Løsningsforslag Statistikk og Økonomi 2014 - del 1

Oppgave 1

a) Siden Arne ikke bryr seg om hvilke sokker han går med, eller har gått med, har vi et uordnet utvalg (rekkefølgen spiller ingen rolle). I tillegg har vi et utvalg uten tilbakelegging siden han ikke bruker skitne sokker.

$$\mathrm{P}(2 \text{ uten og } 1 \text{ med hull}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{10 \cdot 2}{35} = 0.5714 \approx \underline{\underline{0.57}}$$

b) Vi setter opp følgende utfall:

H: Arne går med sokker med hull.
S: Arne går med sandaler.

Fra oppgaveteksten får vi dermed følgende sannsynligheter:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}|\mathrm{H}) = 0.20$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{S}|\overline{\mathrm{H}}) = 0.75$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{H}) = \frac{5}{7}$$
$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}}) = \frac{2}{7}$$

Vi bruker Bayes lov og loven for total sannsynlighet og får:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}}|\mathrm{S}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}})\mathrm{P}(\mathrm{S}|\overline{\mathrm{H}})}{\mathrm{P}(\mathrm{S})} = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}})\mathrm{P}(\mathrm{S}|\overline{\mathrm{H}})}{\mathrm{P}(\mathrm{H})\mathrm{P}(\mathrm{S}|\mathrm{H}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}})\mathrm{P}(\mathrm{S}|\overline{\mathrm{H}})} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0.75}{\frac{5}{7} \cdot 0.20 + \frac{2}{7} \cdot 0.75} = \underline{\underline{0.60}}$$

Oppgave 2

a) Vi bruker at marginalfordelingene er gitt ved:

$$P(X = s) = \sum_{n=0}^{2} P(X = s \cap Y = n)$$
$$P(Y = t) = \sum_{n=0}^{2} P(Y = t \cap X = n)$$

og får da:

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= 0.05 + 0.02 + 0.01 = 0.08 \\
P(X = 1) &= 0.10 + 0.08 + 0.04 = 0.22 \\
P(X = 2) &= 0.15 + 0.20 + 0.35 = 0.70 \\
P(Y = 0) &= 0.05 + 0.10 + 0.15 = 0.30 \\
P(Y = 1) &= 0.02 + 0.08 + 0.20 = 0.30 \\
P(Y = 2) &= 0.01 + 0.04 + 0.35 = 0.40
\end{aligned}$$

Vi kan nå regne ut forventinga til X og Y:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{2} x \cdot P(X = x) = 0 \cdot 0.08 + 1 \cdot 0.22 + 2 \cdot 0.70 = \underline{\underline{1.62}}$$
$$E(Y) = \sum_{i=0}^{2} y \cdot P(Y = y) = 0 \cdot 0.30 + 1 \cdot 0.30 + 2 \cdot 0.40 = \underline{\underline{1.10}}$$

b) Vi regner først ut variansen til X og Y:

$$\sigma_x^2 = [\sum_{i=0}^{2} x^2 \cdot P(X = x)] - \mu_x^2 = 0^2 \cdot 0.08 + 1^2 \cdot 0.22 + 2^2 \cdot 0.70 - 1.62^2 = \underline{0.3956}$$
$$\sigma_y^2 = [\sum_{i=0}^{2} y^2 \cdot P(Y = y)] - \mu_y^2 = 0^2 \cdot 0.30 + 1^2 \cdot 0.30 + 2^2 \cdot 0.40 - 1.10^2 = \underline{0.69}$$

Vi trenger også forventinga til g(X,Y) = XY:

$$E(XY) = \sum_{x} \sum_{y} xy \cdot P(X = x \cap Y = y)$$

Her kan vi være litt smarte for å spare oss for litt arbeid. Vi trenger ikke ta med noen av verdiene der x eller y er lik 0 (ganger vi et tall med 0, så får vi jo bare 0), og vi står dermed igjen med:

$$E(XY) = 0.08 \cdot 1 \cdot 1 + 0.20 \cdot 1 \cdot 2 + 0.04 \cdot 2 \cdot 1 + 0.35 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{1.96}$$

Vi kan nå regne ut korrelasjonskoeffisienten:

$$\begin{aligned}
\rho(X, Y) &= \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E(XY) - \mu_x \mu_y}{\sigma_x \sigma_y} \\
&= \frac{1.96 - 1.62 \cdot 1.10}{\sqrt{0.3956}\sqrt{0.69}} = 0.3407 \approx \underline{\underline{0.34}}
\end{aligned}$$

c) Ifølge sentralgrensesetningen har vi at:

$$\overline{X} \sim N(\mu_x, \frac{\sigma_x 2}{n})$$

Vi har allerede regnet ut $\mu_x = 1.62$ og $\sigma_x^2 = 0.3956$. Vi får da:

$$P(\overline{X} \leq 1.7) = G\left(\frac{1.7 - 1.62}{\sqrt{\frac{0.3956}{50}}}\right) = G(0.89939) \approx G(0.90) \overset{\text{tabell}}{=} 0.8159 \approx \underline{\underline{0.82}}$$

Oppgave 3

a) Vi bruker sannsynligheter for Poisson og får:

$$P(6 \leq X \leq 12) = \sum_{x=6}^{12} \frac{(\alpha \cdot t)^x}{x!} e^{-\alpha \cdot t} = \sum_{x=6}^{12} \frac{(16 \cdot 0.5)^x}{x!} e^{-16 \cdot 0.5} \overset{\text{calc.}}{=} 0.7449667 \approx \underline{\underline{0.74}}$$

b) Hvis T er tiden det tar før første kunde kommer, vil vi ha T∼eksp(16).

Vi bruker at 10 min = 1/6 time og får:

$$P(T \geq \frac{1}{6}) = 1 - P(T < \frac{1}{6}) = 1 - F(\frac{1}{6}) = 1 - (1 - e^{-16 \cdot \frac{1}{6}}) = e^{-16 \cdot \frac{1}{6}} = 0.06948 \approx \underline{\underline{0.069}}$$

Oppgave 4

a) Et 95% konfidensintervall for μ er gitt ved:

$$\overline{X} \pm u_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Vi kan regne ut $\overline{X}$ "manuelt" eller på kalkulatoren. Vi finner da $\overline{X}$=290. Standardavviket har vi oppgitt i oppgaveteksten, $\sigma = 10$, mens $u_{0.025} = 1.960$ finner vi fra tabellene. Vi får da følgende intervall:

$$290 \pm 1.960 \cdot \frac{10}{\sqrt{6}} \approx 290 \pm 8.00$$

Som gir oss intervallet:

$$\underline{\underline{[282, 298]}}$$

b) Vi setter opp følgende hypotesetest:

$$H_0 : \mu = 300 \text{ mot } H_1 : \mu < 300$$

Vi finner kritisk verdi:

$$k = \mu_0 - u_{0.05} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 300 - 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{6}} = 293.3$$

Siden $\overline{X} < 293.3$, kan vi forkaste nullhypotesen vår. Med andre ord: vi påstår at forventinga var mindre enn 300 g.

c) Vi skal beregne sannsynligheten:

$$P(\text{“Forkast } H_0\text{”} | \mu = 295)$$

Vi forkaster nullhypotesen hvis vi måler et gjennomsnitt mindre enn den kritiske verdien vi fant i forrige oppgave. Med andre ord:

$$P(\text{“Forkast } H_0\text{”} | \mu = 295) = P(\overline{X} < 293.3 | \mu = 295) = G\left(\frac{293.3 - 295}{\frac{10}{\sqrt{6}}}\right)$$

$$\approx G(-0.42) = 1 - G(0.42) \overset{\text{tabell}}{=} 1 - 0.6628 = 0.3372 \approx \underline{\underline{0.34}}$$