Oppgave 1

A: Kjører for fort i den første målingen. $P(A) = 0{,}30$

B: Kjører for fort i den andre målingen. $P(B) = 0{,}45$

Minst en passering innenfor fartsgrensen svarer til hendelsen $\bar{A} \cup \bar{B}$. Dvs

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}80$$

Sannsynligheten for å passere over fartsgrensen i begge målingene er da

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$$

Sannsynligheten for å passere for fort minst en gang blir

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}30 + 0{,}45 - 0{,}20 = \underline{\underline{0{,}55}}$$

Oppgave 2

Median:

De to midterste tallene i rekka

8,9 – 11,2 – 11,8 – 12,5 – 12,8 – 13,5 – 13,9 – 14,0 – 14,4 – 15,9 – 16,1 – 16,6 er

$$M = \frac{13{,}5 + 13{,}9}{2} = 13{,}7$$

Nedre kvartil: Tall nummer $\frac{(n+1)}{4} = \frac{13}{4} = 3{,}25$ i rekka

8,9 – 11,2 – 11,8 – 12,5 – 12,8 – 13,5 – 13,9 – 14,0 – 14,4 – 15,9 – 16,1 – 16,6 er

$Q_1 = \frac{11{,}8*3+12{,}5*1}{4} = 11{,}975$

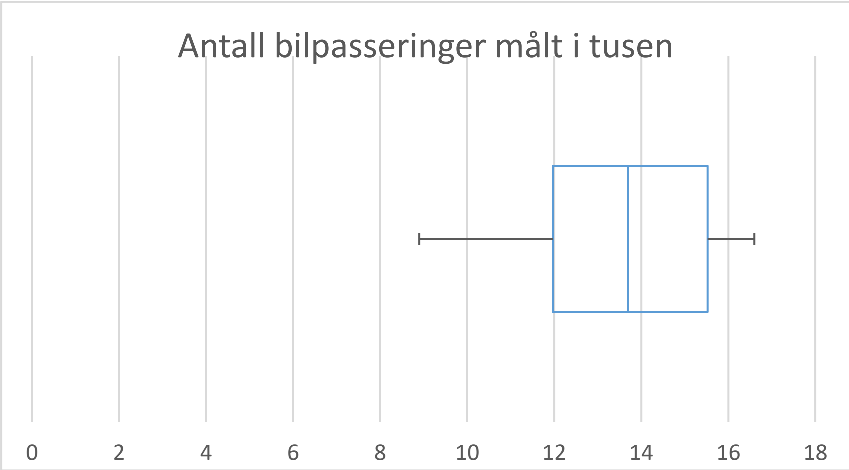
Øvre kvartil: Tall nummer $\frac{3(n+1)}{4} = \frac{39}{4} = 9{,}75$ i rekka

8,9 – 11,2 – 11,8 – 12,5 – 12,8 – 13,5 – 13,9 – 14,0 – 14,4 – 15,9 – 16,1 – 16,6 er

$Q_3 = \frac{14{,}4*1+15{,}9*3}{4} = 15{,}525$

Kvartilbredde:

$Q_b = Q_3 - Q_1 = 15{,}525 - 11{,}975 = 3{,}55$



Oppgave 3

a) Estimert varians:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{11}(2\,230\,380\,000 - 12 \cdot 13\,466{,}67^2) \approx 4\,924\,242{,}4$$

Estimert standardavvik:

$$S = \sqrt{4924242{,}4} \approx \underline{\underline{2219}}$$

Ukjent forventning og varians krever at vi benytter t-fordelingen. Konfidensintervallet er da gitt ved:

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{1}{12}161600 \approx 13466.67$$

For et 95%-konfidensintervall blir $\alpha = 0{,}05$ og

$$t_{\frac{0{,}05}{2},12-1} = t_{0.025,11} = 2.201$$

Konfidensintervallet blir:

$$13466.67 \pm 2.201 \cdot \frac{2219}{\sqrt{12}} = 13466.67 \pm 1410 = [12057\,,14877]$$

b) Hypotesetest:

$$H_0: \mu = 13\,000 \qquad \text{mot} \quad H_1: \mu > 13\,000$$

Testobservator når varians og standardavvik er ukjent:

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} = \frac{13466.67 - 13000}{2219}\sqrt{12} = 0{,}7285$$

Denne sammenligner vi med 2,5%-kvantilen i t –fordelinga i en ensidig-test

$$t_{\alpha,n-1} = t_{0.025,11} = 2{,}201$$

Vi får da at

$$T_0 < \ t_{0.025,12}$$

Dette betyr at vi ikke har grunnlag for å påstå H_1.

c) Sannsynligheten for at bare et løp blir bygget når $\mu = 14\,000$ er

$$P(\bar{X} \leq 13\,000 \mid \mu = 14\,000) = G\left(\frac{13\,000 - 14\,000}{\frac{2000}{\sqrt{12}}}\right) = G(-1{,}73)$$

$$= 1 - G(1{,}73) = 1 - 0{,}9582 = 0.0418 \approx \underline{\underline{0{,}042}}$$

Oppgave 4

a) Antall nedlastinger i løpet av ett kvarter er Poissonfordelt:

$$X \sim \text{Po}\left(\lambda = \frac{7{,}3}{4}\right)$$

Sansynligheten for at det kommer minst en nedkastning i løpet av en halv time blir

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\left(\frac{7{,}3}{4}\right)} = 1 - 0{,}016 = 0{,}84$$

b) Antall nedlastinger er Poissonfordelt:

$$X \sim \text{Po}(\lambda)$$

Konfidensintervallet er bestemt ved

$$\hat{\lambda} \pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{\lambda}} \qquad \text{der } \hat{\lambda} = X = 1200$$

$$1200 + 1{,}96 \cdot \sqrt{1200} = 1200 \pm 68$$

$$[1132, 1268]$$

c) Antar normalfordeling

$$X \approx N(\mu = 1225, \sigma^2 = 1225 = 35^2)$$

Signifikanssannsynlighet:

$$P(X < 1160|\mu = 1225) = G\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = G\left(\frac{1160 - 1225}{35}\right) = G(-1{,}857)$$

$$= 1 - G(-1{,}857) \approx 1 - G(1{,}86) = 1 - 0{,}9686 = \underline{\underline{0{,}031}}$$

Oppgave 5

Nødvendig tid for å fullføre en eksamen for en vilkårlig student er bestemt ved stokastisk variabel X:

$$X \sim N(\mu = 110\,, \sigma^2 = 20^2)$$

a) Sannsynligheten for at en vilkårlig student skal bli ferdig med eksamen i løpet av 120 minutter

$$P(X \leq 120) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{120-110}{20}\right) = P(Z \leq 0{,}5) = G(0{,}5) = \underline{\underline{0{,}6915}}$$

b) Eksamenstiden må være k minutter for at 90 % av studentene skal rekke å fullføre, der k bestemmes fra:

$$P(X \leq k) = 0{,}90 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k-110}{20}\right) = 0{,}90 \Rightarrow G\left(\frac{k-110}{20}\right) = 0{,}90$$

$$\Rightarrow \frac{k-110}{20} = 1{,}282 \Rightarrow k = 110 + 20 \cdot 1{,}282 \approx \underline{135{,}64}$$

Eksamenstiden må være på minst 136 minutter for at minst 90 % av studentene skal rekke å fullføre.

Oppgave 6

Et firma produserer betongelementer med lengder 3 meter og 6 meter. Lengdene kan betraktes som uavhengige og normalfordelte stokastiske variabler, henholdsvis

$$X \sim N(3{,}00, 0{,}02^2) \; og \;\; Y \sim N(6{,}00, 0{,}03^2).$$

a) Beregn sannsynligheten for at et 3m-element skal være kortere enn 2.95 m.

b) Betongelementer skal legges etter hverandre slik at total lengde ikke overstiger 8.95 m.

Hva er sannsynligheten for å få oppfylt lengdekravet dersom en velger tilfeldig et 6m-element og et 3m-element?

Er sannsynligheten større for å få oppfylt lengdekravet hvis en i stedet velger 3 tilfeldige

3m-elementer? Svaret skal begrunnes!

Svar

$$X \sim N(3.00, 0.02^2) \qquad Y \sim N(6.00, 0.03^2)$$

a) $\underline{\underline{P(X < 2.95)}} = P(Z \le \frac{2.95-3}{0.02}) = G(-2.5) = 1 - G(2.5) = 1 - 0.9938 = \underline{\underline{0.0062}}$

b) $S_2 = X + Y \sim N(3.00 + 6.00, 0.02^2 + 0.03^2) = N(9.00, 0.0013)$

$$\underline{\underline{P(S_2 < 8.95)}} = P(Z \le \frac{8.95-9}{\sqrt{0.0013}}) \approx G(-1.39) = 1 - G(1.39) = 1 - 0.9177 = \underline{\underline{0.0823}}$$

$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 \sim N(3 \cdot 3.00, 3 \cdot 0.02^2) = N(9.00, 0{,}0012)$$

$$P(S_3 < 8.95) = P(Z \le \frac{8.95-9}{\sqrt{0.0012}}) \approx G(-1.44) = 1 - G(1.44) = 1 - 0.9251 = \underline{0.0749}$$

Sannsynligheten er mindre for å få plass til 3 tilfeldige 3m-elementer.

Dette sees også av at variansen er større for S_2 enn S_3, da større spredning gir større sannsynlighet for å få plass.

Svar

$$X \sim N(3.00, 0.022) \qquad Y \sim N(6.00, 0.032)$$

a) $\underline{\underline{P(X < 2.95)}} = P(Z \leq \frac{2.95-3}{0.022}) = G(-0.34) = 1 - G(0.34) = 1 - 0.6331 = \underline{\underline{0.3669}}$

b) $S_2 = X + Y \sim \mathrm{N}(3.00 + 6.00, 0.022 + 0.033) = N(9.00, 0.055)$

$$P(S_2 < 8.95) = P(Z \leq \frac{8.95-9}{\sqrt{0.054}}) \approx G(-0.22) = 1 - G(0.22) = 1 - 0.5871 = \underline{\underline{0.4129}}$$

$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 \sim N(3 \cdot 3.00, 3 \cdot 0.022) = N(9.00, 0{,}066)$$

$$P(S_3 < 8.95) = P(Z \leq \frac{8.95-9}{\sqrt{0.066}}) \approx G(-0.19) = 1 - G(0.19) = 1 - 0.5753 = \underline{\underline{0.4247}}$$

Sannsynligheten er større for å få plass til 3 tilfeldige 3m-elementer.

Dette sees også av at variansen er større for S_2 enn S_3, da større spredning gir større sannsynlighet for å få plass.