

Oppgave 1

Hendelser

$$\begin{aligned} D &= \text{"defekt"} \\ F &= \text{"fjernet"} \end{aligned}$$

Oppgitt

$$\begin{aligned} P(D) &= 0.1 \\ P(F|D) &= 0.98 \\ P(F|\bar{D}) &= 0.04 \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at en enhet blir fjernet:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|D)P(D) + P(F|\bar{D})P(\bar{D}) \\ &= 0.98 \cdot 0.1 + 0.04 \cdot 0.90 \\ &= 0.134 \end{aligned}$$

Ssh for at en fjernet enhet er defekt. Dvs

$$P(D|F) = \frac{P(F|D)P(D)}{P(F)} = \frac{0.98 \cdot 0.1}{0.134} = 0.7313 \approx \mathbf{0.73}$$

Oppgave 2

Bølgehøyde er Weibullfordelt $X \sim \mathcal{W}(\beta = 0.9, \eta = 1.2)$ med sannsynlighetfordeling:

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(x/\eta)^\beta} = \frac{0.9}{1.2^{0.9}} x^{-0.1} e^{-(x/1.2)^{0.9}}$$

og fordelingsfunksjon:

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\eta)^\beta} = 1 - e^{-(x/1.2)^{0.9}}$$

ai) Forventning:

$$\begin{aligned} E(X) &= \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 1.2 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{0.9}\right) \\ &= 1.2 \cdot \Gamma(2.11) = 1.2 \cdot 1.0516 = 1.2619 \\ &\approx \mathbf{1.26 \text{ m}} \end{aligned}$$

aii) Sannsynlighet:

$$\begin{aligned} P(X > 5.0 \text{ m}) &= 1 - F(5.0) = 1 - \left(1 - e^{-(5/1.2)^{0.9}}\right) \\ &= e^{-(5/1.2)^{0.9}} = \mathbf{0.027} \end{aligned}$$

b) Antall bølger større enn 9 meter er binomisk fordelt med

$$Y \sim \text{bin}(n = 8760, p = 0.0022)$$

Forventet antall bølger større enn 9 meter:

$$E(Y) = np = 8760 \cdot 0.0022 = 19.272 \approx \mathbf{19}$$

Oppgave 3

ai) Marginalfordelinger $P(X = x)$ og $P(Y = y)$ regnes ut ved å summere hhv. rader og kolonner:

$P(X = x \cap Y = y)$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$P(Y = y)$
$Y = 0$	0.11	0.33	0.11	0.55
$Y = 1$	0.22	0.21	0	0.43
$Y = 2$	0.02	0	0	0.02
$P(X = x)$	0.35	0.54	0.11	

a ii) Forventning og varians for X :

$$\begin{aligned} \mu_x &= E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \\ &= 0(0.35) + 1(0.54) + 2(0.11) = \mathbf{0.76} \\ \sigma_X^2 &= \text{Var}(X) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) - \mu_x^2 \\ &= 0(0.35) + 1(0.54) + 2^2(0.11) - 0.76^2 \\ &= 0.98 - 0.578 = 0.402 \approx \mathbf{0.40} \end{aligned}$$

b) Korrelasjonskoeffisient:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Regner ut forventning og varians også for Y

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E(Y) = \sum_i y_i P(Y = y_i) \\ &= 0(0.55) + 1(0.43) + 2(0.02) = 0.47 \\ \sigma_Y^2 &= \text{Var}(Y) = \sum_i y_i^2 P(Y = y_i) \\ &= 0(0.55) + 1(0.43) + 2^2(0.02) - 0.47^2 \\ &= 0.51 - 0.2209 = 0.289 \approx 0.29 \end{aligned}$$

Kovarians:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_i \sum_j y_i x_j P(X = x \cap Y = y) \\ &= 0 \cdot 0(0.11) + 0 \cdot 1(0.33) + 0 \cdot 2(0.11) \\ &\quad + 1 \cdot 0(0.22) + 1 \cdot 1(0.21) + 1 \cdot 2(0.0) \\ &\quad + 2 \cdot 0(0.02) + 2 \cdot 1(0.33) + 2 \cdot 2(0.0) \\ &= \mathbf{0.21} \end{aligned}$$

(Bare ett bidrag i summen ovenfor)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - \mu_x \mu_y \\ &= 0.21 - (0.76)(0.47) = -0.1472 \end{aligned}$$

Setter inn i uttrykk for kovarians: Korrelasjonskoeffisient:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0.1472}{\sqrt{0.402}\sqrt{0.289}} = -0.432 \approx \mathbf{-0.43}$$

Oppgave 4

a) Gjennomsnittlig antall solgte enheter i løpet av ett år er normalfordelt:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 800, \sigma^2 = \frac{80^2}{52}\right)$$

Sannsynlighet

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 820) &= 1 - P(X < 820) = 1 - G\left(\frac{820 - 800}{80/\sqrt{52}}\right) \\ &= 1 - G(1.80) = 1 - 0.9641 \approx \mathbf{0.036} \end{aligned}$$

b) Det er 8 uavhengige delforsøk der en undersøker hendelsen

$$A = \text{"salg på minst 854 enheter"}$$

og sannsynligheten er

$$p = P(A) = 0.25$$

$$Y = \text{bin}(n = 8, p = 0.25)$$

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$P(Y = 3) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 56 \frac{1}{4^3} \frac{3^5}{4^5} = \frac{1701}{8192} \approx \mathbf{0.21}$$

Oppgave 5

a) Konfidensintervall:

$$\bar{X} \pm u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Gjennomsnitt: } \bar{X} = 2.17$$

$$\text{Kvantil: } u_{\alpha/2} = u_{0.05} = 1.645$$

$$\text{Standardavvik: } \sigma = 0.8$$

$$\text{Antall målinger: } n = 10$$

Feilmargin:

$$d = u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{0.8}{\sqrt{10}} = 0.41616 \approx 0.42$$

Konfidensintervall:

$$\begin{aligned} [\bar{X} - d, \bar{X} + d] &= [2.17 - 0.42, 2.17 + 0.42] \\ &= [\mathbf{1.75}, \mathbf{2.59}] \end{aligned}$$

b) Alle målingene har samme forventning μ som er ukjent:

$$E(X_i) = E(Y_i) = \mu$$

Det gir

$$E(\bar{X}) = E(\bar{Y}) = \mu$$

Fra dette finner vi forventningene til $\hat{\mu}_1$ og $\hat{\mu}_2$

$$\begin{aligned} E(\hat{\mu}_1) &= E\left(\frac{2}{3}\bar{X} + \frac{1}{3}\bar{Y}\right) = \frac{2}{3}E(\bar{X}) + \frac{1}{3}E(\bar{Y}) \\ &= \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \mu \quad (\text{dvs forventningsrett}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\mu}_2) &= E\left(\frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{Y}\right) = \frac{1}{2}E(\bar{X}) + \frac{1}{2}E(\bar{Y}) \\ &= \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu \end{aligned}$$

Begge estimatorene er forventningsrette fordi

$$E(\hat{\mu}_1) = E(\hat{\mu}_2) = \mu.$$

c) Alle målingene har samme varians som er kjent

$$\text{Var}(X_i) = \text{Var}(Y_i) = \sigma^2 = 0.8^2$$

Fra dette bestemmes varianser til gjennomsnittene $\bar{X}$ og $\bar{Y}$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{10} = \frac{0.8^2}{10} = \frac{8}{125} \\ \text{Var}(\bar{Y}) &= \frac{\sigma^2}{5} = \frac{0.8^2}{5} = \frac{16}{125} \end{aligned}$$

Metode 1:

Estimert forventningsverdi

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}\bar{X} + \frac{1}{3}\bar{Y} = \frac{2}{3} \cdot 2.17 + \frac{1}{3} \cdot 2.38 = \mathbf{2.24}$$

Beregnet varians:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \text{Var}\left(\frac{2}{3}\bar{X} + \frac{1}{3}\bar{Y}\right) = \frac{4}{9}\text{Var}(\bar{X}) + \frac{1}{9}\text{Var}(\bar{Y}) \\ &= \frac{4}{9} \frac{8}{125} + \frac{1}{9} \frac{16}{125} = \frac{16}{375} \end{aligned}$$

Standardavvik

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{16}{375}} = 0.2066 \approx \mathbf{0.21}$$

Metode 2:

Estimert forventningsverdi

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{Y} = \frac{1}{2} \cdot 2.17 + \frac{1}{2} \cdot 2.38 = 2.275 \approx \mathbf{2.28}$$

Beregnet varians

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \text{Var}\left(\frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{Y}\right) = \frac{1}{4}\text{Var}(\bar{X}) + \frac{1}{4}\text{Var}(\bar{Y}) \\ &= \frac{1}{4} \frac{8}{125} + \frac{1}{4} \frac{16}{125} = \frac{18}{375} \end{aligned}$$

Standardavvik

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{18}{375}} = 0.2191 \approx \mathbf{0.22}$$

Oppgave 6

a) Tosidig hypotesetest:

$$\begin{array}{ll}\text{Nullhypotese } H_0: & \mu = \mu_0 = 327.5^\circ\text{C} \\ \text{Alternativ hypotese } H_1: & \mu \neq \mu_0 \\ \text{Signifikansnivå} & \alpha = 0.05\end{array}$$

Observert verdi

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 X_i \\ &= \frac{332 + 329 + 331 + 326 + 332}{5} = 330\end{aligned}$$

Varians og standardavvik:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \\ &= \frac{332^2 + 329^2 + 331^2 + 326^2 + 332^2 - 5 \cdot 330^2}{5-1} \\ &= \frac{13}{2} \\ \hat{\sigma} &= S = \sqrt{\frac{13}{2}} = 2.5495\end{aligned}$$

Testobservator ukjent standardavvik

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{330 - 327.5}{\frac{\sqrt{13/2}}{\sqrt{5}}} = 2.19$$

Tosidig test med ukjent standardavvik, $n = 5$ målinger og signifikansnivå $\alpha = 0.05$ gir følgende kvantil hentet fra t-fordelingen:

$$t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 4} = 2.776$$

Ser at $T_0 < t_{\alpha/2, n-1}$ og dermed kan vi ikke se bort fra at termometret er kalibrert (forkaster ikke H_0)

b) Signifikanssannsynlighet er sannsynligheten for å få et resultat som er lik eller mer ekstrem enn den observerte verdien, gitt at H_0 er sann. Hvis H_0 er sann og standardavviket er kjent, $\sigma = 2.5$ for hver måling, er gjennomsnittet normalfordelt:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(327.5, \frac{2.5^2}{5}\right)$$

Siden det er en **tosidig test**, må det tas hensyn til at $\bar{X}$ like gjerne kunne være mindre enn μ_0 : Hendelsen $\bar{X} \geq 330$ representerer dermed bare halve verdien av p . Det gir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p &= P(\bar{X} \geq 330) \\ p &= 2P(\bar{X} \geq 330) \\ &= 2(1 - P(\bar{X} \leq 330))\end{aligned}$$

Denne sannsynligheten kan nå bestemmes fra standard normalfordeling siden σ er kjent. Standardisering av $\bar{X}$ gir:

$$\begin{aligned}p &= 2 \left(1 - G\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= 2 \left(1 - G\left(\frac{330 - 327.5}{\frac{2.5}{\sqrt{5}}}\right) \right) \\ &\approx 2(1 - G(2.24)) \\ &= 2(1 - 0.9875) = \mathbf{0.025}\end{aligned}$$