet utvalg uten tilbakelegging**

$$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$$

## 3 Sannsynlighetsfordelinger generelt (1 variabel)

**Fordelingsfunksjon**

| Diskret | Kontinuerlig |
|---|---|
| $F(x) = P(X \leq x)$ | $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ |
| $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ | $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ |

**Forventing**

Diskret

$$\mu = E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$$

Kontinuerlig

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

**Varians**

Diskret

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$
$$= \sum x^2 P(X = x)) - \mu^2$$

Kontinuerlig

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$$

**Standardavvik**

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

## 4 Regler for forventing og varians

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$ (når $X_1$ og $X_2$ er uavhengige.)

## 5 Sannsynlighetsfordelinger generelt (2 variable)

### Simultanfordeling for X og Y

$P[(X = x) \cap (Y = y)]$

### Forventning

$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot P[(X = x) \cap (Y = y)]$

### Kovarians

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)] = E(X \cdot Y) - \mu_1 \cdot \mu_2$

### Korrelasjonskoeffisient

$\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$

## 6 Diskrete sannsynlighetsfordelinger

### Binomisk fordeling

$X \sim \mathrm{bin}(n,p):$

$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$

$E(X) = np$

$\mathrm{Var}(X) = np \cdot (1-p)$

### Poissonfordeling

$X \sim Po(\lambda) = Po(\alpha \cdot t):$

$P(X = x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$

$E(X) = \lambda$

$\mathrm{Var}(X) = \lambda$

## 7 Kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

### Normalfordelingen

$X \sim N(\mu, \sigma^2):$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$F(x) = P(X \leq x) = G(\dfrac{x - \mu}{\sigma})$

### Standard normalfordeling

$X \sim N(0,1):$

$F(x) = P(X \leq x) = G(x)$

$G(-x) = 1 - G(x)$

### Exponensialfordelingen

$T \sim \exp(\alpha):$

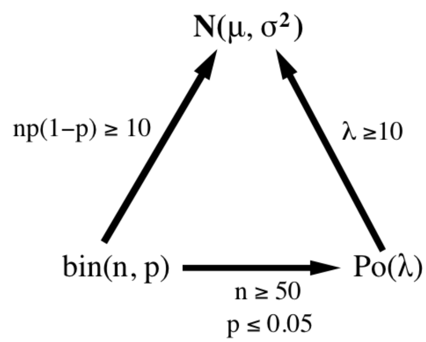
$f(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha t}$ for t > 0

$F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ for t > 0

$E(T) = \frac{1}{\alpha}$

$\mathrm{Var}(T) = \frac{1}{\alpha^2}$

## 8 Tilnærminger




### Sentralgrensesetningen

Dersom $X_1$, $X_2$,...,$X_n$ er uavhengige og identisk fordelte stokastiske variable med forventing $\mu$ og varians $\sigma^2$, så er for *store* verdier av n (n $\geq$ 30):

1) $X_1 + X_2 + ... + X_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$

2) $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

## 9 Punktestimering

### Punktestimator for forventing

$\hat{\mu} = \overline{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$E(\hat{\mu}) = \mu \quad \mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

### Punktestimator for varians

$S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right)$

$E(S^2) = \sigma^2$

## 10 Hypotesetesting

### Signifikanssannsynlighet - "p-verdi"

Sannsynligheten for å få et resultat som er lik eller mer ekstrem enn den observerte verdien, gitt at $H_0$ er sann.

### Styrkefunksjonen

$\beta(\theta) = P(\text{"Påstå H}_1\text{"}|\theta)$

## Hypotesetesting med kjent $\sigma$

Antar normalfordelte, eller tilnærmet normalfordelte observasjoner:

**(1-$\alpha$)·100 % Konfidensintervall for $\mu$**

$$\overline{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**Utvalgsstørrelse**

$$n = \left(\frac{u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{d}\right)^2$$ , d = feilmargin.

**Testovervator for H$_0$ : $\mu = \mu_0$**

$$U_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, 1\right)$$

## Hypotesetesting med ukjent $\sigma$

Antar normalfordelte observasjoner:

**(1-$\alpha$)·100 % Konfidensintervall for $\mu$**

$$\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

**Testovervator for H$_0$ : $\mu = \mu_0$**

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Når H$_0$ er sann, er T$_0$ t-fordelt med (n-1) frihetsgrader.

## Poissonfordelingen (normaltilnærming)

**Tilnærmet (1-$\alpha$)·100 % Konfidensintervall for $\lambda$**

$\hat{\lambda} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\lambda}}$, der $\hat{\lambda} = X$

**Testovervator for H$_0$ : $\lambda = \lambda_0$**

$$U_0 = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}}$$

## Binomisk fordeling (normaltilnærming)

**Tilnærmet (1-$\alpha$)·100 % Konfidensintervall for p**

$\hat{p} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, der $\hat{p} = \frac{X}{n}$

**Testovervator for H$_0$ : $p = p_0$**

$$U_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

## 11 Korrelasjon

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X}^2$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) - \overline{Y}^2$$

$$S_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) - \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

**Empirisk korrelasjonskoeffisient**

$$R = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

## 12 Regresjonsmodellen

Vi antar at vi har $n$ par observasjoner av $x$ og $Y$: $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), ..., (x_n, Y_n)$, der $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ er uavhengige og normalfordelte stokastiske variable, og der $x_1, x_2, ..., x_n$ er kjente tall..

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad \mathrm{Var}(Y_i) = \sigma^2 \quad i = 1, 2, ..., n$$

**Minste kvadraters estimatorer**

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})Y_i = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\overline{x}\overline{Y}\right),$$

der $M = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\overline{x}^2$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{x} \quad \hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \tfrac{\sigma^2}{M}) \quad \hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \tfrac{\sigma^2}{nM}\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

**Estimert regresjonslinje**

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

**(1-$\alpha$)·100 % Konfidensintervall for $\beta_1$ (kjent $\sigma$)**

$$\hat{\beta}_1 \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{M}}$$

**Testovervator for H$_0$ : $\beta_1 = \beta_1^0$ (kjent $\sigma$)**

$$U_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}} \sim N\left(\frac{\beta_1 - \beta_1^0}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}}, 1\right)$$

# $N(0, 1)$-FORDELINGEN : $G(x) = P(X \le x)$

Eksempel: $x = 2.04$ gir $P(X \le 2.04) = G(2.04) = 0.9793$.

For negative verdier benyttes formelen: $G(-x) = 1 - G(x)$.

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |
| 3.5 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 |
| 3.6 | .9998 | .9998 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.7 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.8 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Kvantiltabell:

| $\alpha$ | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.02 | 0.01 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_\alpha$ | 0.842 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.054 | 2.326 | 2.576 | 2.878 | 3.090 |

# KVANTILTABELL FOR t-FORDELINGEN

Tabellen gir $t_{\alpha, m}$ som er $\alpha$-kvantilen i t-fordelingen med m frihetsgrader.

$$P(T > t_{\alpha, m}) = \alpha \quad \text{der} \quad T \sim t_m$$

Eksempel: $t_{0.10, 12} = 1.356$. Det betyr at $P(T > 1.356) = 0.10$ når $T \sim t_{12}$.

| m \ $\alpha$ | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.02 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 15.894 | 31.821 | 63.656 |
| 2 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 4.849 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 3.482 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 2.999 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 2.757 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 2.612 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.517 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.449 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.398 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 0.879 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.359 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 0.876 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.328 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 0.873 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.303 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 0.870 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.282 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 0.868 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.264 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 0.866 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.249 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 0.865 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.235 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 0.863 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.224 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 0.862 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.214 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 0.861 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.205 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 0.860 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.197 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 0.859 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.189 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 0.858 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.183 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 0.858 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.177 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 0.857 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.172 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 0.856 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.167 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 0.856 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.162 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 0.855 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.158 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 0.855 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.154 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 0.854 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.150 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 0.854 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.147 | 2.457 | 2.750 |
| 31 | 0.853 | 1.309 | 1.696 | 2.040 | 2.144 | 2.453 | 2.744 |
| 32 | 0.853 | 1.309 | 1.694 | 2.037 | 2.141 | 2.449 | 2.738 |
| 33 | 0.853 | 1.308 | 1.692 | 2.035 | 2.138 | 2.445 | 2.733 |
| 34 | 0.852 | 1.307 | 1.691 | 2.032 | 2.136 | 2.441 | 2.728 |
| 35 | 0.852 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.133 | 2.438 | 2.724 |
| 36 | 0.852 | 1.306 | 1.688 | 2.028 | 2.131 | 2.434 | 2.719 |
| 37 | 0.851 | 1.305 | 1.687 | 2.026 | 2.129 | 2.431 | 2.715 |
| 38 | 0.851 | 1.304 | 1.686 | 2.024 | 2.127 | 2.429 | 2.712 |
| 39 | 0.851 | 1.304 | 1.685 | 2.023 | 2.125 | 2.426 | 2.708 |
| 40 | 0.851 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.123 | 2.423 | 2.704 |
| 50 | 0.849 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.109 | 2.403 | 2.678 |
| 60 | 0.848 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.099 | 2.390 | 2.660 |
| 70 | 0.847 | 1.294 | 1.667 | 1.994 | 2.093 | 2.381 | 2.648 |
| 80 | 0.846 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.088 | 2.374 | 2.639 |
| $\infty$ | 0.842 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.054 | 2.326 | 2.576 |