

OPPGAVE 1

Oppg. 1A)

1) Ordnet trekning uten tilbakelegging: Antall kombinasjoner er gitt ved:

$$N^s = 11^3 = \underline{\underline{1331}}$$

2) Ikke-ordnet trekning uten tilbakelegging: Antall kombinasjoner er gitt ved

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{165}}$$

Oppg. 1B)

Siden Ola ikke bryr seg om hvilken t-skjorte han går med, er det logisk å bruke en ikke-ordnet modell (altså at rekkefølgen spiller ingen rolle). Antal mulige utvalg (m) har vi regnet ut til å være 165. Vi får da:

$$P = \frac{g}{m} = \frac{\binom{7}{1}\binom{4}{2}}{165} = \frac{42}{165} = 0.2545 \approx \underline{\underline{0.25}}$$

Oppg. 1C)

La oss definere to hendelser:

M: Ola velger en mørk t-skjorte.

R: Ola velger riktig vaskemiddel.

Utifra opplysningene i oppgaveteksten, kan vi sette opp følgende sannsynligheter:

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{7}{11} \\ P(R | M) &= 0.80 \\ P(\bar{R} | \bar{M}) &= 0.40 \end{aligned}$$

Videre har vi følgende sammenheng:

$$P(R | \bar{M}) = 1 - P(\bar{R} | \bar{M}) = 0.60$$

Vi har nå det vi trenger for å regne ut $P(R)$. Ved å bruke regelen for total sannsynlighet, får vi:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(M)P(R | M) + P(\bar{M})P(R | \bar{M}) \\ &= \frac{7}{11} \cdot 0.80 + \frac{4}{11} \cdot 0.60 = 0.7272 \approx \underline{\underline{0.73}} \end{aligned}$$

Oppg. 1D)

Vi bruker Bayes regel og får:

$$\begin{aligned} P(M | \bar{R}) &= \frac{P(M)P(\bar{R} | M)}{P(\bar{R})} = \frac{P(M)(1 - P(R | M))}{\underline{\underline{1 - P(R)}}} \\ &= \frac{\frac{7}{11}(1 - 0.80)}{\underline{\underline{1 - 0.7272}}} = \underline{\underline{0.47}} \end{aligned}$$

OPPGAVE 2

Oppg. 2A)

1) Vi bruker standardestimatorene i målemodellen for gjennomsnitt og empirisk standardavvik:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{14} X_i \stackrel{\text{ kalk. }}{=} 2.1514 \text{ cm} \approx \underline{\underline{2.15 \text{ cm}}}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} = S &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{14-1} \sum_{i=1}^{14} (X_i - 2.1514)^2} \stackrel{\text{ kalk. }}{=} 0.3271 \text{ cm} = \underline{\underline{0.33 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

2) Et konfidensintervall (K.I.) for μ i målemodellen med sikkerhet $(1-\alpha)100\%$, er gitt ved:

$$\hat{\mu} \pm d = \bar{X} \pm d$$

Når σ er ukjent, og må estimeres, vil feilmarginen, d , være gitt ved:

$$d = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} SD(\bar{X}) = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Siden σ er ukjent, brukte vi $\frac{\alpha}{2}$ -kvantilen til t-fordelingen med $n-1 = 14-1 = 13$ frihetsgrader. Vi finner kvantilen fra tabellene:

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.025, 13} \stackrel{\text{ tabell }}{=} 2.160$$

Dette gir følgende konfidensintervall:

$$\begin{aligned} \bar{X} \pm t_{0.025, 14} \frac{S}{\sqrt{n}} &= 2.1514 \pm 2.160 \cdot \frac{0.3271}{\sqrt{14}} \\ &= 2.1514 \pm 0.1888 = [1.9626, 2.3402] \approx \underline{\underline{[1.96, 2.34]}} \end{aligned}$$

3) Et 95% konfidensintervall for μ er et intervall der man med 95% sikkerhet kan påstå at den virkelige verdien av μ ligger.

Oppg. 2B)

Vi skal sette opp en ensidig hypotesetest ("større enn"). Siden vi har ukjent σ , må vi bruke t-testen.

Nullhypotesen blir at μ er lik 2.00, mens den alternative hypotesen blir at μ er større enn 2.00. Med andre ord:

$H_0 : \mu_0 = 2.00$ mot $H_1 : \mu_0 > 2.00$ med signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Vi påstår den alternative hypotesen (forkaster nullhypotesen) dersom testobservatoren T_0 er større enn 5%-kvantilen i t-fordelingen med 14-frihetsgrader:

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{2.1514 - 2.00}{\frac{0.3271}{\sqrt{14}}} = 1.7318$$

Fra tabellen finner vi 5%-kvantilen til t-fordelingen:

$$t_{\alpha, n-1} = t_{0.05, 13} \stackrel{\text{tabell}}{=} 1.771$$

Siden $T_0 < t_{\alpha, n-1}$ har vi ikke grunnlag for å påstå H_1 .

Oppg. 2C

1) Vi måtte brukt den oppgitte σ istedenfor å bruke estimatoren S . I tillegg måtte vi brukt testobservator og kvantiler fra standard normalfordeling istedenfor t-fordelingen. Vi har nå mindre usikkerhet når vi vet σ , noe som kan medføre at konklusjonen av hypotesetesten kan bli forandret (dette finner vi ut i oppgave 2D).

2) Dette er sannsynligheten for å få et resultat som er lik eller mer ekstremt enn den observerte verdien for μ dersom H_0 gjelder.

Oppg. 2D

1) Styrkefunksjonen gir sannsynligheten for å påstå H_1 som funksjon av μ , altså hva er sannsynligheten for å påstå H_1 for en gitt verdi av den virkelige μ .

2) Vi kan påstå H_1 når $\bar{X}$ er større enn den kritiske verdien k . For å regne ut den kritiske verdien, trenger vi 5%-kvantilen til standard normalfordeling:

$$u_\alpha = u_{0.05} \stackrel{\text{tabell}}{=} 1.645$$

Den kritiske verdien er dermed gitt ved:

$$k = \mu_0 + u_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.00 + 1.645 \cdot \frac{0.30}{\sqrt{14}} = 2.132$$

Merk at $\bar{X} > k$ som i praksis vil si at dersom vi hadde kjørt hypotesetesten beskrevet i oppgave 2C, ville vi nå kunne påstått H_1 , altså det motsatte av hva vi fikk i oppgave 2B.

Nå som vi har k , kan vi sette opp et uttrykk for styrkefunksjonen:

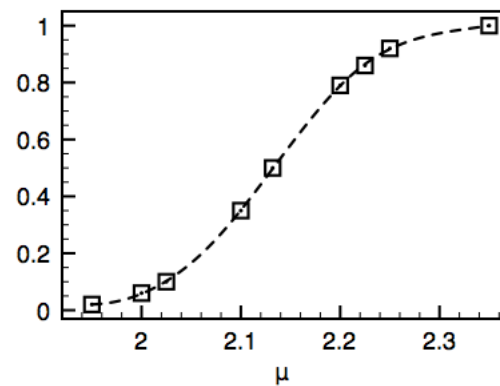
$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= P(\bar{X} > k \mid \mu) = 1 - P(\bar{X} < k \mid \mu) \\ &= 1 - G\left(\frac{k - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \end{aligned}$$

Hvis, f.eks., den virkelige verdien for μ hadde vært 2.00, får vi følgende styrke:

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= 1 - G\left(\frac{2.132 - 2.00}{\frac{0.30}{\sqrt{14}}}\right) = 1 - G(1.59) \\ &\stackrel{\text{tabell}}{=} 1 - 0.9441 = 0.0559 = 0.06 \end{aligned}$$

Vi gjør tilsvarende regnestykke for flere verdier av μ og setter opp i en tabell. Dette gjør det mer oversiktlig når vi skal tegne figur.

μ	1.95	2.00	2.025	2.100	2.132	2.200	2.225	2.250	2.350
$\beta(\mu)$	0.02	0.06	0.10	0.35	0.50	0.79	0.86	0.92	1.0



OPPGAVE 3

Oppg. 3A)

1) Vi kan estimere regresjonskoeffisientene β_0 og β_1 ved hjelp av minste kvadraters metode. Dette kan vi gjøre via kalkulatoren:

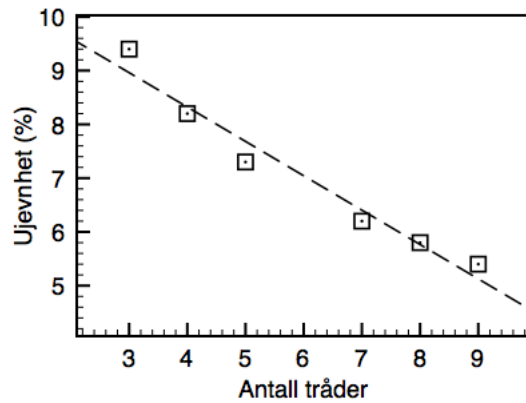
$$\hat{\beta}_0 \stackrel{\text{kalk.}}{=} 10.885714 \approx \underline{\underline{10.88}}$$

$$\hat{\beta}_1 \stackrel{\text{kalk.}}{=} -0.639329 \approx \underline{\underline{-0.639}}$$

2) Den estimerte regresjonslinja er gitt ved:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x = 10.88 - 0.639x$$

Denne har vi tegnet i figuren under, sammen med datapunktene:



3) Bruker vi 6 fibertråder, kan vi forvente følgende ujevnhet:

$$\hat{Y}(6) = 10.88 - 0.639 \cdot 6 = \underline{\underline{7.05}}$$

Oppg. 3B)

Et konfidensintervall for β_1 i regresjonsmodellen med sikkerhet $(1-\alpha)100\%$, er gitt ved:

$$\beta_1 \pm d = \beta_1 \pm u_{\frac{\alpha}{2}} SD(\beta_1) = \beta_1 \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{M}}$$

hvor

$$M = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n \cdot \bar{x}^2 = 244 - 6 \cdot 6^2 = 28$$

Vi trenger også 2.5%-kvantilen i standard normalfordeling $N(0,1)$:

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} \stackrel{\text{tabell}}{=} 1.96$$

Vi kan nå regne ut et 95% konfidensintervall for β_1 :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{M}} &= -0.639 \pm 1.96 \frac{0.40}{\sqrt{28}} \\ &= -0.639 \pm 0.148 = \underline{\underline{[-0.787, -0.491]}} \end{aligned}$$